Линейная алгебра

ido.tsuab.ru

ivanovaov.com

Математика 2020

ivaov2017olga@mail.ru

Тема 8. Общие понятия системы линейных уравнений.

Цель занятия:

Освоить понятия:

1. системы m линейных уравнений с n неизвестными,
2. основной матрицы системы,
3. матрицы-столбца свободных членов,
4. матрицы-столбца неизвестных,
5. матричной формы линейного уравнения
6. расширенной матрицы системы
7. решения системы линейных уравнений,
8. совместной и несовместной системы,
9. определенной и неопределенной совместной системы,
10. частного и общего решения неопределенной системы,
11. эквивалентных систем,
12. элементарных преобразований линейной системы.

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\overset{a_{ij}}{a}_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{cases}
$$

Здесь роль **переменных**, которые надо найти, играют величины x_j, называемые неизвестными. Числа a_{ij} называются **коэффициентами при неизвестных**, числа b_i называются **свободными членами** уравнения.

С этой системой уравнений связаны следующие матрицы.

Матрица коэффициентов при неизвестных A_{mxn} называется **основной матрицей системы**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Матрица-столбец свободных членов B_{mx1} и

матрица-столбец неизвестных X_{nx1}

Исходную систему удобно записать в компактной матричной форме

$$A \cdot X = B$$

Произведение матриц $A_{mxn} \cdot X_{nx1}$ определено, так как число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы Х.

Если к основной матрице А добавить столбец свободных членов В, получится расширенная матрица системы A_p.

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Опр. **Решением** системы линейных уравнений называется **совокупность чисел c_1, c_2, , c_n**, подстановка которых вместо x_1, x_2, …, x_n соответственно обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Опр. **Совместной** называется система, имеющая хотя бы одно решение.
Несовместной называется система, не имеющая **ни одного решения**.
Опр. Совместная система называется **определенной**, если она имеет **единственное решение**.
Совместная система называется **неопределенной**, если она имеет **бесконечное множество решений**.
Каждое решение неопределенной системы называется **частным решением** системы. Совокупность всех частных решений называется **общим решением** системы.

Опр. Две системы называются **эквивилентными** или равносильными, если любое решение одной из них является также решением другой и обратно, т.е если они имеют одно и то же множество решений.

Опр. **Элементарными преобразованиями** линейной системы называются следующие преобразования:

1) перестановка двух строк;

2) умножение всех элементов строки на любое отличное от нуля число;

3) прибавление ко всем элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженной на одно и то же число.

4) вычеркивание из матрицы нулевых строк, одной из двух одинаковых строк, одной из двух пропорциональных строк.

Теорема. При элементарных преобразованиях системы получаем систему, эквивалентную данной.

Решить систему – это значит выяснить совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Тема 9. Общий подход к решению систем уравнений

Цель занятия:

1. Познакомится с теоремой (Кронекера-Капелли) о совместности системы уравнений.
2. Познакомится с теоремой о единственности решения совместной системы.
3. Познакомится с теоремой о множестве решений совместной системы.
4. Рассмотреть правило решения произвольных систем, используя выше рассмотренные теоремы и понятие **базисного минора** основной матрицы системы.
5. Научиться решать произвольные системы уравнений.

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Одной из основных задач линейной алгебры является **исследование и решение** систем линейных уравнений.

Какова схема решения системы m линейных уравнений с n неизвестными ?

Основными этапами решения такой системы являются:

1) решение вопроса о **совместности** системы;
2) если система совместна, решить вопрос об **определенности** системы;
3) найти единственное решение, если совместная система является определенной;
4) найти все решения системы, если она является неопределенной.

12

1. Решение вопроса о **совместности системы** основано на **теореме Кронекера-Капелли**.

Теорема. Система линейных уравнений **совместна** тогда и только тогда, когда **ранг ее основной матрицы** равен **рангу расширенной матрицы**

$$\mathbf{rang\ A = rang\ A_p}.$$

2. Для того, чтобы ответить на вопрос об **определенности** системы, надо **сравнить ранг основной матрицы** системы с **числом неизвестных** системы n.

Теорема. Если **ранг матрицы А** совместной системы **равен числу неизвестных** (**r = n**), то система имеет **единственное решение** и является **определенной**.

