Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

Организация самостоятельной работы студентов по некоторым разделам математики

Методические указания

Томск 2012

Организация самостоятельной работы студентов по некоторым разделам математики: методические указания/ Сост. Г.Д.Садритдинова, Т.С. Куницына. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012.-146с

Рецензент доцент Т.А. Шалыгина

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Математика» для студентов всех специальностей.

Печатаются по решению методического семинара кафедры высшей математики, протокол № 5 от 6 февраля 2012 г.

Подписано в печать 10.02.2012.
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л.1,73. Тираж 1000. Заказ №

Изд-во ТГАСУ, 634003, г, Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская,15.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ равен…

1) 18
2) 22
3) 4
4) –14

Решение. Определитель второго порядка вычисляется по формуле: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Применим формулу: $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-4) \cdot 5 = 2 + 20 = 22$.

Ответ 2)

2. Определитель $\begin{vmatrix} 3 & -k \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ равен нулю при k равном…

1) 11
2) –4
3) –1
4) 1

Решение. Чтобы найти k, нужно сначала вычислить определитель второго порядка, затем получившееся выражение приравнять нулю и решить уравнение относительно k.

$\begin{vmatrix} 3 & -k \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-k) \cdot 6 = 6 + 6k$; $6 + 6k = 0$; $6k = -6$; $k = -1$.

Ответ 3)

3. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ -6 & 3 & -9 \end{vmatrix}$ равен …

1) –120
2) –3
3) 0
4) 8

Решение. Определитель третьего порядка вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 .$$

Вычислим:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ -6 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 2\cdot 7\cdot(-9) + (-1)\cdot 5\cdot(-6) + 3\cdot 4\cdot 3 -$$

$$-3\cdot 7\cdot(-6) - (-1)\cdot 4\cdot(-9) - 2\cdot 5\cdot 3 = -126 + 30 + 36 + 126 - 36 - 30 = 0.$$

Ответ 3)

4. Значение выражения $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^T$ равно …

1) $\begin{pmatrix} 1,5 & 3,5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 13,5 & 4,5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 4,5 & 9,5 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 4,5 & 13 \\ 9,5 & 4 \end{pmatrix}$

Решение. Буква T над матрицей означает, что мы меняем местами строки и столбцы в матрице, т. е. транспонируем. Чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число. Чтобы сложить две матрицы, нужно сложить элементы, стоящие на одинаковых местах.

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 3 & \frac{1}{2}\cdot 1 \\ \frac{1}{2}\cdot 2 & \frac{1}{2}\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1{,}5 & 9+0{,}5 \\ 12+1 & 2+2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4{,}5 & 9{,}5 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ 2)

5. Корень уравнения $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ равен …

1) –1,5
2) 1,5
3) 6
4) –6

Решение. Чтобы найти корень данного уравнения, нужно вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = x\cdot 2 - 3\cdot 4 = 2x - 12.$$

Поскольку определитель равен 0, то приравниваем нулю получившееся выражение и решаем уравнение: $2x-12=0;\ 2x=12;\ x=6.$

Ответ 3)

6. Если x_0 и y_0 являются решением системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x-2y=8, \\ x+4y=-2 \end{cases}$, то x_0+3y_0 равно …

1) –3
2) –1
3) 5
4) –6

Решение. Сначала нужно решить систему. Выразим из второго уравнения системы x и подставим его в первое уравнение:

$$\begin{cases} x = -4y - 2, \\ 3 \cdot (-4y - 2) - 2y = 8. \end{cases}$$

Решим отдельно второе уравнение. Раскроем скобки, перенесем неизвестные влево, известные – вправо, найдем y: $-12y - 6 - 2y = 8;\ -12y - 2y = 8 + 6;\ -14y = 14;\ y = -1.$

Чтобы найти x, подставим найденное значение y в выражение для x:

$$x = -4y - 2 = -4 \cdot (-1) - 2 = 4 - 2 = 2.$$

Тогда $x_0 + 3y_0 = 2 + 3 \cdot (-1) = 2 - 3 = -1$.

Ответ 2)

7. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Тогда матрица $C = A + 2B$ имеет вид…

1) $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 4 \\ 10 & -12 & -8 \\ 0 & 4 & -10 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ -6 & 10 & 9 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Решение. Чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число. Чтобы сложить две матрицы, нужно сложить элементы, стоящие на одинаковых местах.

Найдем

$$2B = 2\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 & 2\cdot(-3) & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot(-6) & 2\cdot(-4) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 2 & 2\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 4 \\ 10 & -12 & -8 \\ 0 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$C = A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -6 & 4 \\ 10 & -12 & -8 \\ 0 & 4 & -10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+8 & 2+(-6) & 0+4 \\ -2+10 & 3+(-12) & 5+(-8) \\ -3+0 & 4+4 & 7+(-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ 2)

8. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Если выполняется равенство $C = A - B$, то $x - y$ равно…

1) 0	3) 5
2) –1	4) 1

Решение. Найдем

$$A - B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-y & 3-0 \\ 0-4 & x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-y & 3 \\ -4 & x-2 \end{pmatrix}.$$

Так как $C = A - B$, то $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-y & 3 \\ -4 & x-2 \end{pmatrix}$.

Матрицы равны, если на одинаковых местах стоят равные числа: $2 = 4 - y;\ 1 = x - 2$. Тогда $y = 2;\ x = 3$. Отсюда $x - y = 3 - 2 = 1$.

Ответ 4)

9. Произведение матриц с размерностями $[2\times m]$ и $[2k\times 3]$ возможно при…

1) $m=2;\ k=3$
2) $m=3;\ k=1$
3) $m=2;\ k=1$
4) $m=1;\ k=2$

Решение. Размерность матрицы вида $[p\times n]$ означает, что в матрице p строк и n столбцов. Две матрицы можно перемножить только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

В нашем случае, произведение возможно, если $m=2k$.

Путем перебора ответов, получим:

$m=2;\ k=3;\ 2\neq 2\cdot 3;$

$m=3;\ k=1;\ 3\neq 2\cdot 1;$

$m=2;\ k=1;\ 2=2\cdot 1$ – верно;

$m=1;\ k=2;\ 1\neq 2\cdot 2.$

Ответ 3)

10. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 2 & -9\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}$. Тогда $A\cdot B^T$ равно…

1) $\begin{pmatrix}-9\\ -11\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}-9\\ 11\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}6\\ -34\end{pmatrix}$

4) не существует, т.к. матрицы в данном порядке умножать нельзя

Решение. B^T означает, что в матрице B мы поменяем местами строки и столбцы: $B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Получившаяся матрица будет размерности 2×1. Матрица A размерности 2×2. Проверяем, можно ли их перемножить. Число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B^T, следовательно, произведение $A \cdot B^T$ существует. Найдем его:

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + (-9) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -34 \end{pmatrix}.$$

Ответ 3)

11. Если выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$ то значение x равно…

1) 3

2) 1

3) –3

4) –1

Решение. Найдем произведение матриц, стоящих в левой части:

$$(-1 \quad 2 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & x \end{pmatrix} =$$

$$(-1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \quad -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \quad -1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot x) =$$
$$= (-3 \quad -1 \quad -x).$$

Так как это произведение равно $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, то $\begin{pmatrix} -3 & -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, следовательно, $x = 1$.

