Линейная алгебра

ido.tsuab.ru

ivanovaov.com

Математика 2020

ivaov2017olga@mail.ru

Тема 4. Обратная матрица, условия ее существования, способ нахождения.

Цель занятия:

Освоить понятие

невырожденной матрицы, обратной матрицы,

союзной матрицы и присоединенной матрицы.

Познакомится с теоремой о существовании обратной матрицы.

Научиться вычислять обратную матрицу.

Опр. Квадратная матрица А называется **невырожденной**, если ее определитель отличен от нуля.

Опр. Матрица A^{-1} называется **обратной** для невырожденной матрицы А, если произведение матриц А и A^{-1} равно единичной матрице

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Опр. Матрица А*, составленная из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы А, называется **союзной** матрицей.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Опр. Матрица, полученная транспонированием союзной матрицы A*, называется *присоединенной* матрицей.

$$\widetilde{A} = A^{*T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Теорема. Если определитель матрицы A не равен нулю, тогда существует единственная обратная матрица A^{-1}, определяемая формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$$

$$\det A \neq 0$$

Примеры: 1. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

♦ 1) Находим ΔA: $\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$.

2) Находим $\widetilde{A}$: $A_{11} = 1$, $A_{12} = -(-1) = 1$, $A_{21} = -3$, $A_{22} = 2$,

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Находим A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5} & -\frac{6}{5}+\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5}+\frac{1}{5} & \frac{3}{5}+\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

.

Пример. Найти обратную матрицу:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}\quad \det A=14\neq 0\Rightarrow \exists\, A^{-1}$$

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} -2 & 11 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}; \qquad A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 11 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Проверка $A^{-1}A=$

$$\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 11 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тема 5. Матричные уравнения.

Пусть А и В известные матрицы, а Х – неизвестная матрица, связанная с матрицами А и В некоторым уравнением. Задача состоит в нахождении матрицы Х.

Рассмотрим два основных типа матричных уравнений и их решение:

1. $A \cdot X = B$;

Умножим слева обе части уравнения на матрицу, обратную к А:

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то получим

$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Умножение на матрицу Е не изменяет матрицу, поэтому решение уравнения:

$X = A^{-1} \cdot B$.

2. $X \cdot A = B$.

Умножим справа обе части уравнения на матрицу, обратную к A:

$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$, т.к $A \cdot A^{-1} = E$ то получим

$X \cdot E = B \cdot A^{-1}$. Умножение на матрицу E не изменяет матрицу, поэтому решение уравнения:

$X = B \cdot A^{-1}$.

Таким образом, решение матричных уравнений связано с нахождением обратной матрицы для матрицы A и умножение ее на матрицу B слева или справа в зависимости от типа уравнения.

<u>Пример.</u> Решить

уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Это уравнение 2-го вида $X \cdot A = B$, его решение $X = B \cdot A^{-1}$.Найдем матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta A = \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ 2\cdot S_1 + S_2 \\ -1\cdot S_1 + S_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 11 & 3 & 0 \\ -10 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^4 \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ -10 & -1 \end{vmatrix} = 19 \neq 0.$$

Составляем союзную матрицу.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1;\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ -5 & 1\end{vmatrix}=9;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -5 & 2\end{vmatrix}=-13;\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}5 & 1\\ -5 & 1\end{vmatrix}=10;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}5 & 3\\ -5 & 2\end{vmatrix}=-25;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -18.$$

Запишем присоединенную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}.$$

Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку и убедимся, что $A^{-1} \cdot A = E$.
Найдем матрицу X:

$$X = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 19 & 38 & 57 \\ 76 & 95 & 114 \\ 133 & 157 & 171 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пример. Решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение 1-го вида A · X= B, решение которого X = A^{-1} · B.

Сначала найдем матрицу A^{-1}.

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}.$$

Присоединенная матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Находим матрицу X :

$$X = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тема 6. Решение систем линейных уравнений матричным методом

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\ldots & +a_{nn}x_n & =b_n \end{cases}$$

С этой системой уравнений связаны следующие матрицы.

Матрица коэффициентов при неизвестных A_{nxn} называется *основной матрицей системы.*

Основная матрица системы А

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица-столбец свободных членов B_{nx1} и матрица-столбец неизвестных X_{nx1}

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Исходную систему удобно записать в компактной матричной форме

$$A \cdot X = B$$

Произведение матриц $A_{nxn} \cdot X_{nx1}$ определено, так число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X.