Теорема. Если **ранг матрицы А** совместной системы **меньше числа неизвестных** (**r < n**), то система имеет **бесконечное множество решений** и является **неопределенной**.

Отметим, что обычно при решении конкретных систем линейных уравнений отдельно вопрос о совместности системы не рассматривается, так как ответ на него получается **в процессе решения системы методом Гаусса**.

Правило решения произвольной системы линейных уравнений

1. Найти ранг основной и расширенной матрицы системы.

   Если $\text{rang } A \neq \text{rang } A_p$,

то **система несовместна** (не имеет решений).

2. Если $r = \text{rang } A = \text{rang } A_p$,

система совместна.

Если $\mathbf{r = n}$, то система имеет **единственное решение**, которое находим **по правилу Крамера** или **матричным методом** (можно методом Гаусса).

Если **r < n**, то

а). найти какой-нибудь **базисный минор порядка r** (любой, не равный нулю минор матрицы А порядка, равного рангу матрицы А, называется базисным).

б).Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен **базисный минор** (остальные уравнения отбросить).

Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют **главными** и **оставляют слева**, а остальные n – r неизвестных называют **свободными** и **переносят в правые части уравнений**.

3. По правилу Крамера (или методу Гаусса) найти выражения **главных неизвестных через свободные**. Получено **общее решение системы**.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти **частные решения системы**.

Тема 10. Метод Гаусса решения произвольной системы линейных уравнений

Цель занятия:

1. Познакомиться с методом Гаусса и научиться решать произвольные системы уравнений этим методом.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов.

На первом этапе (**прямой ход**) система приводится к треугольному виду (если $r = n$) или квазитреугольному (если $r < n$).

На втором этапе (**обратный ход**) идет последовательное определение неизвестных.

Рассмотрим **метод Гаусса** подробнее.

Прямой ход.

Метод Гаусса называют также методом последовательного исключения неизвестных. Суть метода состоит в том, что **путем элементарных преобразований** из всех уравнений системы, кроме первого, **исключают неизвестное x_1**.

Далее из всех уравнений, кроме первого и второго, **исключают неизвестную x_2** и т.д.

На практике все эти действия принято проводить не над уравнениями , а над строками расширенной матрицы системы.

К **элементарным** относятся следующие преобразования:

1) перестановка двух строк;
2) умножение всех элементов строки на любое отличное от нуля число;
3) прибавление ко всем элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженной на одно и то же число.
4) вычеркивание из матрицы нулевых строк, одной из двух одинаковых строк, одной из двух пропорциональных строк.

Это связано с тем, что эти элементарные преобразования не меняют эквивалентность системы (т.е не меняют множество решений системы и ранг матрицы). В результате элементарных преобразований основная матрица приведется к виду треугольника (если ранг матрицы равен числу неизвестных) либо к виду трапеции (если ранг матрицы меньше числа неизвестных) , так как в последнем уравнении останется одно неизвестное, в предпоследнем – два и т.д. Этот процесс называется **прямым ходом метода Гаусса**.

Заметим, что при этом параллельно решаются вопросы о **совместности** и **определенности** системы.

Если ранг основной матрицы системы не равен рангу расширенной матрицы системы, то система **несовместна** и не имеет решений.

Для совместной системы рассмотрим второй этап: **обратный ход**.

Обратный ход.

Для совместной определенной системы обратный ход метода Гаусса состоит в следующем:

из **последнего уравнения** находим единственное входящее в него неизвестное,

подставляем полученное значение в **предпоследнее уравнение** и находим второе неизвестное и т.д., пока не дойдем до первого уравнения, в котором уже найдены все неизвестные, кроме одного.

Таким образом, получим совокупность значений неизвестных, образующих решение системы.

Если **ранг основной матрицы системы меньше числа неизвестных**, т.е. система является неопределенной и имеет бесконечное множество решений, то поступаем следующим образом.

1. Находим базисный минор.
2. Неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор(**базисные** неизвестные), оставляем слева, а остальные n-r неизвестных переносим в правые части уравнений и называем **свободными**.

3. Находим выражение базисных неизвестных через свободные неизвестные.

