# Линейная алгебра

**ido.tsuab.ru**

**ivanovaov.com**

**Математика 2020**

## Тема1. Матрицы. Действия над матрицами.

Цель занятия:

1. Освоить понятия:

матрица,

виды матриц

2. Освоить понятия и приобрести навыки операций над матрицами:

сложение матриц,

умножение матрицы на число,

Линейная комбинация матриц,

умножение матриц, возведение матрицы в целую положительную степень,

транспонирование матрицы.

# Матрицы (основные понятия)

Опр. Числовой матрицей A размера (m x n) называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m *строк* и n *столбцов*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|$$

где $a_{ij}$ – элементы матрицы, *i,j* – индексы элемента,

*i*- первый индекс, показывающий номер строки,

*j* – второй индекс указывает номер столбца

Опр. Строки и столбцы матрицы называются ее *рядами*.

Опр. Матрица, состоящая лишь из одной строки, называется *матрицей-строкой*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Опр. Матрица, имеющая лишь один столбец, называется *матрицей-столбцом*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Опр. Если число строк в матрице равно числу столбцов , т.е. m = n , то матрица называется *квадратной матрицей порядка n.*

$$\left(a_{11}\right), \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

квадратные матрицы первого, второго и третьего порядка.

Опр. *Главная диагональ* квадратной матрицы образована элементами, стоящими на линии, соединяющей левый верхний элемент с правым нижним.

Опр. *Побочная диагональ* образована элементами, стоящими на линии, соединяющей левый нижний элемент с правым верхним.

Опр. *Диагональной матрицей* называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю, т.е. матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Опр</u>. *Единичной матрицей Е* называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице.

Опр. *Треугольной матрицей* называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Различают соответственно *верхнюю* и *нижнюю* треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Опр. Матрица произвольных размеров

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

называется *квазитреугольной* или *трапециевидной*.

где $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1,2,\dots r)$, $a_{ik} = 0$ при $i > r$ ,

## Действия над матрицами

Над матрицами можно выполнять как линейные, так и нелинейные операции.

К *линейным операциям* относятся:

1. Сложение (вычитание) матриц.
2. Умножение матрицы на число.
3. Линейная комбинация матриц.

К *нелинейным операциям* относятся:

1. Произведение матриц.
2. Транспонирование матрицы.

Замечание: В результате всех перечисленных действий над матрицами всегда получается матрица.

1. Сложение и вычитание матриц определяются только *для матриц одного размера*.

<u>Опр</u>. Суммой двух матриц $A_{mxn}$ и $B_{mxn}$ называется матрица $C_{mxn} = A + B$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 12 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & -11 & 13 \\ 14 & -5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B - A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 10 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Опр. Произведением числа α на матрицу $A_{mxn}$ называется матрица $C_{mxn} = \alpha \bullet A_{mxn}$, полученная из данной умножением всех ее элементов на число α:

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

Матрицу (-1)A будем называть матрицей, *противоположной* матрице A, и обозначать –A.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \qquad -5A = \begin{pmatrix} -20 & 5 \\ -25 & -10 \\ -15 & 35 \end{pmatrix}$$

3. <u>Опр.</u> Матрица С называется линейной комбинацией матриц А и В, если выполняется равенство:

$$C = \alpha A + \beta B$$

где α и β – коэффициенты линейной комбинации.

,

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 8 & 3 \\ -1 & -6 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Найти $$C = 5B - 4A$$

$$C = 5B - 4A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 8 & 3 \\ -1 & -6 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} =$$

,

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -10 & 25 \\ 30 & -35 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -16 & 20 \\ 32 & 12 \\ -4 & -24 \\ 0 & -44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -20 \\ -42 & 13 \\ 34 & -11 \\ 5 & 34 \end{pmatrix}$$

Замечание: линейные операции над матрицами обладают теми же свойствами, что и операции сложения и умножения на множестве чисел.