Ответ 2)

12. Матрица, обратная матрице $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, найденная с помощью элементарных преобразований, имеет вид…

1) $\begin{pmatrix}1 & -0,5\\ -1,5 & 1\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0,5 & 1\\ -0,5 & -1\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}0,5 & -1\\ -1 & 0,5\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1,5 & -2\\ -0,5 & 1\end{pmatrix}$

Решение. Чтобы матрица A^{-1} была обратной для матрицы A, нужно, чтобы выполнялось условие $A\cdot A^{-1}=E$, где $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Проверим это условие для каждой матрицы из ответов, пока не получим единичную матрицу E.

$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -0,5\\ -1,5 & 1\end{pmatrix}$.

Тогда

$$A\cdot A_1^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -0,5\\ -1,5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+4\cdot(-1,5) & 2\cdot(-0,5)+4\cdot 1\\ 1\cdot 1+3\cdot(-1,5) & 1\cdot(-0,5)+3\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -3,5 & 2,5\end{pmatrix}.$$

Не подходит.

$A_2^{-1}=\begin{pmatrix}0,5 & 1\\ -0,5 & -1\end{pmatrix}$.

Тогда

$$A\cdot A_2^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,5 & 1\\ -0,5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 0,5+4\cdot(-0,5) & 2\cdot 1+4\cdot(-1)\\ 1\cdot 0,5+3\cdot(-0,5) & 1\cdot 1+3\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$ Не подходит.

$$A_3^{-1}=\begin{pmatrix} 0,5 & -1 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A\cdot A_3^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,5 & -1 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 0,5+4\cdot(-1) & 2\cdot(-1)+4\cdot 0,5 \\ 1\cdot 0,5+3\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+3\cdot 0,5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Не подходит.

$$A_4^{-1}=\begin{pmatrix} 1,5 & -2 \\ -0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A\cdot A_4^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1,5 & -2 \\ -0,5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1,5+4\cdot(-0,5) & 2\cdot(-2)+4\cdot 1 \\ 1\cdot 1,5+3\cdot(-0,5) & 1\cdot(-2)+3\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Подходит.

Ответ 4)

13. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда обратная матрица A^{-1} равна…

1) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 4) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Решение. Чтобы матрица A^{-1} была обратной для матрицы A, нужно, чтобы выполнялось условие $A\cdot A^{-1}=E$, где $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Проверим это условие для каждой матрицы из ответов, пока не получим единичную матрицу E.

$A_1^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, тогда

$$A\cdot A_1^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 0+0\cdot 0 & 1\cdot(-2)+2\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot(-2)+0\cdot(-1) \\ 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+2\cdot 0 & 0\cdot(-2)+(-1)\cdot 1+2\cdot 0 & 0\cdot 0+(-1)\cdot(-2)+2\cdot(-1) \\ 0\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot(-2)+0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot(-2)+1\cdot(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\neq E.$$

$A_2^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, тогда

$$A\cdot A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & -4\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot 0+0\cdot 0 & 1\cdot 2+2\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot(-4)+2\cdot(-2)+0\cdot(-1)\\ 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+2\cdot 0 & 0\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot 0 & 0\cdot(-4)+(-1)\cdot(-2)+2\cdot(-1)\\ 0\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 2+0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot(-4)+0\cdot(-2)+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -8\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\neq E.$$

$$A_3^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$A\cdot A_3^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot(-2)+0\cdot 4 & 1\cdot 0+2\cdot(-1)+0\cdot 2 & 1\cdot 0+2\cdot 0+0\cdot 1\\ 0\cdot 1+(-1)\cdot(-2)+2\cdot 4 & 0\cdot 0+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 2 & 0\cdot 0+(-1)\cdot 0+2\cdot 1\\ 0\cdot 1+0\cdot(-2)+1\cdot 4 & 0\cdot 0+0\cdot(-1)+1\cdot 2 & 0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 0\\ 8 & 5 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}\neq E.$$

$$A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$A \cdot A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 0 & 1\cdot(-4) + 2\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 0 & 0\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 0 & 0\cdot(-4) + (-1)\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 & 0\cdot(-4) + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ответ 4)

14. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 & 2 \\ 5 & -\lambda & 15 & -5 \end{pmatrix}$ равен единице при λ, равном …

1) $\frac{1}{10}$

2) 10

3) -10

4) $-\frac{1}{10}$

Решение. Ранг матрицы равен числу линейно независимых строк. В данном случае, ранг будет равен единице, если строки матрицы пропорциональны, т.е. $\frac{-2}{5} = \frac{4}{-\lambda} = \frac{-6}{15} = \frac{2}{-5}$. Таким образом, должно выполниться условие: $\frac{-2}{5}=\frac{4}{-\lambda}$, откуда получаем, что $(-2)\cdot(-\lambda)=4\cdot 5$; $2\lambda=20$; $\lambda=10$.

Ответ 2)

15. Ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\\ \lambda & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$ равен двум при λ равном…

1) 7
2) –5
3) –7,4
4) –7

Решение. Для того, чтобы ранг квадратной матрицы третьего порядка был равен 2, необходимо, чтобы существовал минор второго порядка, отличный от нуля, и определитель самой матрицы был равен 0. В данной матрице есть минор второго порядка отличный от нуля:

$M_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-3\cdot 3=-1-9=-10\neq 0$. Вычислим определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3.$$

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 3\\ \lambda & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=-3\cdot 3\cdot 2+1\cdot(-1)\cdot 2+3\cdot\lambda\cdot(-1)-3\cdot 3\cdot 2-1\cdot\lambda\cdot 2-$$

$$-(-3)\cdot(-1)\cdot(-1)=-18-2-3\lambda-18-2\lambda+3=-35-5\lambda.$$

Приравняем его к нулю и найдем λ.

