Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
1 курс задача 1

Найти все действительные решения уравнения: $2^{\sin^2 x} + 2^{3+\cos^2 x} = 10$.

Решение. Запишем в виде $2^{\sin^2 x} + 8 \cdot 2^{\cos^2 x} = 10$.

$2^{1-\cos^2 x} + 8 \cdot 2^{\cos^2 x} = 10$

$\dfrac{2}{2^{\cos^2 x}} + 8 \cdot 2^{\cos^2 x} = 10$. Сделаем замену $t = \cos^2 x$

$\dfrac{2}{2^t} + 8 \cdot 2^t = 10$

$2 + 8 \cdot (2^t)^2 = 10 \cdot 2^t$

$8 \cdot (2^t)^2 - 10 \cdot 2^t + 2 = 0$.

Здесь логично сделать ещё одну замену: $2^t = y$. Тогда:

$8y^2 - 10y + 2 = 0 \quad \Rightarrow 4y^2 - 5y + 1 = 0$, найдём корни.

$D = 25 - 16 = 9$, $y = \dfrac{5 \pm 3}{8}$ $\quad y = 1$ либо $y = \dfrac{1}{4}$.

$y = 2^t = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 0$

$y = 2^t = \dfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad t = -2$

$t = -2$ не входит в область допустимых значений.

Итак, $t = \cos^2 x$ принимает значение 0.

Решением уравнения $\cos x = 0$ является множество $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$.

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$.

Олимпиада по математике   ТУСУР, 2019
1 курс   задача 2

Найти все действительные решения уравнения: $x^4+12x^2+36=125x-150$.

Решение. $x^4+12x^2+36=125x-150$.

Преобразуем, сведя к виду: $(x^2+6)^2=25(5x-6)=5^2(5x-6)$.

Тогда $\left(\dfrac{x^2+6}{5}\right)^2=5x-6$, то есть $\dfrac{x^2+6}{5}=\sqrt{5x-6}$.

Если $t=\dfrac{x^2+6}{5}$ то $5t=x^2+6$, $x^2=5t-6$, $x=\sqrt{5t-6}$. Таким образом, в равенстве $\dfrac{x^2+6}{5}=\sqrt{5x-6}$ две взаимно обратные функции. Тогда их графики могут пересекаться только на биссектрисе $y=x$. Значит, нам достаточно решить уравнение $\dfrac{x^2+6}{5}=x$.

$x^2-5x+6=0$, $D=25-24=1$, корни $\dfrac{5\pm1}{2}$, то есть 2 и 3.

Ответ. 2 и 3.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
1 курс задача 3

Прямая $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ является проекцией прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$ на плоскость S_1,

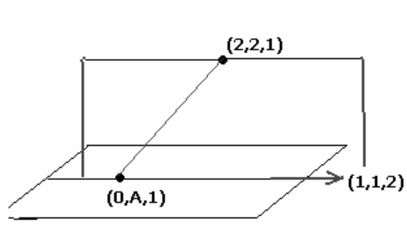
а прямая $\frac{x}{1}=\frac{y-A}{1}=\frac{z-1}{2}$ является проекцией этой же прямой на плоскость S_2.

Найти параметр A, при котором плоскости S_1 и S_2 ортогональны.

Решение. Из строения знаменателей дробей этих канонических уравенений видно, что все направляющие векторы прямых совпадают.

Найдём уравнение плоскости S_2, которая содержит проекцию, при произвольном A, тогда при $A=1$ частный случай для плоскости S_1.

Один из двух направляющих векторов этой плоскости известен: $l_1=(1,1,2)$.
Точка $(0,A,1)$ принадлежит прямой, являющейся проекцией.
Точка $(2,2,1)$ принадлежит той прямой, которая проецируется.
Вектор $(2,2-A,0)$ соединяет эти точки. Тогда плоскость, содержащая обе прямые, и проецируемую, и её проекцию (на чертеже эта плоскость расположена вертикально) имеет два образующих вектора: $(1,1,2)$ и $(2,2-A,0)$. Их векторное произведение лежит в искомой плоскости (куда проецируется прямая) и является её вторым образующим вектором.



$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2-A & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2-A & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2-A \end{vmatrix} k = -(4-2A)i-(-4)j+(2-A-2)k =$$

Итак, второй направляющий вектор плосокости: $l_2=\left(2A-4,4,-A\right)$.

