

Линейная алгебра

ido.tsuab.ru

ivanovaov.com

Математика 2020

Тема 4. Обратная матрица, условия ее существования, способ нахождения.

Цель занятия:

Освоить понятие

невырожденной матрицы, обратной матрицы, союзной матрицы и присоединенной матрицы.

Познакомится с теоремой о существовании обратной матрицы.

Научиться вычислять обратную матрицу.

Опр. Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель отличен от нуля.

Опр. Матрица A^{-1} называется **обратной** для невырожденной матрицы A , если произведение матриц A и A^{-1} равно единичной матрице

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Опр. Матрица A^* , составленная из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы A , называется **союзной** матрицей.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Опр. Матрица, полученная транспонированием союзной матрицы A^* , называется *присоединенной* матрицей.

$$\tilde{A} = A^{*T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Теорема. Если определитель матрицы A не равен нулю, тогда существует единственная обратная матрица A^{-1} , определяемая формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$$

$$\det A \neq 0$$

Как найти обратную матрицу ?

Для этого нужно:

1. Вычислить $\det A$. Если $\det A \neq 0$, то матрица A^{-1} существует.

2. Составить союзную матрицу A^* , элементами которой являются алгебраические дополнения элементов матрицы A .

3. Транспонируя матрицу A^* , получить матрицу A^*_T , которую называют присоединенной матрицей и обозначают через

4. Присоединенную матрицу умножить на число:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$$

5. Сделать проверку: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Пример 1. Найти обратную матрицу и сделать проверку. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Найдем союзную матрицу A^* :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Транспонируем матрицу A^* : $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

Получаем матрицу A^{-1} : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Сделаем проверку: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-3 & -8-10+18 & -6-6+12 \\ 1-1+0 & -4+5+0 & -3+3+0 \\ -1+2-1 & 4-10+6 & 3-6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Итак, обратная матрица найдена верно.

Тема 5. Матричные уравнения.

Пусть A и B известные матрицы, а X – неизвестная матрица, связанная с матрицами A и B некоторым уравнением. Задача состоит в нахождении матрицы X .

Рассмотрим два основных типа матричных уравнений и их решение:

1. $A \cdot X = B$;

Умножим слева обе части уравнения на матрицу, обратную к A :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \text{ т.к. } A^{-1} \cdot A = E, \text{ то получим}$$

$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Умножение на матрицу E не изменяет матрицу, поэтому решение уравнения:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Тема 6. Решение систем линейных уравнений матричным методом

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

С этой системой уравнений связаны следующие матрицы.

Матрица коэффициентов при неизвестных $A_{n \times n}$ называется *основной матрицей системы*.

Основная матрица системы A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица-столбец свободных членов $B_{n \times 1}$ и матрица-столбец неизвестных $X_{n \times 1}$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Исходную систему удобно записать в компактной матричной форме

$$A \cdot X = B$$

Произведение матриц $A_{n \times n} \cdot X_{n \times 1}$ определено, так число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X .

Умножим слева обе части уравнения на матрицу, обратную к A :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \text{ т.к. } A^{-1} \cdot A = E, \text{ то получим}$$

$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Умножение на матрицу E не изменяет матрицу, поэтому решение уравнения:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Пример 2. Решить систему уравнений матричным способом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим три матрицы: A – основная матрица системы, X – матрица-столбец неизвестных x_1, x_2, x_3 , B – матрица-столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Пользуясь правилом умножения матриц, система может быть записана в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

или $A \cdot X = B$. Отсюда $X = A^{-1} \cdot B$. Матрица A^{-1} найдена в предыдущем примере. Решение в матричной форме запишется так:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 + 4 - 18 \\ 15 + 5 - 18 \\ -15 - 6 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Итак, решение данной системы: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

3. Банк задач для самостоятельной работы

В задачах 1 – 5 найти обратную матрицу и сделать проверку:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ Ответ. $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ Ответ. $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$5. \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Ответ. } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10 & -9 & 14 \\ 13 & 12 & -17 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

В задачах 6 – 8 решить системы уравнений матричным способом:

$$6. \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases} \quad \text{Ответ. } x_1 = x_2 = x_3 = -1.$$

$$7. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases} \quad \text{Ответ. } (1, -1, 2).$$

$$8. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases} \quad \text{Ответ. } (1, 2, -2).$$

Тема 7. Ранг матрицы

Цель занятия:

Освоить понятие

минора порядка s матрицы A ,

ранга матрицы,

элементарных преобразований матрицы.