$-35-5\lambda=0;\ -5\lambda=35;\ \lambda=-7.$

Ответ 4)

16. Если миноры матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, составленные из элементов, расположенных в левом верхнем углу последовательно равны $M_1=1$, $M_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-7$, $M_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=1$, то ее ранг равен …

1) –5
2) 1
3) 3
4) 9

Решение. Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы. В нашем случае, поскольку есть минор третьего порядка, отличный от нуля, а более высокого порядка нет (так как размерность матрицы 3×4, то минора 4 порядка нет), то ранг будет равен 3.

Ответ 3)

17. Ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ равен…

1) 0
2) 3
3) 4
4) 2

Решение. Если матрица имеет ступенчатый вид (т.е. в первом столбце все элементы, кроме первого равны 0, во втором столбце, все элементы, кроме первого и второго, равны нулю и т.д.), то ранг матрицы равен числу ненулевых элементов, стоящих на диагонали над нулями. Т. е. в нашем случае, ранг равен 3.

Ответ 2)

18. Если система линейных уравнений $\begin{cases} \lambda \cdot x + 2y = 3, \\ 2x - y = \mu, \end{cases}$ где λ, μ – некоторые числа, имеет бесконечное множество решений, то $\lambda \cdot \mu$ равно…

1) –6
2) –2
3) 6
4) 2

Решение. Чтобы данная система имела множество решений, нужно, чтобы ранг основной матрицы системы был равен рангу расширенной и равны единице. Основная матрица системы – это матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных. Расширенная матрица системы получается добавлением столбца свободных членов к основной матрице. Запишем их: основная матрица $A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; расширенная матрица $A_p = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 2 & -1 & \mu \end{pmatrix}$. Чтобы ранги были равны 1, достаточно, чтобы в матрице A_p строки были пропорциональны, т.е. должно выполняться условие: $\frac{\lambda}{2} = \frac{2}{-1} = \frac{3}{\mu}$. Отсюда получаем: $\frac{\lambda}{2} = \frac{2}{-1}$; $\lambda \cdot (-1) = 2 \cdot 2$; $-\lambda = 4$; $\lambda = -4$. Для μ аналогично получаем: $\frac{2}{-1} = \frac{3}{\mu}$; $2 \cdot \mu = 3 \cdot (-1)$; $2\mu = -3$; $\mu = -\frac{3}{2}$. Тогда $\lambda \cdot \mu = -4 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) = 6$.

Ответ 3)

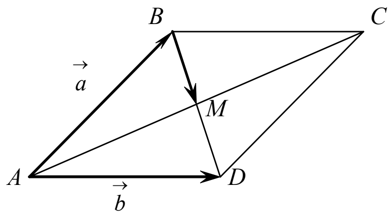
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1. Точки A,B,C,D последовательные вершины параллелограмма. Точка M – точка пересечения его диагоналей. Если $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$, то $\vec{BM}$ равен …

1) $\vec{b}-\vec{a}$; 3) $\frac{\vec{a}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}$;

2) $\frac{\vec{b}}{2}+\frac{\vec{a}}{2}$; 4) $\frac{\vec{b}}{2}-\frac{\vec{a}}{2}$.

Решение:



1) Изобразим схематично чертеж
2) По свойствам параллелограмма $\vec{BM}=\frac{1}{2}\vec{BD}$, а по правилу разности двух векторов $\vec{BD}=\vec{AD}-\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ (вектор разности соединяет концы исходных векторов при этом конец вектора разности, т.е. стрелка, совпадает с концом вектора **<u>из</u>** которого вычитаем).
3) $\vec{BM}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{\vec{b}}{2}-\frac{\vec{a}}{2}$.

Ответ 4)

2. Даны векторы $\vec{a}=(1;2;-1)$ и $\vec{b}=(2;0;4)$. Тогда их линейная комбинация $2\cdot\vec{a}-\vec{b}$ равна…

1) (0; 4; 2); 3) (4; 4; 2);
2) (0; 2; -4); 4) (0; 4; -6).

Решение:

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими координатами

$\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$; $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$; $\vec{c} = (x_c; y_c; z_c)$;

1) По свойствам координат векторов

$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot x_a;\ \alpha \cdot y_a;\ \alpha \cdot z_a)$, α - *число*

$2 \cdot \vec{a} = (2 \cdot 1;\ 2 \cdot 2;\ 2 \cdot (-1)) = (2;4;-2)$;

2) По свойствам координат векторов

$$\vec{c} - \vec{b} = (x_c - x_b; y_c - y_b; z_c - z_b) \quad \Rightarrow$$

$2 \cdot \vec{a} - \vec{b} = (2;4;-2) - (2;0;4) =$

$= (2-2;\ 4-0;\ -2-4) = (0;4;-6)$.

Ответ 4)

3. Даны точки $A(1;0;-1)$ и $B(3;-1;0)$. Тогда длина вектора $\vec{AB}$ равна…

1) $\sqrt{18}$; 3) 6;
2) $\sqrt{6}$; 4) 2.

Решение:

1) Если $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A) =$$
$$= (3-1;\ -1-0;\ 0-(-1)) = (2;\ -1;\ 1);$$

2) Если $\vec{AB} = (x_{AB}; y_{AB}; z_{AB}) \Rightarrow$ длина вектора $\vec{AB}$, т.е.

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + z_{AB}^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Ответ 2)

4. На векторах $\vec{AB} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{AC} = -\vec{k} - 3\vec{j}$ как на сторонах построен треугольник. Тогда длина стороны CB равна…

1) 6; 3) $3\sqrt{2}$;

2) $\sqrt{6}$; 4) $2\sqrt{5}$.

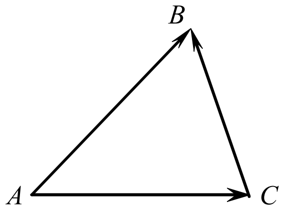
Решение:

1) В условии задачи векторы заданы разложением по ортонормированному базису и при этом содержат 3 координаты (присутствуют три базисные вектора - $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). Выпишем координаты заданных векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ $\Rightarrow$

$$\vec{AB} = \vec{i} + \vec{j} = 1 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = (1;1;0);$$

$$\vec{AC} = -\vec{k} - 3\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + (-3) \cdot \vec{j} + (-1) \cdot \vec{k} =$$
$$= (0; -3; -1);$$

2) Изобразим схематично чертеж:



$\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC}$ согласно правилу разности (вектор разности соединяет концы исходных векторов, при этом конец разности, т.е. стрелка, совпадает с концом вектора, <u>**из**</u> которого вычитаем), тогда

$$\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC} = (1; 1; 0) - (0; -3; -1) =$$
$$= (1 - 0; 1 - (-3); 0 - (-1)) = (1; 4; 1).$$

3) Длина стороны CB равна модулю вектора $\vec{CB}$, т.е. $\left|\vec{CB}\right|$.