$$1.\ A+B=B+A$$

$$2.\ (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$3.\ A+O=A$$

$$4.\ A+(-A)=O$$

$$6.\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$$

$$7.\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

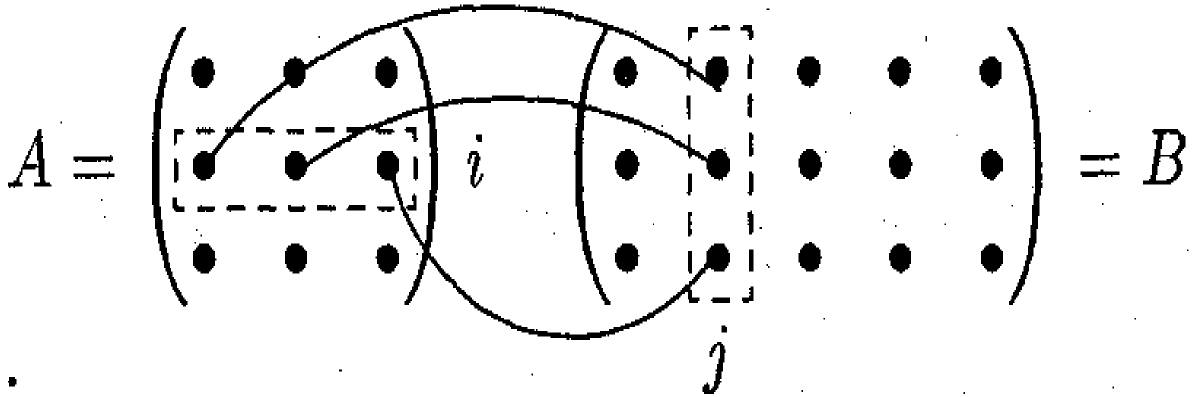
$$8.\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$

где A, B, C – матрицы одних и тех же размеров.

3. Опр. **Умножение матриц** определяется для **согласованных матриц**. Матрица $A_{mxn}$ называется согласованной с матрицей $B_{nxp}$, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Произведением матрицы A размера (mxn) на матрицу B размера (nxp) называется матрица C размера (mxp), для которой каждый элемент $c_{ij}$ равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы A на соответствующие элементы j-того столбца матрицы B.

Получение элемента $c_{ij}$ схематично изображается так:




*Примеры:*

1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} (3\text{x}3) \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (3\text{x}2)$$

$$C = A \cdot B \, (3\text{x}2) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot 9 + 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 5 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 9 + 1\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 0 + (-4)\cdot 1 & 3\cdot 9 + 2\cdot 3 + (-4)\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 9 & 22 \\ 11 & 37 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 1\text{x}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\text{x}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\text{x}1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left( 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \right) = \left( 13 \right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \left| \left(3x1\right)\left(1x3\right) = \left(3x3\right) \right| =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

**ПРИМЕР.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0+0\cdot 1+(-1)\cdot(-2) & 1\cdot(-1)+0\cdot 0+(-1)\cdot 2 \\ 2\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot(-2) & 2\cdot(-1)+1\cdot 0+0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Пример**. Среди данных матриц указать те пары матриц, которые можно перемножить и найти эти произведения.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \ (2\times 3) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (3\times 1)$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ (2\times 2) \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} (1\times 4)$$

AxB(2x1), BxD(3x4), CxA(2x3).

$$A \times B = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

,

$$B \times D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 8 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

,

$$C \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = A \cdot A^2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} =$$

,

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 6 \\ -3 \cdot 1 + (-3) \cdot 6 & (-3) \cdot (-2) + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -14 \\ -21 & 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -98 \\ -147 & 294 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами.

Если имеют смысл соответствующие действия, то

В общем случае A·B ≠ B·A.

(A•B)•C=A•(B•C)

(A+B)•C=A•C+B•C

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Опр. Если матрицы A и B удовлетворяют условию $A \bullet B = B \bullet A$, то матрицы A и B называются **перестановочными** или коммутативными.

Можно показать, что для любой квадратной матрицы A порядка $n$ справедливо соотношение $A \bullet E = E \bullet A = A$, где E – единичная матрица порядка $n$.

Опр. *Транспонированием* называется операция замены строк матрицы ее столбцами с теми же номерами. Матрицу, транспонированную по отношению к матрице A, принято обозначать $A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} (m\text{x}n)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} (n\text{x}m)$$

## Тема 2. Определители. Свойства и вычисление.

Цель занятия:

1.Освоить понятие определителя квадратной матрицы, минора и алгебраического дополнения элемента квадратной матрицы.

2. Познакомится со свойствами определителя и научится вычислять определители.