2. Познакомится с вычислением ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

При рассмотрении свойств определителя мы отмечали, что определитель равен нулю, если ряды матрицы определителя *линейно зависимы*, т.е. один может быть представлен в виде линейной комбинации остальных.

Если ни один из рядов матрицы нельзя представить как линейную комбинацию остальных, ряды матрицы являются *линейно независимыми*. Таким образом, мы подходим к понятию *ранга матрицы*.

Опр. Пусть дана матрица A размера $(m \times n)$ и пусть число $s > 1$, $s \leq m$, $s \leq n$. Выберем в матрице A произвольно s разных строк и s разных столбцов. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка s . Определитель этой матрицы называется *минором порядка s матрицы A* .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & -7 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Взяв первую и вторую строку, третий и четвертый столбец, получим матрицу второго порядка и ее определитель. Этот определитель является минором второго порядка для исходной матрицы.

Опр. Рангом матрицы A называется **наивысший порядок отличного от нуля минора** этой матрицы и обозначается

$$\text{rang } A = r.$$

Если ранг матрицы равен r , это значит, что в матрице найдется хотя бы один минор порядка r , не равный нулю, а **все миноры более высокого порядка равны нулю.**

Опр. Любой, не равный нулю **минор** матрицы A порядка, равного рангу матрицы A , называется **базисным**.

Теорема (о ранге матрицы). Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк этой матрицы.

Следствие. Максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов в этой матрице.

Рассмотрим **методы вычисления ранга матрицы.**

Таких методов два.

Первый метод – метод **окаймляющих миноров** – основан на определении ранга матрицы.

Непосредственным вычислением находим минор k -того порядка, не равный нулю (обычно $k=2$). Далее вычисляем по очереди все миноры $k+1$ порядка, содержащие внутри себя минор k -того порядка (**окаймляющие** этот минор), пока не найдем минор $\neq 0$. Если среди окаймляющих миноров нет ни одного минора $\neq 0$, то ранг матрицы $r = k$. Если найдется минор $k+1$ порядка $\neq 0$, то вычисляются окаймляющие его миноры $k+2$ порядка. И т.д.

Второй метод- метод **элементарных преобразований** – состоит в том, что с помощью элементарных преобразований матрицу приводят к квазитреугольному виду

Опр. *Элементарными* называются следующие преобразования матрицы:

1. транспонирование;
2. перестановка двух параллельных рядов матрицы;
3. умножение некоторого ряда матрицы на отличное от нуля число;
4. прибавление к одному ряду матрицы другого параллельного ряда, умноженного на любое число;
5. вычеркивание нулевого ряда;
6. вычеркивание одного из двух пропорциональных или одинаковых параллельных рядов.

Теорема. Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Т.о. для нахождения ранга матрицы используются те же приемы, что и при вычислении определителей высокого порядка. Выявляемые при этом линейно зависимые строки вычеркиваются, а по количеству оставшихся линейно независимых строк судят о ранге.

Пример 1. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{3 \times 4} \Rightarrow r(A) \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

Пример 2. Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & 4 \\ -1 & -4 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 + S_1 \\ S_3 + S_1 \\ S_4 - S_1 \\ S_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Вторая, третья и четвертая строки оказались пропорциональными. Это значит, любые две из этих строк можно вычеркнуть, а именно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Вычтем из третьей строки вторую, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Итак, имеем три ненулевые линейно независимые строки.

Следовательно, $\text{rang } A = 3$.

Пример 3. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - S_1 \\ S_3 - 5S_1 \\ S_4 - 7S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 - 2S_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 3$$

Пример 4. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 - S_1 \\ S_4 - S_1 \\ S_5 - 2S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

Пример 5. Найти ранг матрицы

$$\begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$C_4 = 3C_1, \quad C_5 = -2C_2$$

$$\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 49 & 40 & 73 \\ 73 & 59 & 98 \\ 47 & 36 & 71 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 3S_1 \\ S_4 - 2S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 24S_1 \\ S_3 - S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -29 & 12 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 3$$

Банк задач для самостоятельной работы

В задачах 1 – 3 найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров.

$$1. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ. 1) 2; 2) 3; 3) 3.

В задачах 4 – 9 найти ранг матрицы методом элементарных преобразований.

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$8. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$9. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ. 4) 2; 5) 2; 6) 2; 7) 3; 8) 4; 9) 5.