Теперь через точку $(0,A,1)$ и 2 направляющих $(1,1,2)$ и $\left(2A-4,4,-A\right)$ проведём плоскость.

$$\begin{vmatrix} x & y-A & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2A-4 & 4 & -A \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -A \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2A-4 & -A \end{vmatrix} (y-A) + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2A-4 & 4 \end{vmatrix} (z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$(-A-8)x-(-A-2(2A-4))(y-A)+(4-(2A-4))(z-1)=0 \Rightarrow$$

$$-(A+8)x-(-5A+8)(y-A)+(8-2A)(z-1)=0 \Rightarrow (A+8)x+(8-5A)(y-A)+(2A-8)(z-1)=0$$

Нормаль к плоскости S_2: $n=\left(A+8,8-5A,2A-8\right)$.

При $A=1$ получается нормаль к плоскости S_1, а именно $\left(9,3,-6\right)$, можно сократить в 3 раза и рассматривать вектор $\left(3,1,-2\right)$. Осталось узнать, при каком A векторы $\left(A+8,8-5A,2A-8\right)$ и $\left(3,1,-2\right)$ ортогональны между собой.

$3(A+8)+1(8-5A)-2(2A-8)=0 \Rightarrow 48-6A=0 \Rightarrow A=8$.

Ответ. $A=8$.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
1 курс задача 4

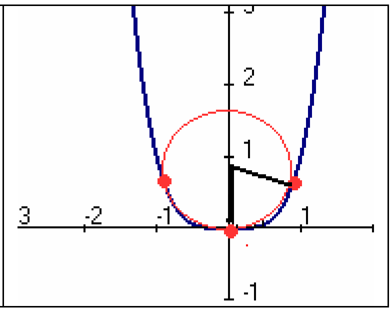
На графике $y = x^4$ при произвольном $a \neq 0$ могут быть взяты 3 точки с абсциссами 0, a, $-a$, через них проведена окружность. Найти минимально возможный диаметр окружностей, построенных таким способом.

Решение.

Пусть радиус равен R. Тогда расстояние от точки $(0, R)$ до точек $(0,0)$, (a, a^4) и $(-a, a^4)$ равно R. По теореме Пифагора,

$$R^2 = a^2 + (R - a^4)^2 \;\Rightarrow\; R^2 = a^2 + R^2 + a^8 - 2Ra^4 \;\Rightarrow$$

$$a^2 + a^8 - 2Ra^4 = 0 \;\Rightarrow\; 2Ra^4 = a^2 + a^8 \;\Rightarrow\; d = 2R = \frac{1}{a^2} + a^4 .$$



Найдём экстремум этой величины по a.

$$\left(\frac{1}{a^2} + a^4\right)' = \left(\frac{-2}{a^3} + 4a^3\right) = 0 \Rightarrow 4a^3 = \frac{2}{a^3} \Rightarrow a^6 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} .$$

При этом $\left(\frac{1}{a^2} + a^4\right)'' = \left(\frac{-2}{a^3} + 4a^3\right)' = \frac{6}{a^4} + 12a^2 > 0$, поэтому минимум, а не максимум.

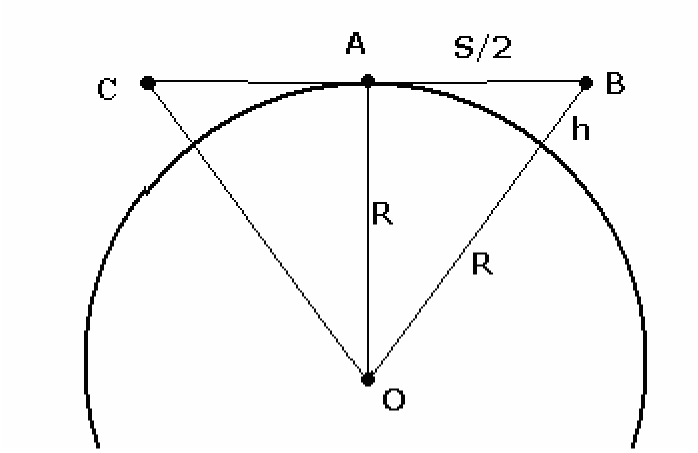
Теперь найдём d. $d = \frac{1}{a^2} + a^4 = \sqrt[6]{2}^2 + \frac{1}{\sqrt[6]{2}^4} = \sqrt[6]{2}^2 + \frac{1}{\sqrt[6]{2}^4} = \frac{\sqrt[6]{2}^6 + 1}{\sqrt[6]{2}^4} =$

$\frac{3}{\sqrt[6]{2}^4} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}^2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. **Ответ.** $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Олимпиада по математике   ТУСУР, 2019
1 курс   задача 5

Два космических аппарата взлетают вертикально с одинаковой скоростью из разных точек на планете, которая является шаром радиуса R. В некоторый момент времени они поднялись на высоту h и стали находиться в пределах прямой видимости друг друга. Каково расстояние между ними в этот момент времени?