Умножим слева обе части уравнения на матрицу, обратную к A:

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то получим

$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Умножение на матрицу E не изменяет матрицу, поэтому решение уравнения:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 \quad x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-1&1\\1&3&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B,\ \det A=14\neq 0\Rightarrow\exists\ A^{-1}$$

и система имеет единственное решение

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2&11&5\\2&4&2\\4&-1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-14\\0\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Замечание. Решение систем методом Крамера и матричным методом нецелесообразно проводить для случая $n > 3$.

Тема 7. Ранг матрицы

Цель занятия:

1.Освоить понятие минора порядка s матрицы A, ранга матрицы, элементарных преобразований матрицы.

2. Познакомится с вычислением ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

При рассмотрении свойств определителя мы отмечали, что определитель равен нулю, если ряды матрицы определителя *линейно зависимы*, т.е. один может быть представлен в виде линейной комбинации остальных.

Если ни один из рядов матрицы нельзя представить как линейную комбинацию остальных, ряды матрицы являются *линейно независимыми*. Таким образом, мы подходим к понятию *ранга матрицы*.

Опр. Пусть дана матрица A размера (mxn) и пусть число s >1, s ≤ m, s ≤ n. Выберем в матрице A произвольно s разных строк и s разных столбцов. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка s. Определитель этой матрицы называется *минором порядка s матрицы A.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & -7 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Взяв первую и вторую строку, третий и четвертый столбец, получим матрицу второго порядка и ее определитель Этот определитель является минором второго порядка для исходной матрицы.

Опр. *Рангом матрицы* А называется **наивысший порядок отличного от нуля минора** этой матрицы и обозначается

$$\text{rang } A = r.$$

Если ранг матрицы равен r, это значит, что в матрице найдется хотя бы один минор порядка r, не равный нулю, а **все миноры более высокого порядка равны нулю**.

Опр. Любой, не равный нулю **минор** матрицы А порядка, равного рангу матрицы А, называется ***базисным***.

Теорема (о ранге матрицы). Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк этой матрицы.

Следствие. Максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов в этой матрице.

Рассмотрим **методы вычисления ранга матрицы**.

Таких методов два.

Первый метод – метод **окаймляющих миноров** – основан на определении ранга матрицы.

Непосредственным вычислением находим минор к-того порядка, не равный нулю (обычно к=2). Далее вычисляем по очереди все миноры к+1 порядка, содержащие внутри себя минор к-того порядка (**окаймляющие** этот минор), пока не найдем минор ≠ 0. Если среди окаймляющих миноров нет ни одного минора ≠ 0, то ранг матрицы r = к. Если найдется минор к+1 порядка ≠ 0, то вычисляются окаймляющие его миноры к+2 порядка. И т.д.

Второй метод- метод **элементарных преобразований** – состоит в том, что с помощью элементарных преобразований матрицу приводят к квазитреугольному виду

Опр. *Элементарными* называются следующие преобразования матрицы:

1. транспонирование;
2. перестановка двух параллельных рядов матрицы;
3. умножение некоторого ряда матрицы на отличное от нуля число;
4. прибавление к одному ряду матрицы другого параллельного ряда, умноженного на любое число;
5. вычеркивание нулевого ряда;
6. вычеркивание одного из двух пропорциональных или одинаковых параллельных рядов.

Теорема. Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Т.о. для нахождения ранга матрицы используются те же приемы, что и при вычислении определителей высокого порядка. Выявляемые при этом линейно зависимые строки вычеркиваются, а по количеству оставшихся линейно независимых строк судят о ранге.

Пример 1. Найти ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_{3\times 4} \Rightarrow r(A) \le 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \ne 0 \Rightarrow r(A) \ge 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 3S_1 \\ S_3 - 5S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

Пример 2. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - S_1 \\ S_3 - 5S_1 \\ S_4 - 7S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 - 2S_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 3$$

Пример 3. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 - S_1 \\ S_4 - S_1 \\ S_5 - 2S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

Пример 4. Найти ранг матрицы

$$
\begin{array}{ccccc}
C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\
49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\
73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\
47 & 36 & 71 & 141 & -72
\end{pmatrix}
$$

$C_4 = 3C_1$, $C_5 = -2C_2$

$$\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 49 & 40 & 73 \\ 73 & 59 & 98 \\ 47 & 36 & 71 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 3S_1 \\ S_4 - 2S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 24S_1 \\ S_3 - S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -29 & 12 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$$r\left(A\right) = 3$$