4. Придавая свободным неизвестным любые числовые значения, находим соответствующие значения базисных неизвестных, т.е. находим частные решения исходной системы.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Приводим эту матрицу к треугольному виду.

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} S_1 - S_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 + 3S_1 \\ S_3 + 5S_1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & 9 & 1 \\ 0 & -22 & 18 & 9 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 - 2S_2 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

Теперь ясно, что ranq A = 2, а ranq Ap = 3.

Согласно теореме Кронекера - Капелли из того, что

ranq A $\neq$ ranq Ap,

следует несовместность данной системы.

Система решений не имеет.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы, поменяв сразу местами первое и второе уравнение (всегда удобно иметь единицу в верхнем левом углу матрицы). Приводим эту матрицу к треугольному виду.

$$A_p = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & ! & 9 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & ! & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & ! & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & ! & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 \\ S_4 - S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & ! & 9 \\ 0 & 7 & -5 & 13 & ! & -10 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & ! & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 12 & ! & -9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 3S_3 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & ! & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & ! & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & ! & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 12 & ! & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 - 2S_2 \\ S_4 - 7S_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & ! & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & ! & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & ! & -15 \\ 0 & 0 & 7 & -37 & ! & -44 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3/3 \\ S_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & ! & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & ! & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & ! & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -37 & ! & -44 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 - 7S_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & ! & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & ! & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & ! & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & ! & -9 \end{pmatrix}$$

Матрица привелась к виду трапеции (все элементы стоящие под главной диагональю равны нулю). В обеих матрицах 4 ненулевые строки, значит в системе нет линейно зависимых уравнений и ранги матриц равны 4. Следовательно, система совместна и определенна, т.к. ранг матриц равен числу неизвестных.

Согласно полученной матрице запишем систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 5 \\ x_3 - 4x_4 = -5 \\ -9x_4 = -9 \end{cases}$$

Применим обратный ход метода Гаусса:

Из последнего уравнения находим $x_4 = 1$. Подставляем x_4 в предпоследнее уравнение и получим $x_3 = -1$. Полученные значения x_3 и x_4 подставляем во второе уравнение и получаем $x_2 = -4$. Из первого уравнения находим $x_1 = 3$.

Итак единственное решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Подставляя полученные значения неизвестных в каждое уравнение исходной системы, мы можем убедиться, что полученное решение верно.

Пример 3.

$$\begin{cases} 3x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +4x_4 & = & 2 \\ 6x_1 & -4x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & -6x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ 15x_1 & -10x_2 & +7x_3 & +5x_4 & = & 7 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к виду трапеции:

$$A_p = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & ! & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & ! & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & ! & 4 \\ 15 & -10 & 7 & 5 & ! & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 3S_1 \\ S_4 - 5S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & ! & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & ! & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & ! & -2 \\ 0 & 0 & -18 & -15 & ! & -3 \end{pmatrix} \sim$$

Видно, что 2-я, 3-я и 4-я строки пропорциональны, две из них можно отбросить

$$\sim\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & ! & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & ! & -1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что rang A = rang = 2 т.к. две ненулевые строки в матрицах.

Итак система совместна, но является неопределенной, т.к. ранг основной матрицы системы меньше числа неизвестных

Выделим минор второго порядка ≠ 0,т.е. базисный минор

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

В соответствии с выбором базисного минора выбираем базисные неизвестные x_2 , x_3 и

свободные неизвестные x_1 ,x_4.

Базисные неизвестные остаются в левой части уравнений, а свободные переносятся в правую часть и входят в столбец свободных членов.

Подчеркнем, что количество базисных неизвестных всегда равно рангу матрицы А количество свободных неизвестных равно разности числа неизвестных в системе и ранга матрицы (n-r).
Итак эквивалентная система будет иметь вид

$$\begin{cases} -2x_2 + 5x_3 = 2 - 3x_1 - 4x_4 \\ \quad\quad\; -6x_3 = -1 + 5x_4 \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим

$$x_3 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}x_4$$

Подставляя x_3 в первое уравнение находим x_2 :

$$x_2 = -\frac{7}{12} + \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{12}x_4$$