Решение. На чертеже, $OA = R$, $OB = OC = R + h$. Два аппарата находятся в точках B и C.



Расстояние $\frac{S}{2} = AB$, это половина искомого расстояния. По теореме Пифагора,

$|AB| = \sqrt{|OB|^2 - |OA|^2} = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2}$. Тогда $S = 2\sqrt{2Rh + h^2} = 2\sqrt{h}\sqrt{2R + h}$.

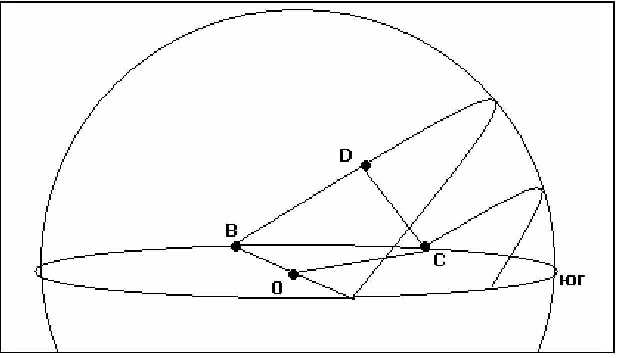
Ответ. $2\sqrt{h}\sqrt{2R + h}$.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
1 курс задача 6

Пусть наклон оси планеты - угол γ, $0^0 \le \gamma \le 45^0$. Найти широту φ (в северном полушарии), на которой точка восхода Солнца в день солнцестояния отклоняется от востока ровно на 45^0, т.е. например, восход в день зимнего солнцестояния на юго-востоке.

Решение.

Рассмотрим путь Солнца по небесной сфере. По условию задачи, дуга ВС составляет 45 градусов.
В - восток. С - юго-восток.
Показан пусть Солнца во время равноденствия и зимнего солнцестояния. Дуга CD соответствует углу γ (на какой угол отклоняется путь Солнца во время солнцестояния по сравнению с равноденствием).



Сферический угол DBC зависит от широты местности и равен $90-\varphi$ (на экваторе солнце восходит вертикально, ближе к полюсу почти горизонтально). Угол BDC=90^0 по построению, это перпендикуляр из точки С на дугу BD.

По теореме синусов для сферического треугольника верно равенство: $\dfrac{\sin D}{\sin BC}=\dfrac{\sin B}{\sin CD}=\dfrac{\sin C}{\sin BD}$

(синус угла, соотв. дуге, пропорционален синусу противолежащего угла) .

В частности, в нашем случае $\dfrac{\sin 90}{\sin 45}=\dfrac{\sin(90-\varphi)}{\sin\gamma}=\dfrac{\sin C}{\sin BD}$.

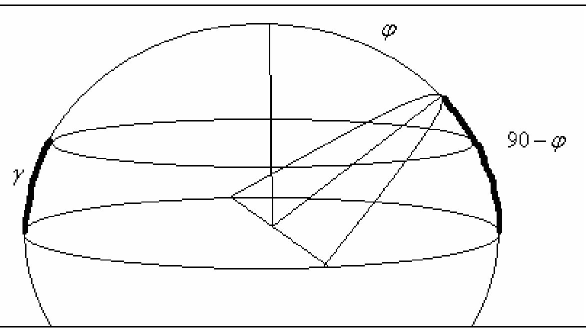
Для решения достаточно лишь первой пропорции. $\dfrac{1}{1/\sqrt{2}}=\dfrac{\sin(90-\varphi)}{\sin\gamma} \Rightarrow \dfrac{\sin(90-\varphi)}{\sin\gamma}=\sqrt{2} \Rightarrow$

$\sin(90-\varphi)=\cos\varphi=\sqrt{2}\sin\gamma \Rightarrow \varphi=\arccos\left(\sqrt{2}\sin\gamma\right)$. **Ответ.** $\varphi=\arccos\left(\sqrt{2}\sin\gamma\right)$.