Если вектор $\vec{CB}$ имеет координаты $(x_{CB}; y_{CB}; z_{CB}) \Rightarrow$

$$\left|\vec{CB}\right| = \sqrt{x_{CB}^2 + y_{CB}^2 + z_{CB}^2} \quad = \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} =$$

$$= \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Ответ 3)

5. Даны вектор $\vec{a} = (3; -1; 0)$ и $\vec{b} = (4; 3; 1)$. Тогда проекция вектора $\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$ на ось Ox равна…

1) 5; 3) 3;
2) -3; 4) 4.

Решение:

Проекция вектора на ось координат это соответствующая координата данного вектора, т.е.

$$np_{Ox}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = x_{b-a} = x_b - x_a = 4 - 1 = 3.$$

Ответ 3)

6. Даны векторы $\vec{a} = (3; -1; 0), \vec{b} = (2; 1; -1), \vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$. Тогда скалярное произведение $\vec{c} \cdot \vec{a}$ равно…

1) 20; 3) 8;
2) 17; 4) 12.

Решение:

1) Скалярное произведение обозначается

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \text{ или } \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

2) Если $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$ и

$$\vec{b}=(x_b;y_b;z_b) \quad \Rightarrow$$

$$\alpha\vec{b}=(\alpha\cdot x_b;\alpha\cdot y_b;\alpha\cdot z_b),\ \textit{где}\ \alpha-\textit{число};$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_a+x_b;y_a+y_b;z_a+z_b);$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b \quad \Rightarrow$$

3) $2\cdot\vec{b}=(2\cdot2;2\cdot1;2\cdot(-1))=(4;2;-2)$.

4) $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}=(3+4;-1+2;0+(-2))=(7;1;-2)$;

5) $\vec{c}\cdot\vec{a}=x_c\cdot x_a+y_c\cdot y_a+z_c\cdot z_a=$
$=3\cdot7+(-1)\cdot1+0\cdot(-2)=$
$=21-1=20.$

Ответ 1)

7. Косинус угла между векторами $\vec{a}=4\vec{i}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{k}$ равен…

1) $\frac{3}{5}$; 3) $\frac{2}{3}$;

2) $\frac{13}{15}$; 4) $\frac{3}{7}$.

Решение:

1) В условии задачи векторы заданы разложением по ортонормированному базису и при этом содержат 3 координаты (присутствуют базисные вектора - $\vec{i}$, $\vec{k}$, а следовательно подразумевается наличие вектора $\vec{j}$). Выпишем координаты заданных векторов

$$\vec{a} = \vec{i} + 3\cdot\vec{k} = 4\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 3\cdot\vec{k} = (4;0;3);$$

$$\vec{b} = 3\vec{k} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 3\cdot\vec{k} = (0;0;3);$$

2) $\cos\varphi = \dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$, где угол φ это угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3) Если $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$ $\Rightarrow$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b + z_a\cdot z_b =$$

$$= 4\cdot 0 + 0\cdot 0 + 3\cdot 3 = 9;$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_a{}^2 + y_a{}^2 + z_a{}^2\cdot} = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{x_b{}^2 + y_b{}^2 + z_b{}^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3;$$

4) $\cos\varphi = \dfrac{9}{5\cdot 3} = \dfrac{3}{5}$.

Ответ 1)

8. Длина вектора $\vec{a} = (1; y; 2)$ равна 3. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось Oy положительна. Тогда координата y равна…

1) 2; 3) 6;
2) -2; 4) 0.

Решение:

1) Если $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$ $\Rightarrow$ длина вектора, т.е.

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_a^{\ 2} + y_a^{\ 2} + z_a^{\ 2}} \cdot = \sqrt{1^2 + y^2 + 2^2} = \sqrt{1 + y^2 + 4} = \sqrt{5 + y^2};$$

2) По условию задачи

$$\left|\vec{a}\right| = 3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{5 + y^2} = 3.$$

3) Для решения полученного уравнения, возведем обе части равенства в квадрат $\Rightarrow$ $5 + y^2 = 9$;

$$y^2 = 9 - 5 = 4.$$

4) По условию задачи проекция вектора $\vec{a}$ на ось Oy положительна

$$\Rightarrow \quad y = +\sqrt{4} = +2 = 2.$$

Ответ 1)

9. Даны вектор $\vec{a} = (3; -1; 0)$ и $\vec{b} = (4; 3; 1)$. Тогда проекция вектора $\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$ на ось Ox равна…

1) -3; 3) 5;
2) 4; 4) 3.

Решение:

Проекция вектора на ось координат это соответствующая координата данного вектора, т.е.

$$np_{Ox}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = x_{b-a} = x_b - x_a = 4 - 1 = 3.$$

Ответ 4)

10. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Их длины: $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 1$. Тогда скалярный квадрат $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2$ равен …

1) 7; 3) 5;
2) 0; 4) 9.

Решение:

1) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}\right)$.

Перемножаем векторные выражения по аналогии с алгебраическими выражениями, учитывая свойства конкретного (в данном случае скалярного) произведения.

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}\right) = \left(\vec{a}, \vec{a}\right) + \left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\vec{b}, \vec{a}\right) + \left(\vec{b}, \vec{b}\right)$$

2) Так как для скалярного произведения

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}\right) \Rightarrow \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}\right) =$$

$$= \left(\vec{a}, \vec{a}\right) + 2\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\vec{b}, \vec{b}\right).$$

3) Так как $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$ и $\left(\vec{a}, \vec{a}\right) = \vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2 \Rightarrow$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + 2 \cdot 0 + \left|\vec{b}\right|^2 =$$

$$= 2^2 + 0 + 1^2 = 4 + 1 = 5.$$

Ответ 3)

11. На векторах $\left(2\vec{m}+3\vec{n}\right)$ и $\left(\vec{m}-\vec{n}\right)$, как на сторонах построен параллелограмм. Тогда площадь S параллелограмма равна…

1) $S=5\left|\vec{n}\times\vec{m}\right|$;
2) $S=5\vec{n}\times\vec{m}$;
3) $S=5\left|2\vec{m}^{\,2}+5\vec{n}\times\vec{m}-3\vec{n}^{\,2}\right|$;
4) $S=\left|\vec{n}\times\vec{m}\right|$.