Решение системы запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ -\dfrac{7}{12}+\dfrac{3}{2}x_1-\dfrac{1}{12}x_4 \\ \dfrac{1}{6}-\dfrac{5}{6}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Получили решение, в котором базисные неизвестные выражаются через свободные. Можно в качестве свободных неизвестных брать произвольные числовые значения c_1, c_2 и записывать общее решение системы $X_{общ}$.. Задавая свободным неизвестным c_1, c_2 любые значения и вычисляя соответствующие базисные неизвестные, получаем каждый раз новое частное решение $X_{частн}$..

$$X_{общ} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -\frac{7}{12} + \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{12}c_2 \\ \frac{1}{6} - \frac{5}{6}c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad X_{част} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad X_{част} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Первое частное решение получено из общего при значениях $c_1 = 6$, $c_2 = -7$, а второе – при значениях $c_1 = 1$, $c_2 = -1$. Частных решений можно получить бесконечное множество.

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 & -4x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & -4x_4 & = & 2 \\ & x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & -7x_2 & +4x_3 & -4x_4 & = & 5 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы, поменяв местами две первые строки, а затем приведем ее к треугольному виду

$$A_p = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & ! & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & ! & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & ! & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & ! & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 \\ S_4 - 4S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & ! & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & ! & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & ! & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & ! & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & ! & 2 \\ 0 & -0 & 1 & 9 & ! & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & ! & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & ! & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_3 \\ S_2 \\ S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & ! & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & ! & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & ! & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & ! & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 - S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & ! & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & ! & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & ! & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & ! & -4 \end{pmatrix}$$

Третья и четвертая строки одинаковые, вычеркнем одну из них

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & ! & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & ! & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & ! & -4 \end{pmatrix}$$

В квазитреугольной матрице и основной и расширеннойтри ненулевые строки, ranq A = ranq Ap = 3. Система совместная и неопределенная ranq A < n.

Найдем базисный минор (ranq A = 3), минор третьего порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Базисных неизвестных – 3, свободных неизвестных – 1.
Базисные неизвестные x_1, , x_2, x_3 ,
Свободные неизвестные x_4.
Записываем эквивалентную систему с учетом того, что свободное неизвестное x_4
Переносится в правую часть уравнения.

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 2 & +4x_4 \\ & x_2 & -x_3 & = & 1 & -3x_4 \\ & & x_3 & = & -4 & -9x_4 \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_3 = -4 - 9x_4$

Далее находим $x_2 - (-4 - 9x_4) = 1 - 3x_4 + x_3 \Rightarrow x_2 = -3 - 12x_4$

И, наконец

$$x_1 - 2(-3 - 12x_4) + (-4 - 9x_4) = 2 + 4x_4 \Rightarrow$$

$$x_1 = -11x_4$$

В общее решение системы входит только одна свободная переменная x_4.
Пусть x_4=c, тогда

$$X_{общ} = \begin{pmatrix} -11c \\ -3 - 12c \\ -4 - 9c \\ c \end{pmatrix} \qquad X_{1част} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_{2част} = \begin{pmatrix} -11 \\ -15 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы, поставив на первое место последнюю строку

$$A_p = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 7 & ! & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & ! & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -6 & ! & 0 \\ 7 & 4 & 6 & -5 & ! & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 3S_1 \\ S_4 - 7S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 7 & ! & 1 \\ 0 & 1 & -12 & -13 & ! & -2 \\ 0 & 2 & -25 & -27 & ! & -3 \\ 0 & 4 & -50 & -54 & ! & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 - 2S_2 \\ S_4 - 2S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 7 & ! & 1 \\ 0 & 1 & -12 & -13 & ! & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & ! & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ! & -1 \end{pmatrix}$$

Получили, что в основной матрице системы 3 ненулевые строки, а в расширенной матрице – четыре, т.е. ранг основной матрицы не равен рангу расширенной матрицы и система несовместна.

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 3 \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к виду трапеции:

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ! & 1 \\ 2 & 4 & 6 & ! & 3 \\ 3 & 6 & 9 & ! & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 3S_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ! & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ! & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ! & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ! & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ! & 1 \end{pmatrix}$$

Итак, мы получили, что в основной матрице системы 1 ненулевая строка, а в расширенной 2, т.е. система несовместна. Решений не имеет.