Для сведения. Возможно и другое решение. Повернём сферу, так, чтобы пусть Солнца во время равноденствия занимал горизонтальную окружность максимального радиуса, а во время солнцестояния - на угол γ выше. Тогда горизонт наклонён под углом $90-\varphi$. При этом нужно, чтобы точка, движущаяся по горизонту, пересекла верхнюю окружность, пройдя по дуге ровно 45 градусов.

Уравнения движения: $\begin{cases} x=\sin\varphi\cos t \\ y=\sin t \\ z=\cos\varphi\cos t \end{cases}$

Надо, чтобы при $t=\dfrac{\pi}{4}$ достигалось $z=\sin\gamma$.



$\cos\varphi\cos\dfrac{\pi}{4}=\sin\gamma \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi=\sin\gamma \Rightarrow \cos\varphi=\sqrt{2}\sin\gamma \Rightarrow \varphi=\arccos\left(\sqrt{2}\sin\gamma\right)$.

Примечание. 1. Например, для Земли $\gamma=23^0$, $\varphi=\arccos\left(\sqrt{2}\cdot\sin(23^0)\right)\approx 56^0$, т.е. явление наблюдается на широте Томска. Если было бы $\gamma=45^0$ то $\varphi=\arccos(1)=0$, т.е. на экваторе.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
2-4 курс задача 1

Вычислить интеграл $\int \sin^2(\ln x)dx$.

Решение. Сделаем замену $\ln x = t$. Тогда $x = e^t$, $dx = e^t dt$.
$\int \sin^4(\ln x)dx = \int \sin^4(t)e^t dt$. По формуле понижения степени,

$$\int \sin^2 te^t dt = \int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)e^t dt = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)e^t dt = \frac{1}{2}\int e^t dt - \frac{1}{2}\int e^t \cdot \cos 2tdt$$

1-й элементарный, а во 2-м циклический интеграл.
Рассмотрим $I = \int e^t \cos 2tdt$.

$u = e^t$	$v = \frac{1}{2}\sin 2t$
$du = e^t dt$	$dv = \cos 2tdt$

$I = \int e^t \cos 2tdt = \frac{e^t}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}\int e^t \sin 2tdt$. Применив 2-е интегрирование по частям,

$u_2 = e^t$	$v_2 = -\frac{1}{2}\cos 2t$
$du_2 = e^t dt$	$dv_2 = \sin 2tdt$

$$I = \frac{e^t}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^t \cos 2t + \frac{1}{2}\int e^t \cos 2tdt\right)$$

$$I = \frac{1}{2}e^t \sin 2t + \frac{1}{4}e^t \cos 2t - \frac{1}{4}I \qquad \left(1+\frac{1}{4}\right)I = \frac{1}{4}e^t \sin 4t + \frac{1}{4}e^t \cos 4t$$

$$\frac{5}{4}I = \frac{1}{2}e^t \sin 2t + \frac{1}{4}e^t \cos 2t \qquad I = \frac{e^t}{5}(2\sin 2t + \cos 2t) + C .$$

Вернёмся к сумме интегралов.

$$\frac{1}{2}\int e^t dt - \frac{1}{2}\int e^t \cdot \cos 2tdt = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}\frac{e^t}{5}(2\sin 2t + \cos 2t) + C =$$

$e^t\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\sin 2t - \frac{1}{10}\cos 2t\right) + C$. После обратной замены: $x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\sin(2\ln x) - \frac{1}{10}\cos(2\ln x)\right) + C =$

Ответ. $\frac{x}{2} - \frac{x}{5}\sin(2\ln x) - \frac{x}{10}\cos(2\ln x) + C$.

