Линейная алгебра

Тема1. Матрицы. Действия над матрицами.

Опр. Числовой матрицей А размера (m x n) называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m *строк* и n *столбцов*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|$$

где a_{ij} – элементы матрицы, *i,j* – индексы элемента,

i- первый индекс, показывающий номер строки,

j – второй индекс указывает номер столбца

Опр. Строки и столбцы матрицы называются ее *рядами*.

Опр. Матрица, состоящая лишь из одной строки, называется *матрицей-строкой*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Опр. Матрица, имеющая лишь один столбец, называется *матрицей-столбцом*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Опр. Если число строк в матрице равно числу столбцов , т.е. m = n , то матрица называется *квадратной матрицей порядка n.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

квадратные матрицы первого, второго и третьего порядка.

Опр. *Единичной матрицей E* называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

Над матрицами можно выполнять как линейные, так и нелинейные операции.

К *линейным операциям* относятся:

1. Сложение (вычитание) матриц.
2. Умножение матрицы на число.
3. Линейная комбинация матриц.

К *нелинейным операциям* относятся:

1. Произведение матриц.
2. Транспонирование матрицы.

Замечание: В результате всех перечисленных действий над матрицами всегда получается матрица.

1. Сложение и вычитание матриц определяются только *для матриц одного размера*.

<u>Опр</u>. Суммой двух матриц A_{mxn} и B_{mxn} называется матрица $C_{mxn} = A + B$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

2. <u>Опр.</u> Произведением числа α на матрицу A_{mxn} называется матрица $C_{mxn} = \alpha \bullet A_{mxn}$, полученная из данной умножением всех ее элементов на число α: $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

Матрицу (-1)A будем называть матрицей, *противоположной* матрице A, и обозначать –A.

Пример 1. Даны две матрицы A и B. Найти матрицы: A + B, A - B, 2A – 4B.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+0 & 4-1 \\ 5+3 & 6+2 \\ 7-5 & 8+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 8 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3-0 & 4+1 \\ 5-3 & 6-2 \\ 7+5 & 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

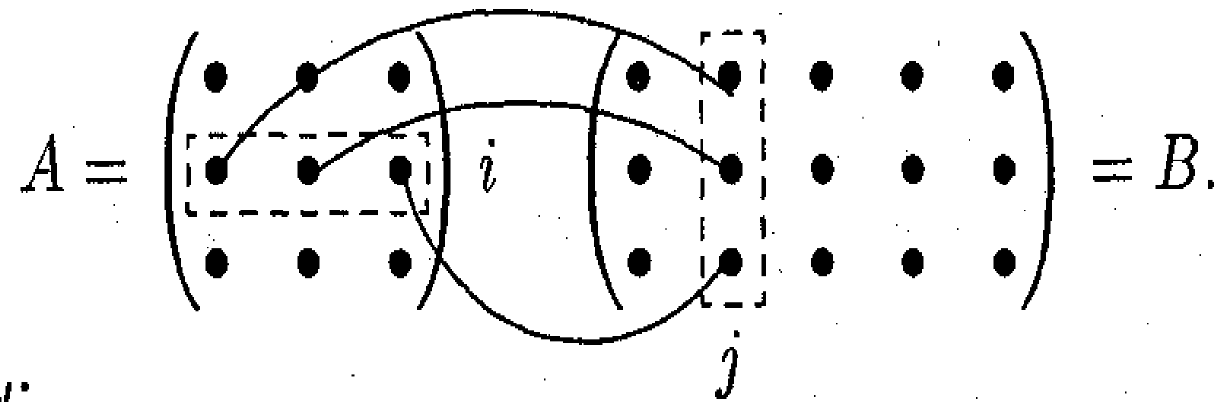
$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{pmatrix} \qquad -4B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -12 & -8 \\ 20 & -16 \end{pmatrix}$$

$$2A - 4B = \begin{pmatrix} 6+0 & 8+4 \\ 10-12 & 12-8 \\ 14+20 & 16-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 4 \\ 34 & 0 \end{pmatrix}$$

Опр. **Умножение матриц** определяется для **согласованных матриц**. Матрица A_{mxn} называется согласованной с матрицей B_{nxp}, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Произведением матрицы A размера (mxn) на матрицу B размера (nxp) называется матрица C размера (mxp), для которой каждый элемент c_{ij} равен сумме произведений i-той строки матрицы A на соответствующие элементы j-того столбца матрицы B.

