Функции нескольких аргументов

Понятие функции	каждому элементу x из множества X по некоторому закону y = f(x) поставлено в соответствие единственное значение переменной y из множества У	каждой паре чисел ***x*** и ***y*** из некоторого множества ***D*** по определенному закону $z = f\left(x, y\right)$ поставлено в соответствие единственное значение переменной ***z***.
приращение	Δx $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	Δx, Δy $\Delta_x z = f\left(x_0 + \Delta x, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right)$ частное приращение функции по переменной x $\Delta_y z = f\left(x_0, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)$ частное приращение функции по переменной y $\Delta z = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)$ полным приращением функции
производная	$f'\left(x_0\right) \overset{def}{=} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)}{\Delta x} =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $y', f'\left(x_0\right), \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df(x)}{dx}$	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f\left(x_0 + \Delta x, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x}$ частная производная функции $z = f\left(x, y\right)$ п переменной x $f'_x\left(x_0, y_0\right), \dfrac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}$ $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f\left(x_0, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta y}$
дифференциал	$dy = f'\left(x_0\right)dx$ $\exists f_x{}' = f'\left(x_0\right)$ - достаточное условие дифференцируемости функции,	) $dz = \dfrac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y} dy$) необходимое – существование частных производных;) достаточное – непрерывность этих частных производных в исследуемой точке

Так как каждой паре чисел ***x*** и ***y*** на плоскости соответствует некоторая точка $M\left(x, y\right)$, то множество ***D*** – некоторая совокупность точек плоскости. ***D*** – область определения функции $z = f\left(x, y\right)$. Область определения функции D называется **замкнутой**, если она включает в себя все свои границы.

Вспомним линии второго порядка:

1) $x^2 + y^2 = R^2$ - каноническое уравнение окружности с центром в т. **O(0,0)**.

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - эллипс с полуосями ***а*** и ***в***.

3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - гипербола с полуосями ***а*** и ***в*** (***в*** – мнимая), симметрична относительно ***ОУ***.

4) $y^2=2px$ - парабола, симметричная относительно оси ОХ

Пример.1. Найти область определения ф-ции $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

$$D(z):\begin{cases}4-x^2-y^2\ge 0\\ x^2+y^2\le 4\end{cases}$$

Ф-ция ***z*** определена в точках окружности, область – ***D*** замкнутая.

Пример 2. Найти область определения ф-ции $z=\ln\left(y-x^2\right)$.

$$D(z):\left\{y-x^2>0\Rightarrow y>x^2\right.$$

Область ***D*** незамкнутая – точки параболы $y = x^2$ не входят в D.

Частные производные функции нескольких переменных определяются как производные функции по одной из них, при условии, что прочие переменные считаются постоянными.

Механический смысл частных производных следует из их определения:

$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ – скорость изменения функции в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении оси OX;

$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ – скорость изменения функции в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении оси OY.

Величину $dz=\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x}dx+\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y}dy$ называют дифференциалом функции двух переменных $z=f\left(x,y\right)$ при выполнении следующих условий:

1) необходимое – существование частных производных;

2) достаточное - непрерывность частных производных в точке (x_0, y_0).

Пример 1 . Найти частные производные ф-ции $z=x^3y^2+\frac{x}{y}+5x$ в т. M(2,1).

$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2+\frac{1}{y}+5$ (у фиксируем) $\frac{\partial z\left(2,1\right)}{\partial x}=18$

$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-xy^{-2}$ (х фиксируем) $\frac{\partial z\left(2,1\right)}{\partial y}=14$

В направлении оси ОХ функция изменяется **быстрее**.

Пример 2 . Найти частные производные ф-ции $z=arctg\left(x^y\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^{2y}}yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+x^{2y}}x^y\ln x$$

Пример 4 . Найти частные производные ф-ции $u = e^{x^2+y^2}\sin^2 z$ в т.М $(0,1,\pi/2)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2}2x\sin^2 z, \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2}2y\sin^2 z, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 2e$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2}2\sin z\cos z, \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 0$$

Пример 5. Найти частные производные функции трех переменных $U = 2x + 3y - 4z + x^4y^3z^2$

Решение.