Решение:

1) Площадь параллелограмма, построенного на 2-х заданных векторах, равна модулю векторного произведения заданных векторов. Для векторного произведения приняты обозначения $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ или $\vec{a}\times\vec{b}$ $\Rightarrow$ $S=\left|\left(2\vec{m}+3\vec{n}\right)\times\left(\vec{m}-\vec{n}\right)\right|$.
2) Согласно свойствам векторного произведения

$$\vec{a}\times\vec{a}=0,$$
$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a},$$
$$\left(\alpha\vec{a}\right)\times\left(\beta\vec{b}\right)=(\alpha\cdot\beta)\vec{a}\times\vec{b}.$$

3) Используя данные свойства векторного произведения, найдем

$$\left(2\vec{m}+3\vec{n}\right)\times\left(\vec{m}-\vec{n}\right)=2\vec{m}\times\vec{m}+2\vec{m}\times(-\vec{n})+$$
$$+3\vec{n}\times\vec{m}+3\vec{n}\times(-\vec{n})=0-2\vec{m}\times\vec{n}+3\vec{n}\times\vec{m}+0=$$
$$=2\vec{n}\times\vec{m}+3\vec{n}\times\vec{m}=5\vec{n}\times\vec{m}.$$

4) $S=\left|\left(2\vec{m}+3\vec{n}\right)\times\left(\vec{m}-\vec{n}\right)\right|= \;=\left|5\vec{n}\times\vec{m}\right|=5\left|\vec{n}\times\vec{m}\right|.$

Ответ 1)

12. После преобразования, векторное произведение

$$\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$$ имеет вид …

1) $-\vec{b}\times\vec{a}$; 3) $\vec{a}^{\,2}+3\vec{a}\times\vec{b}-2\vec{b}^{\,2}$;

2) $3\vec{a}\times\vec{b}$; 4) $-\vec{a}\times\vec{b}$.

Решение:

1) Для векторного произведения приняты обозначения $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ или $\vec{a}\times\vec{b}$

2) Согласно свойствам векторного произведения

$$\vec{a}\times\vec{a}=0, \qquad \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

3) Используя данные свойства, выполним преобразование векторного произведения

$$\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-2\vec{b}\times\vec{a}-2\vec{b}\times\vec{b}=$$

$$=0+\vec{a}\times\vec{b}-2\vec{b}\times\vec{a}+0=\vec{a}\times\vec{b}+2\vec{a}\times\vec{b}=3\vec{a}\times\vec{b}.$$

Ответ 2)

13. Даны орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, тогда выражение

$2\vec{i}\times\vec{i}-3\vec{j}\times\vec{k}+\vec{k}\times\vec{j}$ можно преобразовать к виду …

1) $2-4\vec{i}$; 3) $-4\vec{i}$;

2) $2\vec{i}$; 4) $-2\vec{i}$.

Решение:

1) Орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ являются базисными векторами ортонормированного базиса $\Rightarrow$ для них выполняются следующие соотношения

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}\,; \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}\,; \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}\,;$$

2) Векторное произведение обладает свойствами:

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0\,; \qquad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}\,; \qquad \alpha\,\vec{a} \times \vec{b} = \alpha\left(\vec{a} \times \vec{b}\right);$$

3) Таким образом

$$2\,\vec{i} \times \vec{i} - 3\,\vec{j} \times \vec{k} + \vec{k} \times \vec{j} = 0 - 3\,\vec{i} - \vec{j} \times \vec{k} = -3\,\vec{i} - \vec{i} = -4\,\vec{i}\,.$$

Ответ 3)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Точка B симметрична точке $A(3;-2)$ относительно оси абсцисс. Тогда расстояние между точками A и B равно …

1) 6   3) $\sqrt{52}$

2) 4   4) $\sqrt{26}$

Решение. Точка $B\left(x_A;-y_A\right)$ симметрична точке $A\left(x_A;y_A\right)$ относительно оси OX. То есть точка B имеет координаты (3;2). Расстояние AB между точками A и B можно рассматривать как длину вектора $\overrightarrow{AB}$ (из координат конца вычитаем координаты начала вектора).

$$\overrightarrow{AB} = \left\{ \left(x_A - x_A \right); \left(-y_B - y_B \right) \right\} = \left\{ 0; -2y_B \right\} = \left\{ 0; 4 \right\}.$$

$$AB = \left| \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4.$$

Ответ 2)

2. Точки $A(-2;\ -1)$ и $B(-4;\ 3)$ симметричны относительно точки $C(x;\ y)$. Тогда точка $C(x;\ y)$ имеет координаты …

1) $(-1;\ 2)$
2) $(1;\ -2)$
3) $(-6;\ 2)$
4) $(-3;\ 1)$

Решение. Точка C является серединой отрезка AB и ее координаты находятся как среднее арифметическое координат концов отрезка

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2-4}{2} = -3; \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1;$$

Точка С имеет координаты (-3; 1).

Ответ 4)

3. Даны точки $A(2;\ -2)$, $B(2;\ -1)$, $C(-1;\ -1)$ и $D(-3;\ 3)$. Тогда линии, заданной уравнением $x - y = 0$, принадлежит точка…

1) $A(2;\ -2)$
2) $C(-1;\ -1)$
3) $B(2;\ -1)$
4) $D(-3;\ 3)$

Решение. Координаты точки, принадлежащей линии, обращают уравнение линии в тождество. Подставим координаты каждой точки в уравнение линии:

$A(2;-2):\ 2-\left(-2\right)=4\neq 0 \Rightarrow \textit{точка}\ \ A\ \notin \textit{линии}\ x-y=0;$

$B(2;-1):\ 2-\left(-1\right)=3\neq 0 \Rightarrow \textit{точка}\ \ B\ \notin \textit{линии}\ x-y=0;$

$C(-1;-1):\ -1-\left(-1\right)=0 \Rightarrow \textit{точка}\ \ C\ \in \textit{линии}\ x-y=0;$

$D(-3;3):\ -3-3=-6\neq 0 \Rightarrow \textit{точка}\ \ D\ \notin \textit{линии}\ x-y=0;$

Ответ 2)

4. Общее уравнение прямой, проходящей через точки и $A(-2;\,3)$ и $B(3;\,-3)$ имеет вид…

1) $-5x+6y=0$ 3) $6x+5y-27=0$

2) $6x+5y-3=0$ 4) $-5x-y-7=4$

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Таким образом получим уравнение

$$\frac{x+2}{5}=\frac{y-3}{-6}\Rightarrow\ \ -6x-12=5y-15\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ общее уравнение прямой $6x+5y-3=0$.

Ответ 2)

5. Общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\,-1)$ параллельно прямой $2x-3y-6=0$, имеет вид

1) $2x-3y+7=0$ 3) $3x-2y-8=0$

2) $2x+3y-1=0$ 4) $2x-3y-7=0$

Решение.

1. Убедимся в том, что точка A не лежит на прямой. Для этого подставим координаты точки A в уравнение прямой: $2\cdot 2-3\cdot(-1)-6=1\neq 0$. Поскольку равенство не выполняется, то точка A лежит вне прямой.