### Определители. Их вычисление.

Опр. Определителем или детерминантом квадратной матрицы порядка n называется число, вычисляемое из элементов этой матрицы по определенному правилу.

Определитель обозначается символами $\Delta A$ или Det A.

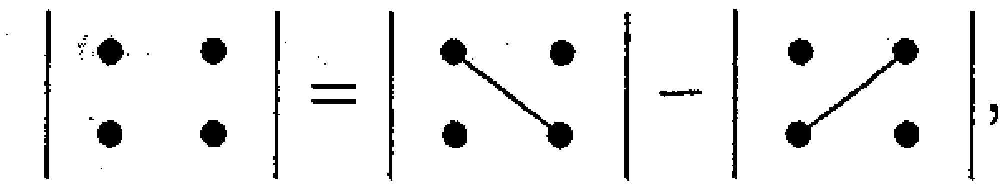
$$Det\ A = \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

В определителе различают главную и побочную диагонали.

<u>Опр.</u> Определитель матрицы 1-го порядка равен самому элементу этой матрицы

$$\Delta A = |a_{11}| = a_{11}$$

Опр. Определителем квадратной матрицы 2-го порядка называется число, равное разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях:



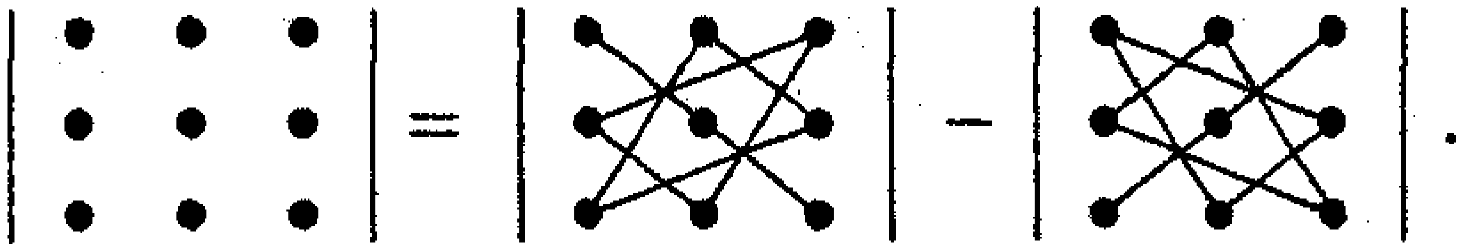
$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 2 + 15 = 17$$

Опр. Определителем квадратной матрицы третьего порядка называется число

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$



(основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали)

(основания треугольников параллельны побочной диагонали)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 60 - 96 + 18 + 56 + 40 = -49$$

Опр. **Минором** $m_{ij}$ элемента $a_{ij}$ матрицы A порядка n называется определитель порядка (n-1), полученный из элементов матрицы после вычеркивания строки с номером i и столбца с номером j, на пересечении которых стоит этот элемент.

Так, если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то $m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Опр. Алгебраическим дополнением $A_{ij}$ элемента $a_{ij}$ матрицы порядка n называется минор этого элемента $m_{ij}$, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, m_{ij}$.

$$\text{Так, } A_{11} = +m_{11},\ A_{32} = -m_{32}.$$

## **Свойства определителей**.

1. Определитель матрицы не изменится при ее транспонировании, т.е. замене всех ее строк соответствующими столбцами.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 7 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$\Delta\ A = \Delta\ A^T$.

2. Если переставить в определителе два параллельных ряда, то определитель сменит знак на противоположный.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 7 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -4 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

3. Множитель, общий элементам какого-либо ряда, можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 42 \\ -1 & -8 & 3 \\ -8 & -18 & 0 \end{vmatrix} = 7\cdot\left(-2\right)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & -8 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Или обратное: чтобы умножить определитель на число, нужно умножить на это число элементы одного из рядов определителя.

4. Определитель матрицы равен нулю, если

а) все элементы какого-либо ряда равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

б) матрица содержит два одинаковых ряда

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 7 & -4 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

в) матрица содержит два ряда, элементы которых пропорциональны

$$\begin{vmatrix} 21 & -15 & 18 \\ 0 & 2 & 4 \\ -7 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -7 & 5 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \\ -7 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

г) в матрице есть ряд, элементы которого представляют собой линейную комбинацию соответствующих элементов других рядов

$$\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$S_3 = (-1)S_1 + 2\,S_2$$

5) Определитель матрицы не изменится, если все элементы какого-либо ряда умножить на отличное от нуля число и прибавить к соответствующим элементам другого ряда.