Получение элемента c_{ij} схематично изображается так:



Примеры:

$$1)\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Пример 2. Даны матрицы A, B,C. Указать все возможные произведения матриц и найти любые два. Запишем размерности матриц: A = (3 x 2), B = (2 x 3), C = (3 x 3). Можно найти A · B, B · C, C · A. Найдем AB и BC.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -5 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times2} \cdot B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = AB_{3\times3}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot0+4\cdot(-1) & 3\cdot3+4\cdot2 & 3\cdot(-5)+4\cdot4 \\ 5\cdot0+6\cdot(-1) & 5\cdot3+6\cdot2 & 5\cdot(-5)+6\cdot4 \\ 7\cdot0+8\cdot(-1) & 7\cdot3+8\cdot2 & 7\cdot(-5)+8\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 17 & 1 \\ -6 & 27 & -1 \\ -8 & 37 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Банк задач для самостоятельной работы

1. Даны две матрицы A и B. Найти матрицы: 3A, 2B, 3A + 2B, A - B, 3A – 2B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Даны матрицы A, B,C, D, E, F. Указать и найти все возможные произведения матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

E = (4 0 -2 3 1),

$$F = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ответ.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 29 & -22 \\ 31 & -24 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A \begin{pmatrix} 13 & -10 \\ 14 & -10 \\ 21 & -16 \end{pmatrix} \qquad C \cdot B \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 11 & 17 \\ 12 & 23 \end{pmatrix} \qquad E \cdot F = \begin{pmatrix} 24 & 0 & -12 & 18 & 6 \\ -8 & 0 & 4 & -6 & -2 \\ 28 & 0 & -14 & 21 & 7 \\ 16 & 0 & -8 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot F = \begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = A \cdot A^2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 6 \\ -3 \cdot 1 + (-3) \cdot 6 & (-3) \cdot (-2) + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -14 \\ -21 & 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -98 \\ -147 & 294 \end{pmatrix}.$$

Опр. ***Транспонированием*** называется операция замены строк матрицы ее столбцами с теми же номерами. Матрицу, транспонированную по отношению к матрице A, принято обозначать A^T.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} (m\text{x}n)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} (n\text{x}m)$$

Тема 2. Определители. Свойства и вычисление.

Цель занятия:

Освоить понятие

определителя квадратной матрицы,

минора и алгебраического дополнения элемента квадратной матрицы.

2. Познакомится со свойствами определителя и научится вычислять определители.

Определители. Их вычисление.

Опр. Определителем или детерминантом квадратной матрицы порядка n называется число, вычисляемое из элементов этой матрицы по определенному правилу.

Определитель обозначается символами ΔA или Det A.

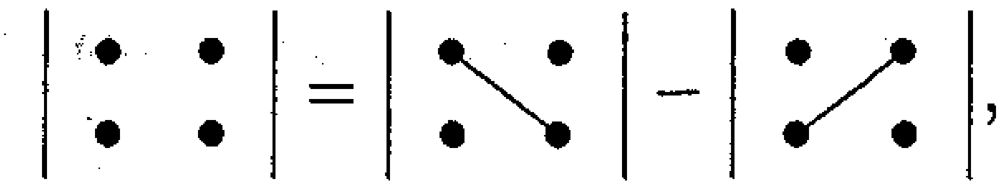
$$Det\ A = \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

В определителе различают главную и побочную диагонали.

Опр. Определитель матрицы 1-го порядка равен самому элементу этой матрицы

$$\Delta A = \left| a_{11} \right| = a_{11}$$

<u>Опр</u>. Определителем квадратной матрицы 2-го порядка называется число, равное разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях:



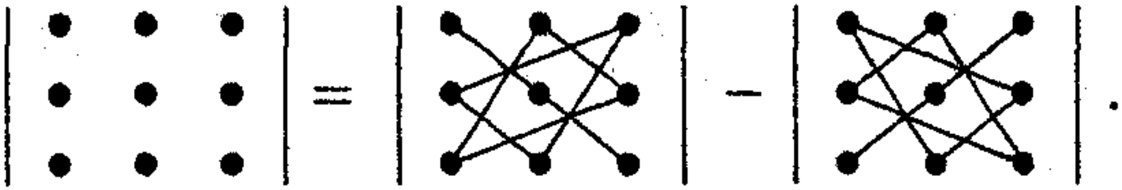
$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = = 2 \quad 5 \text{ - } 4 \quad (\text{-}3) = 10 + 12 = 22.$$

Опр. Определителем квадратной матрицы третьего порядка называется число

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$



(основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали)

(основания треугольников параллельны побочной диагонали)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 6 + 0\cdot 5\cdot(-1) + 3\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 4\cdot(-1) -$$

$$-0\cdot 3\cdot 6 - 0\cdot 5\cdot 2 = 48 + 4 = 52.$$

Опр. Минором m_{ij} элемента a_{ij} матрицы А порядка n называется определитель порядка (n-1), полученный из элементов матрицы после вычеркивания строки с номером i и столбца с номером j, на пересечении которых стоит этот элемент.

Так, если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то $m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Опр. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы порядка n называется минор этого элемента m_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$.

Так, $A_{11} = +m_{11}$, $A_{32} = -m_{32}$.

Свойства определителей.

1. Определитель матрицы не изменится при ее транспонировании матрицы, т.е. замене всех его строк соответствующими столбцами.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 7 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$\Delta A = \Delta A^T$.