Примечание. *Проверка.* $\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{5}\sin(2\ln x) - \frac{x}{10}\cos(2\ln x)\right)' =$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\sin(2\ln x) - \frac{1}{10}\cos(2\ln x) - \frac{x}{5}\frac{2}{x}\cos(2\ln x) + \frac{x}{10}\frac{2}{x}\sin(2\ln x) =$$

$$\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{10}\right)\sin(2\ln x) - \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{5}\right)\cos(2\ln x) = \frac{1-\cos(2\ln x)}{2} = \sin^2(\ln x).$$

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
2-4 курс задача 2

Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{2019}+3^{2019}+5^{2019}+...+(2n-1)^{2019}}{2^{2019}n^{2020}}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{2019}+3^{2019}+5^{2019}+...+(2n-1)^{2019}}{2^{2019}n^{2020}}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{5}{2}\right)^{2019}+...+\left(\frac{2n-1}{2}\right)^{2019}}{n^{2020}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2n}\right)^{2019}+\left(\frac{3}{2n}\right)^{2019}+\left(\frac{5}{2n}\right)^{2019}+...+\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2019}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1/2}{n}\right)^{2019}+\left(\frac{3/2}{n}\right)^{2019}+\left(\frac{5/2}{n}\right)^{2019}+...+\left(\frac{(2n-1)/2}{n}\right)^{2019}\right)$$

Здесь присутствует интегральная сумма функции x^{2019} на отрезке [0,1], где значения функции рассматриваются ровно в серединах интервалов $\left(0,\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$, $\left(\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right)$, ...

В пределе эта интегральная сумма сходится к интегралу $\int\limits_0^1 x^{2019}dx=\left.\dfrac{x^{2020}}{2020}\right|_0^1=\dfrac{1}{2020}$.

Ответ. $\dfrac{1}{2020}$.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
2-4 курс задача 3

Найти общее решение дифференциального уравнения: $6y' + 6xy'' + x^2 y''' = 2xy + x^2 y'$

Решение. Можно заметить, что правая часть - это производная от $x^2 y$:

$$(x^2 y)' = 2xy + x^2 y'$$

Исследуем следующие производные от $x^2 y$:

$(x^2 y)'' = (2xy + x^2 y')' = 2y + 2xy' + 2xy' + x^2 y'' = 2y + 4xy' + x^2 y''$. Тогда 3-я производная:

$(x^2 y)'''\ (2y + 4xy' + x^2 y'')' = 2y' + 4y' + 4xy'' + 2xy'' + x^2 y''' = 6y' + 6xy'' + x^2 y'''$, что как раз и равно левой части.

Итак, уравнение сводится к $(x^2 y)''' = (x^2 y)'$. Обозначим $f = x^2 y$.

Уравнение имеет вид $f''' - f' = 0$. Это линейное однородное уравнение.

Характеристическое: $r^3 - r = 0$. $r(r^2 - 1) = 0$, корни 0, 1, -1 .

Общее решение $f = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$, то есть $x^2 y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$, тогда

$y = \dfrac{1}{x^2}(C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x})$. **Ответ.** $y = \dfrac{1}{x^2}(C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x})$.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
2-4 курс задача 4

Найти сумму функционального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{1+4n}}{(1+4n)!}$.

Решение. Заметим, что $\frac{1+(-1)^n}{2} = 1$ при чётном n, и 0 при нечётном.

Запишем подробнее: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{1+4n}}{(1+4n)!} = \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...\right)+2\left(x+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^9}{9!}+...\right)$.

Заметим, что при вычислении 2-й производной, в первой скобке получится точно такая же сумма, как и была, а во 2-й вместо степеней 1,5,9,... будут другие нечётные степени, которых не было ранее, а именно 3,7,...

$$y''(x) = \left(0+1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}...\right)+2\left(0+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^7}{7!}+...\right).$$

Сумма исходной функции и её 2 производной содержит все степени, $\forall n \in N$:

$$y + y'' = 2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}...\right)+2\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}...\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 2e^x.$$

$y'' + y = 2e^x$ - линейное неоднородное дифференциальное уравнение.

Характкристическое уравнение $r^2+1=0$, корни $\pm i$,общее решение соответствующего однородного уравнения: $C_1 \cos x + C_2 \sin x$. По правой части $b(x) = 2e^x$ строим частное решение неоднородного уравнения. Число 1 не принадлежит множеству чисел $\pm i$, поэтому частное решение ищется в виде $y = Ae^x$. Тогда $y'' + y = Ae^x + Ae^x = 2e^x$, откуда $A = 1$.

Итак, общее решение неоднородного уравнения: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x$.

Найдём константы. По строению ряда видно, что $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x \quad \Rightarrow \quad y(0) = C_1 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + e^x \quad \Rightarrow \quad y'(0) = C_2 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$$

Частное решение: $y = \sin x + e^x$.