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}} = 2 + 4x^3y^3z^2; \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}} = 3 + 3x^4y^2z^2$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}} = -4 + 2x^4y^3z$$

Пример. Найти дифференциал функции $z = arctg\frac{x}{y}$ в т.М (2,1).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\frac{1}{y}; \frac{\partial f(2,1)}{\partial x} = \frac{1}{5}; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right); \frac{\partial f(2,1)}{\partial y} = -\frac{2}{5}$$

$$dz = \frac{1}{5}dx - \frac{2}{5}dy$$

формула применения полного дифференциала к вычислению приближенного значения функции в точке

При достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta \mathrm{x}^2 + \Delta \mathrm{y}^2}$ $\Delta z \approx dz$ т.е.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = dz(x_0, y_0)$$

Откуда

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y$$

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{15.96} + \sqrt[3]{27.33}$.

Решение. Используем формулу приближенного вычисления (2.1.6):

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}_0 + \Delta\mathrm{x}, \mathrm{y}_0 + \Delta\mathrm{y}) \approx \mathrm{f}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) + \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)}{\partial \mathrm{x}}\Delta\mathrm{x} + \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)}{\partial \mathrm{y}}\Delta\mathrm{y}.$$

Запишем наше выражение в виде функции

$$f(x,y)=\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}$$

где x = 15,96, y = 27,03.

Выберем за x_0, y_0 числа близкие к x и y.

Пусть $x_0 = 16$, $y_0 = 27$. Найдем приращения аргументов:

$\Delta x = x - x_0$, $\Delta x = 15{,}96 - 16 = -0{,}04$,

$\Delta y = y - y_0$, $\Delta y = 27{,}03 - 27 = 0{,}03$.

Найдем частные производные в точке $(x_0; y_0) = (16; 27)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

$$\frac{\partial f\,(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}=\frac{1}{4\cdot 2^3}=\frac{1}{32}=0.03$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

$$\frac{\partial f\,(x_0,y_0)}{\partial y}=\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}=\frac{1}{27}=0.037\ .$$

Найдем $f(x_0,y_0)=\sqrt[4]{x_0}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{27}=2+3=5$

Подставляя найденные значения в формулу приближенных вычислений, получим:

$$\sqrt[4]{15.96}+\sqrt[3]{27.3}\approx 5+0.03(-0.04)+0.037\cdot 0.03=$$

$$=5-0.0012+0.00111=5-0.00009=4.99991$$

Производная сложной функции. Полная производная.

Пусть $z=f(x,y)$, где $x=\varphi(t), y=\psi(t)$. Тогда в конечном итоге z – функция одной переменной t. Предположим, что z_x', z_y' непрерывны и $\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}$ существуют. Тогда

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Пример. Найти полную производную функции $z=x^2+y^2, x=t^3+3, y=2t^4+1$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=2x\cdot 3t+2y\cdot 8t^3.$$

Пусть $z=f(x,y)$, где $y=\psi(x)$. Тогда

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ - частная производная функции я по первому аргументу,

$\frac{dz}{dx}$ - полная производная функции.

Пример. . Найти полную производную функции $z=x^2+\sqrt{y}, y=\sin x$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{dy}{dx}=\cos x$$

$$\frac{dz}{dx}=2x+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x$$

Пусть $z=f\left(x,y\right)$, где $x=\varphi\left(t,\tau\right), y=\psi\left(t,\tau\right)$. z – функции двух независимых переменных t,τ. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \tau}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}$$

Пример. . Найти производные функции $z=xy, x=t\cos 2\tau, y=t^2\tau$

$$z'_t=y\cos 2\tau+x2t\tau$$

$$z'_\tau=-2yt\sin 2\tau+xt^2$$

Производные высших порядков

В общем случае частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ функции $z=f\left(x,y\right)$ являются функциями 2-х переменных. Эти функции могут оказаться дифференцируемыми в некоторой области D.