2. Из уравнения прямой $2x-3y-6=0$ находим ее нормальный вектор $\overline{\mathrm{n}}$={2,-3}. Он будет и нормальным вектором прямой, проходящей через точку *A*, поскольку они параллельны.
3. Пусть $M(x,\ y)$ - произвольная точка прямой. Векторы $\overline{\mathrm{n}}$={2,-3} и $\overrightarrow{AM}$ = {x-2, y+1} ортогональны, следовательно, их скалярное произведение равно нулю ($\overline{\mathrm{n}}, \overrightarrow{AM}$)=0. Записав скалярное произведение в координатной форме, получим уравнение прямой.

$$2(x-2)-3(y+1)=0 \quad \text{или} \quad 2x-3y-7=0$$

Ответ 4)

6. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;-1)$, перпендикулярной прямой $l_1: 2x-y+3=0$ имеет вид ….

1) $-4x-y+3=0$
2) $x+2y+6=0$
3) $2x-y+7=0$
4) $x+2y-2=0$

Решение.
1. Убедимся в том, что точка *A* не лежит на прямой. Для этого подставим координаты точки *A* в уравнение прямой: $2\cdot(-4)-1\cdot(-1)+3=-4\neq 0$. Поскольку равенство не выполняется, то точка *A* лежит вне прямой.
2. Из уравнения прямой находим ее нормальный вектор $\overline{n}=\{2,-1\}$. Он будет и направляющим вектором перпендикулярной прямой $\overline{s}$={2,-1}, проходящей через точку *A*.
3. Пусть $M(x,\ y)$ произвольная точка прямой. Векторы $\overline{s}$={2,-1} и $\overrightarrow{AM}$ = {x + 4, y + 1} коллинеарны, следовательно, их координаты пропорциональны.

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y+1}{-1}\Rightarrow -x-4=2y+2$$

Следовательно, общее уравнение прямой $x+2y+6=0$.

Ответ 2)

7. Угловой коэффициент прямой линии, заданной уравнением $2x+4y-5=0$, равен …

1) $-\dfrac{1}{2}$

2) $\dfrac{1}{2}$

3) $\dfrac{5}{4}$

4) -2

Решение. Уравнение заданной прямой запишем в виде

$$y=\frac{-2x+5}{4} \quad \text{или} \quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}.$$

Угловой коэффициент заданной прямой равен k =-1/2.

Ответ 1)

8. Острый угол между прямыми $l_1: 2x-y+4=0$ и $l_2: -3x-y+3=0$ равен…

1) $\dfrac{3\pi}{4}$

2) $\dfrac{\pi}{4}$

3) $-\dfrac{\pi}{4}$

4) $-\dfrac{2\pi}{3}$

Решение.

1. Из уравнений прямых находим их нормальные векторы: $\overline{n_1}$={2,-1} для прямой l_1. и $\overline{n_2}$={-3,-1} для прямой l_2.

2. Угол α между прямыми определяется углом между их нормальными векторами:

$$\cos\alpha=\cos\left(l_1 \hat{\ } l_2\right)=\cos\left(n_1 \hat{\ } n_2\right)=\frac{(\overline{n}_1,\overline{n}_2)}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}=\frac{2(-3)+(-1)(-1)}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{9+1}}=$$

$$=\frac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=arctg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{4}\pi$$

Ответ 1)

9. Точка $M\left(\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$ задана в полярной системе координат $(r \geq 0; -\pi < \varphi \leq \pi)$. Тогда ее прямоугольные координаты $(x; y)$ при условии, что начало координат прямоугольной системы совпадает с полюсом полярной системы, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью и обе системы координат правые, равны …

1) $(1; -1)$
2) $(-1; 1)$
3) $(1; 1)$
4) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

Решение. Воспользуемся формулами перехода от полярной к прямоугольной (совмещенной, согласно условию задачи) системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\left(3\pi/4\right) = \sqrt{2}\left(-\sqrt{2}/2\right) = -1 \\ y = \sqrt{2}\sin\left(3\pi/4\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}/2\right) = 1 \end{cases}$$

Следовательно, в прямоугольной системе координат точка M имеет координаты (-1; 1).

Ответ 2)

10. Точка $M(2; 2\sqrt{3})$ задана в прямоугольной системе координат. Тогда ее полярные координаты $(r;\varphi)$ $(r \geq 0; -\pi < \varphi \leq \pi)$ при условии, что полюс совпадает с началом координат прямоугольной системы, а полярная ось – с положительной полуосью абсцисс и обе системы координат правые, равны …

1) $r = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$
2) $r = \sqrt{10}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$
3) $r = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$
4) $r = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = 4$

Решение. Воспользуемся формулами перехода от прямоугольной к полярной (совмещенной, согласно условию задачи) системе координат:

$$\begin{cases} \mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = 4 \\ tg\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 4 \\ \varphi = arctg\sqrt{3} = \pi / 3 \end{cases}$$

Следовательно, в полярной системе координат точка *M* имеет координаты (4; π/3).

Ответ 1)

11. Координаты точки, симметричной точке $A\left(3; -\dfrac{3}{4}\pi\right)$ (заданной в полярной системе координат), относительно полярного полюса, равны...

1) $B\left(3; \dfrac{3\pi}{4}\right)$

2) $B\left(-3; \dfrac{3\pi}{4}\right)$

3) $B\left(\dfrac{\pi}{4}; 3\right)$

4) $B\left(3; \dfrac{\pi}{4}\right)$

Решение. Координаты точки *B*, симметричной точке *A(r; φ)* (заданной в полярной системе координат) относительно полярного полюса равны (*r; π+φ*), то есть (3; π/4).

Ответ 4)

12. В полярных координатах уравнение прямой, проходящей через полюс под углом $\dfrac{\pi}{4}$ к полярной оси, имеет вид …

1) $\mathrm{tg}\varphi = 1$

2) $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Запишем уравнение прямой, проходящей через полюс под углом π/4 к полярной оси, в прямоугольной системе координат начало которой совпадает с полюсом полярной системы, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью. Каждая точка прямой имеет координаты $y = x$ (это и есть уравнение прямой). Перейдем к полярным координатам по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Получим уравнение прямой в полярной системе координат: $r\sin\varphi = r\cos\varphi \Rightarrow tg\varphi = 1$

Ответ 1)

13. Даны точки $A(4; -2; 7)$, $B(2; -1; 12)$, $C(2; -1; -5)$ и $D(6; -3; -2)$. Тогда прямой $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-5}{7}$ принадлежит точка…

1) A
2) B
3) C
4) D

Решение. Координаты точки, принадлежащей линии, обращают уравнение линии в тождество. Подставим координаты каждой точки в уравнение линии:

$A(4;-2;7)$: $\dfrac{6}{4}=\dfrac{-3}{-2}\neq\dfrac{2}{7}\Rightarrow$ *точка* $A\notin$ *прямой*;

$B(2;-1;12)$: $\dfrac{4}{4}=\dfrac{-2}{-2}=\dfrac{7}{7}\Rightarrow$ *точка* $B\in$ *прямой*;

$C(2;-1;-5)$: $\dfrac{4}{4}=\dfrac{-2}{-2}\neq-\dfrac{10}{7}\Rightarrow$ *точка* $C\notin$ *прямой*;

$D(6;-3;-2)$: $\dfrac{8}{4}=\dfrac{-4}{-2}\neq-\dfrac{7}{7}\Rightarrow$ *точка* $D\notin$ *прямой*;

Ответ 2)

14. Канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точки $A(-1;\,2;\,-3)$ и $B(2;\,-1;\,2)$, могут иметь вид …

1) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{5}$

3) $3x-3y+5z+24=0$

2) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-3}{5}$

4) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$

Решение. Канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ имеет вид.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Следовательно уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;2;-3)$ и $B(2;-1;2)$ имеет вид $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{5}$

Ответ 1)

15. Острый угол между прямыми линиями, заданными уравнениями

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}, \text{ равен } \ldots$$

1) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{3}$

2) $\frac{\pi}{2}$ 4) $\frac{\pi}{4}$

Решение.

1.Определим направляющие векторы каждой прямой:

$$l_1: \frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \; \vec{s_1}=\left\{1;-1;\sqrt{2}\right\}$$

$$l_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}, \; \vec{s_1}=\left\{1;1;\sqrt{2}\right\}$$

2. Угол между прямыми α определяется углом между их направляющими векторами:

$$\cos\alpha=\cos\left(l_1 \,\hat{}\, l_2\right)=\frac{\left(\vec{s_1},\vec{s_2}\right)}{\left|\vec{s_1}\right|\cdot\left|\vec{s_2}\right|}=\frac{1\cdot1+(-1)\cdot1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Следовательно $\alpha = \arccos(1/2) = \pi/3$.

Ответ 3)

16. Уравнение плоскости проходящей через ось Oz и точку $M(-2;3;-5)$ имеет вид:

1) $z+5=0$ 3) $x+y+z+4=0$

2) $3x-2y=0$ 4) $3x+2y=0$

Решение. Плоскость $Ax+By=0$ проходит через ось OZ. Подставим в это уравнение плоскости координаты точки $M\left(-2;3;-5\right)$ и найдем уравнение связи между коэффициентами A и B.

$$-2A+3B=0 \Rightarrow B=\frac{2}{3}A.$$

Следовательно уравнение плоскости, проходящей через ось OZ и точку $M(-2;3;-5)$ имеет вид

$$Ax+\frac{2}{3}Ay=0 \Rightarrow 3x+2y=0$$

Ответ 4)

17. Прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{-4}$ и плоскость $2x-ky+z+3=0$ параллельны при k равном…

1) 8/3
2) 0
3) −1
4) −3/2

Решение.

1. Определим направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{-4} \Rightarrow \vec{s}=\{2;-3;-4\}$$

$$2x-ky+z+3=0 \Rightarrow \vec{n}=\{2;-k;1\}$$

2. Для того, чтобы прямая была параллельна плоскости нужно, чтобы направляющий вектор прямой $\vec{s}$ был перпендикулярен нормальному вектору плоскости $\vec{n}$:

$$\left(\vec{s},\vec{n}\right)=0 \Rightarrow 2\cdot 2+(-3)\cdot(-k)+(-4)\cdot 1=0 \Rightarrow 4+3k-4=0:$$

$$\Rightarrow k=0.$$

Ответ 2)

18. Синус угла между прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$ и плоскостью $x-2y-3z+9=0$ равен….

1) $\dfrac{1}{196}$

2) $\dfrac{1}{14}$

3) $\dfrac{4}{\sqrt{70}}$

4) $-\dfrac{1}{14}$

Решение.

1. Определим направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}\Rightarrow \vec{s}=\{3;-1;2\}$$

$$x-2y-3z+9=0\Rightarrow \vec{n}=\{1;-2;-3\}$$

2. Синус угла φ между прямой и плоскостью определяется по следующей формуле

$$\sin\varphi=\frac{\left(\vec{n},\vec{s}\right)}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{s}\right|}=\frac{1\cdot 3+(-2)\cdot(-1)+(-3)\cdot 2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{3+2-6}{14}=-\frac{1}{14}$$

Ответ 4)

19. Уравнение окружности с центром в точке $C(2;-5)$ и радиусом $R=3$ имеет вид …

1) $(x-2)^2+(y+5)^2=3$

2) $(x+2)^2+(y-5)^2=9$

3) $(x-2)^2+(y+5)^2=9$

4) $(x+2)^2+(y-5)^2=3$

Решение. Уравнение окружности с центром в точке $C\left(x_0;y_0\right)$ и радиусом R имеет вид

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2.$$

Следовательно уравнение окружности с центром в точке $C\left(2;-5\right)$ и радиусом R = 3 имеет вид

$$\left(x-2\right)^2+\left(y+5\right)^2=9$$

Ответ 3)

20. Уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ох и проходящей через точку $A(4;-2)$, имеет вид...

1) $y^2=-x$

2) $y^2=4x$

3) $y^2=x$

4) $x^2=-8y$

Решение. Подставляя в каждое уравнение вместо х и у числа 4 и -2 (координаты точки А), убеждаемся, что верное числовое равенство 4=4 получается только в уравнении 3).

Ответ 3)

21. Каноническое уравнение эллипса с полуосями $a=3$ и $b=2$, с центром в начале координат имеет вид…

1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=0$

3) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

4) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Решение. Каноническое уравнение эллипса с полуосями a и b с центром в начале координат имеет вид:

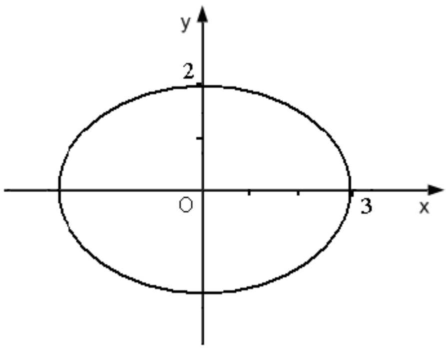
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Следовательно, каноническое уравнение эллипса с полуосями $a=3$ и $b=2$ с центром в начале координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Ответ 4)

22. Каноническое уравнение эллипса, изображенного на рисунке,



имеет вид …

1) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

3) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 4) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

Решение. Из рисунка видно, что полуось $a=3$ (оси OX) и полуось $b=2$ (оси OY). При этом центр эллипса находится в начале координат.