Ответ. $y = \sin x + e^x$.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
2-4 курс задача 5

Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{1}{z\bar{z}}dz$ по неограниченной кривой L в комплексной плоскости, где L - множество точек параболы $y = x^2$ правее точки $1+i$.

Решение. $\int\limits_L \frac{1}{z\bar{z}}dz = \int\limits_L \frac{1}{(x+iy)(x-iy)}(dx+idy) = \int\limits_L \frac{1}{x^2+y^2}(dx+idy) = \int\limits_L \frac{1}{x^2+y^2}dx + i\int\limits_L \frac{1}{x^2+y^2}dy$.

При этом $y = x^2$, $dy = 2xdx$, $x \in (1,+\infty)$.

$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+x^4} + i\int\limits_1^\infty \frac{2xdx}{x^2+x^4}$. Во втором подведём под знак дифференциала. При этом происходит замена $t = x^2$, и $t \in (1,+\infty)$

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x^2)} + i\int\limits_1^\infty \frac{d(x^2)}{x^2+x^4} = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x^2)} + i\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t+t^2} .$$

Далее оба интеграла решаются с помощью разложения рациональных дробей в сумму простейших.

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} = \frac{Ax(1+x^2)+B(1+x^2)+(Cx+D)x^2}{x^2(1+x^2)},$$

Сравнивая числители, получаем $Ax + Ax^3 + B + Bx^2 + Cx^3 + Dx^2 = 1$

$(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$, откуда получаем 4 равенства:

$A+C=0$, $B+D=0$, $A=0$, $B=1$

Тогда $A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=-1$.

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int\limits_1^\infty \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^\infty - arctgx\big|_1^\infty = 1 - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Во втором интеграле (мнимая часть):

$$\frac{1}{t+t^2} = \frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t)+Bt}{t(1+t)},\ (A+B)t + A = 0t+1 \Rightarrow A=1,\ B=-1.$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t+t^2} = \int\limits_1^\infty \frac{1}{t}dt - \int\limits_1^\infty \frac{1}{1+t}dt = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Bigg|_1^\infty = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = 0 + \ln 2 .$$

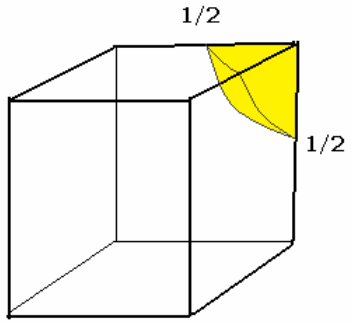
Ответ. $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \ln 2$.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
2-4 курс задача 6

Три точки случайным образом брошены на отрезок [0,1]. Найти вероятность того, что произведение их абсцисс больше, чем $\frac{1}{2}$.

Решение.

Отложим 3 случайных значения по 3 осям координат. Дано: $xyz > \frac{1}{2}$. Нужно найти отношение объёма тела, для точек которого выполняется $xyz > \frac{1}{2}$, к объёму единичного куба. Все искомые точки лежат выше поверхности $z = \frac{1}{2xy}$.



На верхней грани выполнено $z = \frac{1}{2xy} = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2x}$, это определяет границу проекции тела на горизонтальную плоскость, т.е. границы для двойного интеграла по x, y.

$$V = \int_{1/2}^{1} dx \int_{1/(2x)}^{1} \left(1 - \frac{1}{2xy}\right) dy = \int_{1/2}^{1} \left(y\Big|_{1/(2x)}^{1} - \frac{1}{2x}\ln y\Big|_{1/(2x)}^{1} \right) dx = \int_{1/2}^{1} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{0 - \ln\frac{1}{2x}}{2x} \right) dx = \int_{1/2}^{1} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{\ln 2x}{2x} \right) dx$$

$$= \int_{1/2}^{1} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{\ln 2}{2x} - \frac{\ln x}{2x} \right) dx = \int_{1/2}^{1} \left(1 - \frac{1+\ln 2}{2x} - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x} \right) dx = \int_{1/2}^{1} dx - \frac{1+\ln 2}{2}\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \ln x d(\ln x) =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1+\ln 2}{2}\ln x\Big|_{1/2}^{1} - \frac{1}{2}\frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1+\ln 2}{2}\left(0 - \ln\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{0 - \ln^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1+\ln 2}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} + \frac{\ln^2 2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln^2 2}{4} .$$

Ответ. $\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln^2 2}{4}$.