2. Если переставить в определителе два параллельных ряда, то определитель сменит знак на противоположный.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 7 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -4 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

3. Множитель, общий элементам какого-либо ряда, можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 42 \\ -1 & -8 & 3 \\ -8 & -18 & 0 \end{vmatrix} = 7\cdot(-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & -8 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Или обратное: чтобы умножить определитель на число, нужно умножить на это число элементы одного из рядов определителя.

4. Определитель матрицы равен нулю, если

а) все элементы какого-либо ряда равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

б) матрица содержит два одинаковых ряда

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 7 & -4 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

в) матрица содержит два ряда, элементы которых пропорциональны

$$\begin{vmatrix} 21 & -15 & 18 \\ 0 & 2 & 4 \\ -7 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -7 & 5 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \\ -7 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

г) в матрице есть ряд, элементы которого представляют собой линейную комбинацию соответствующих элементов других рядов

$$\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$S_3 = (-1)S_1 + 2\,S_2$$

5) Определитель матрицы не изменится, если все элементы какого-либо ряда умножить на отличное от нуля число и прибавить к соответствующим элементам другого ряда.

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 5 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ -3S_1 + S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 5 \\ -21+8 & 12-1 & -15+0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & -4 & 5 \\ -13 & 11 & -15 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

6) <u>Основное правило вычисления определителей любого порядка</u>:

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо i-той строки (или j-того столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\Delta A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Например, разложим определитель третьего порядка по элементам 1-ой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

<u>Следствие</u>. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \\ (\textit{разложение} \cdot \textit{по} \cdot \textit{элементам} \cdot 1 - \textit{й} \cdot \textit{строки}) \\ a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} \\ (\textit{разложение} \cdot \textit{по} \cdot \textit{элементам} \cdot 3 - \textit{го} \cdot \textit{столбца}) \end{vmatrix}$$

Вычислим определитель, разложив его по элементам **первой строки**:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 24 - 0 + 1\cdot 4 = 48 + 4 = 52.$$

Вычислим определитель, разложив его по элементам **второго столбца**:

.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 4\cdot 13 - 0 = 52.$$

Вычисление определителей высших порядков.

Определители высших порядков можно вычислять двумя способами:

1. Последовательное понижение порядка определителя вплоть до второго, получая в какой-либо строке (или столбце) все нули, кроме одного элемента и раскладывая определитель по этой строке (или столбцу).

2. Привести матрицу к треугольному виду и использовать последнее следствие.

Рассмотрим следующий пример:

$$\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array}\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 7 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot \begin{vmatrix} S_1-2S_3 \\ S_2+2S_3 \\ S_3 \\ S_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & -10 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 1 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

Вынесем за знак определителя общий множитель элементов второй строки равный 5 и вычислим определитель, расписав его по элементам первого столбца.
Далее приведем последний определитель к треугольному виду. Умножим первую строку на 2 и прибавим ко второй, умножим первую строку на 4 и прибавим к третьей:

$$= 4\cdot 5\begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & -10 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}. = 20\cdot \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 20\cdot \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2+2S_1 \\ S_3+4S_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 0 & -9 & -16 \\ 0 & -27 & -38 \end{vmatrix} =$$

$$= 20\cdot \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3-3S_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 0 & -9 & -16 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 20\cdot(-1)\cdot(-9)\cdot 10 = 1800.$$

Тема 3. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Пусть дана система **n** линейных уравнений с **n** неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\ldots & +a_{nn}x_n & =b_n \end{cases}$$

Матрица коэффициентов при неизвестных A_{nxn} называется **основной матрицей системы**

Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется **определителем системы**.

Если определитель системы отличен от нуля, $\Delta \neq 0$, то система называется **невырожденной**.

Теорема. Система n линейных уравнений с n неизвестными **имеет единственное решение** тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы отличен от нуля, $\Delta \neq 0$.

Неизвестные системы находятся по формулам Крамера

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

где Δ – определитель основной матрицы А, Δ_k – определитель , который получается из определителя Δ заменой k-того столбца столбцом свободных членов.

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = 40 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23 \neq 0 \Rightarrow$$

система имеет единственное решение

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 40 & -5 \end{vmatrix} = -115, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 40 \end{vmatrix} = 92.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 5; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -4.$$

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 - 2S_2 \\ S_2 \\ S_3 - 3S_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$$

система имеет единственное решение

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 25 \qquad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -25$$

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$.

3. Банк задач для самостоятельной работы

В задачах 1 – 5 вычислить определители 2-го порядка:

1. $\begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

Ответ: 1) 2; 2) 10; 3) 18; 4) 0; 5) 1.

В задачах 6 –11 вычислить определители 3-го порядка:

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$

Ответ. 6) 0; 7) –12; 8) 29; 9) –29; 10) 0; 11) $2a^3$.

В задачах 12 – 14 вычислить определители 4-го порядка:

12. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 13. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

В задачах 15 – 17 решить системы по правилу Крамера:

15. $\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ 2x + 7y = 81 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 3y - 4x = 1 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$ 17. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

Ответ. 15) x = 16, y = 7; 16) x = 2, y = 3. 17) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.