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 5 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ -3S_1 + S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 5 \\ -21+8 & 12-1 & -15+0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & -4 & 5 \\ -13 & 11 & -15 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

## 6) Основное правило вычисления определителей любого порядка:

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо i-той строки (или j-того столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\Delta A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Например, разложим определитель третьего порядка по элементам 1-ой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

<u>Следствие</u>. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \\ (\text{разложение} \cdot \text{по} \cdot \text{элементам} \cdot 1 - \text{й} \cdot \text{строки}) \\ a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} \\ (\text{разложение} \cdot \text{по} \cdot \text{элементам} \cdot 3 - \text{го} \cdot \text{столбца}) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = 1\cdot 33 + 2\cdot(-2) + 3\cdot(-26) = -49$$

Очевидно, что проще всего вычислять определитель, если **в каком – либо ряду два нуля**: тогда нужно вычислить только одно слагаемое. Если в исходном определителе нет нулей, то их можно получить, используя свойства определителя.

Получим два нуля в первом столбце: для этого умножим первую строку на (-4) и прибавим ко второй, затем умножим первую строку на (-6) и прибавим к третьей.

$$\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 - 4S_1 \\ S_3 - 6S_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 4 & -11 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = -49$$

Получать нули удобно в ряду, где есть 1. Если единицы нет, то ее нужно сначала получить.

$$\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}\begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 3 & 11 & -2 \\ 8 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 - S_1 \\ S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} получаем \cdot 1 \cdot во \cdot второй \\ строке \cdot вместо \cdot 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}\begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 1 & 7 & 5 \\ 8 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 - 2S_2 \\ S_2 \\ S_3 - 8S_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -10 & -17 \\ 1 & 7 & 5 \\ 0 & -51 & -43 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(-1\right)^3 \begin{vmatrix} -10 & -17 \\ -51 & -43 \end{vmatrix} =$$

$$-\left(430 - 867\right) = 437.$$

**Вычисление определителей высших порядков.**

Определители высших порядков можно вычислять двумя способами:

1. Последовательное понижение порядка определителя вплоть до второго, получая в какой-либо строке (или столбце) все нули, кроме одного элемента и раскладывая определитель по этой строке (или столбцу).

2. Привести матрицу к треугольному виду и использовать последнее следствие.

Рассмотрим второй способ вычисления определителей высших порядков:

$$\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array}\begin{vmatrix} 6 & 8 & 9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 - S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} S_4 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 9 & -12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 - 4S_1 \\ S_3 + 3S_1 \\ S_4 - 6S_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 21 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} S_1 \\ S_3 \\ S_2 \\ S_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 21 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3+2S_2 \\ S_4+2S_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 21 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4-10S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -26 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_4 \\ S_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -26 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4-2S_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 55 \end{vmatrix} =$$

$$=\left(-1\right)\cdot 1\cdot\left(-1\right)\cdot 1\cdot 55 = 55$$

## Тема 3. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Пусть дана система **n** линейных уравнений с **n** неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\ldots & +a_{nn}x_n & =b_n \end{cases}$$

Матрица коэффициентов при неизвестных $A_{nxn}$ называется основной матрицей системы

Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{m2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется **определителем системы**.

Если определитель системы отличен от нуля, $\Delta \neq 0$, то система называется **невырожденной**.

Теорема. Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы отличен от нуля, $\Delta \neq 0$.

Неизвестные системы находятся по формулам Крамера

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

где $\Delta$ – определитель основной матрицы A, $\Delta_k$ – определитель , который получается из определителя $\Delta$ заменой k-того столбца столбцом свободных членов.

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 27 \\ 8x + 7y = 19 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 53 \neq 0 \Rightarrow$$ система имеет единственное решение

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 27 & -4 \\ 19 & 7 \end{vmatrix} = 265, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 27 \\ 8 & 19 \end{vmatrix} = -159.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 5; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -3.$$

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 - S_1 \\ S_3 - S_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

система имеет единственное решение

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 14$$

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

$x_1$ =-1; $x_2$ =0; $x_3$ = 1.