Опр. Частные производные от часных производных первого порядка называются частными производными второго порядка. Они обозначаются

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}$$

- смешанные призводные 2-го порядка

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т.д порядка

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2},\frac{\partial^5 f}{\partial x^3\partial y^2}$$

Теорема. Пусть ф-ция $z=f\left(x,y\right)$ имеет всевозможные производные до к-го порядка включительно, непрерывные в обл.D. Тогда смешанная производная к-го порядка не будет зависеть от того, в какой последовательности осуществляется дифференцирование

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x};$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x^3} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x^2}$$

Пример $z = x^5 y^3 + x^4 - \frac{1}{y}$. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 y^3 + 4x^3, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3 y^3 + 12x^2$

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 60x^3 y^2$

Скалярное поле

Говорят, что в некоторой области плоскости ХОУ задано скалярное поле, если в каждой точке этой области определена некоторая ф-ция двух независимых переменных

$$u = f(x, y).$$

Говорят, что в некоторой области 3-х мерного пространства задано скалярное поле, если в каждой точке этой области определена некоторая ф-ция трех независимых переменных

$$u = f(x, y, z).$$

Физическими примерами скалярных полей могут служить:

- поле температур неравномерно нагретого тела $T = T(x, y, z)$

-поле атмосферного давления на некотором участке земной поверхности $P = P(x, y)$

-потенциал электрического или магнитного поля вокруг проводника с током $\varphi = \varphi(x, y, z)$.

Важнейшими характеристиками скалярных полей, знание которых позволяет наглядно представляить и анализировать их, являются следующие:

1) Линии и поверхности уровня

2) Произвозводная поля в точке в заданном направлении

3) Градиент поля

Остановимся подробнее на этих понятиях

Линии и поверхности уровня

Опр. Линией уровня скалярного поля $u = u(x, y)$ называется линия на плоскости, соединяющая точки равных значений функции, т.е. семейство линий уровня на плоскости определяется уравнением $u(x, y) = const$.

В случае пространственного поля говорят о поверхностях уровня – поверхностях, на которых функция принимает одинаковые значения. Уравнения поверхностей уровня:

$$u(x, y, z) = const.$$

Физические примеры линий и поверхностей уровня

- изотермы, изобары
- эквипотенциальные линии и поверхности в теории электромагнетизма.

Производная по направлению

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена в окрестности т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и задан вектор $\bar{s} \neq 0$. Обозначим через $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ его направляющие косинусы, т.е. координаты единичного вектора $\overrightarrow{s_0} = \frac{\vec{s}}{|\bar{s}|}$ в направлении вектора $\bar{s}$.

Опр. Предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$ называется производной от функции $u = f(x, y, z)$ в т. (x_0, y_0, z_0) по направлению вектора $\bar{s}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

Из формулы следует, что зная частные производные, можно найти производную по любому направлению.

Опр. Вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ называется градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке, в которой взяты частные производные и обозначается $grad u, \nabla u$ (набла u):

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Используя понятие градиента и скалярного произведения, формулу для производной по направлению можно записать $\frac{\partial f}{\partial s} = (\nabla u, \bar{s}_0)$

Понятие градиента имеет важное физическое приложение. А именно, градиент поля в заданной точке это вектор, который указывает направление максимального роста скалярного поля, причём скорость этого роста численно равна модулю вектора-градиента.

Пример 1. Дана ф-ция $u = x^2 + y^2 + z^2$. Найти производную $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ в т. $M(1,1,1)$ в направлении вектора $\bar{s} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$.

Найдем $|\bar{s}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{14}}, \cos\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \frac{\partial u}{\partial z} = 2z, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2, \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Пример 2. Дана ф-ция $u = x^2 + y^2 + z^2$. Найти градиент функции в т. $M(1,1,1)$

$$grad u = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}$$

$$grad u|_M = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$$