Каноническое уравнение эллипса с полуосями a и b с центром в начале координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Следовательно, каноническое уравнение эллипса с полуосями $a=3$ и $b=2$ с центром в начале координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Ответ 4)

23. Расстояние между центрами окружностей, заданных уравнениями $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ и $x^2+y^2=1$ равно…

1) $\sqrt{20}$ 3) $\sqrt{3}$

2) 3 4) $\sqrt{5}$

Решение.

1. Найдем центры окружностей, для чего первое уравнение приведем к каноническому виду (выделим полные квадраты относительно x и y).

Каноническое уравнение окружности имеет вид:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, *где* $C(x_0,y_0)$ *– центр окружности*

Приведем первое уравнение к каноническому виду:

$x^2-4x+4-4+y^2-2y+1-1+1=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=4$.

Следовательно, центр первой окружности C_1 имеет координаты $(2;1)$. Центр второй окружности имеет координаты $C_2(0;0)$.

2. Найдем расстояние между центрами как длину вектора $\overrightarrow{C_1C_2}$. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{C_1C_2}$ (из координат конца вычтем координаты начала вектора): $\overrightarrow{C_1C_2}=\{0-2;0-1\}=\{-2;-1\}$. Найдем длину вектора $\overrightarrow{C_1C_2}$:

$$\left|\overrightarrow{C_1C_2}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

Ответ 4)

24. Дано уравнение гиперболы $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$. Тогда расстояние между её фокусами равно...

1) $\sqrt{5}$

2) 2

3) $4\sqrt{5}$

4) $4\sqrt{3}$

Решение. Каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $C(x_0;y_0)$ и полуосями: действительной a и мнимой b имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Между размерами осей $2a$,$2b$ и расстоянием между фокусами $2c$ имеется следующая связь: $b^2=c^2-a^2 \Rightarrow c^2=a^2+b^2$.

Следовательно, из уравнения гиперболы $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$ находим $a=4$ и $b=2$.

Находим расстояние между фокусами:

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=16+4=20 \Rightarrow 2c=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}.$$

Ответ 3)

25. Координаты фокусов гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ равны…

1) $F_1(-5;\,0)$ и $F_2(5;\,0)$ 3) $F_1(0;\,-5)$ и $F_2(0;\,5)$

2) $F_1(-4;\,0)$ и $F_2(4;\,0)$ 4) $F_1(-\sqrt{7};\,0)$ и $F_2(\sqrt{7};\,0)$

Решение. Каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат и полуосями: действительной a и мнимой b имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Между размерами осей $2a$,$2b$ и расстоянием между фокусами $2c$ имеется следующая связь: $b^2=c^2-a^2 \Rightarrow c^2=a^2+b^2$. При этом фокусы лежат на оси OX и имеют координаты $F_1\left(-c;0\right), F_2\left(c,0\right)$.

Следовательно, из уравнения гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ находим $a=4$ и $b=3$.

Находим c: $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=16+9=25 \Rightarrow c=\sqrt{25}=5$.

Координаты фокусов $F_1(-5;0), F_2\left(5;0\right)$.

Ответ 1)

26. Координаты центра эллипсоида

$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{9}+\frac{(z+1)^2}{4}=1$ равны …

1) $(-2;\,4;\,-1)$ 3) $(25;\,9;\,4)$

2) $(2;\,-4;\,1)$ 4) $(5;\,3;\,2)$

Решение. Каноническое уравнение эллипсоида с центром в точке $C\left(x_0;y_0;z_0\right)$ и полуосями a (ось OX), b (ось OY) и c (ось OZ) имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1\,.$$

Следовательно центр эллипсоида C имеет координаты $(-2;4;-1)$

Ответ 1)

27. Уравнение сферы с центром в точке $C(-3;\,4;\,-2)$ и радиусом $R=4$ имеет вид

1) $(x-3)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=16$

2) $(x-3)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=4$

3) $(x+3)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=16$

4) $(x+3)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=4$

Решение. Каноническое уравнение сферы с центром в точке $C(x_0;y_0;z_0)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2\,.$$

Следовательно, уравнение сферы с центром в точке $C(-3;4;-2)$ и радиусом $R=4$ имеет вид

$$(x+3)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=16$$

Ответ 3)

ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

1. Область определения функции $f(x) = \ln(x+5) + \sqrt{4-x}$ имеет вид…

1) $x \in (-5; 4)$
2) $x \in [4; +\infty)$
3) $x \in (-5; 4]$
4) $x \in [-5; 4]$

Решение. $\begin{cases} x+5>0, \\ 4-x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-5, \\ x \leq 4 \end{cases}$. Следовательно,

$x \in (-5, 4\ ]$.

Ответ 3)

2. Областью определения функции $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$ являются значения x, при которых…

1) $x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in Z$
2) $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in Z$
3) $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$
4) $x \neq 2\pi n$, где $n \in Z$

Решение. $\sin x - 1 \neq 0$ => $\sin x \neq 1$ => $x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ 1)

3. Сколько точек разрыва имеет данная функция $f(x) = \dfrac{7}{x^3 + 9x}$

1) 1
2) 0
3) 3
4) 2

Решение. Точки разрыва найдём из условия $x^3 + 9x = 0 \Rightarrow$ $x(x^2+9) = 0$ $\Rightarrow x = 0$, а $x^2 + 9 \neq 0$ при любом вещественном x. Следовательно, $x = 0$ − точка разрыва.

Ответ 1)

4. Количество точек разрыва функции $y=\begin{cases} 0, \text{ если } \ x<0 \\ 2x, \text{ если } \ 0<x<1 \\ 1, \text{ если } \ 1\le x<3 \\ x-2, \text{ если } \ x\ge 3 \end{cases}$

равно …

1) 1 3) 2

2) 0 4) 3

Решение. Точками разрыва могут быть только границы указанных интервалов, т.е. $x_1=0, x_2=1, x_3=3$. Так как в точке $x=0$ функция не определена, то $x=0$ − точка разрыва.

В точке $x=1$ $\lim\limits_{x\to 1-0} y = \lim\limits_{x\to 1-0} 2x = 2$,

$$\lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} 1 = 1.$$

Так как односторонние пределы не равны друг другу, то $x=1$ – точка разрыва.

В точке $x=3$, $\lim\limits_{x\to 3-0} y = \lim\limits_{x\to 3-0} 1 = 1$,

$$\lim_{x\to 3+0} y = \lim_{x\to 3+0} (x-2) = 1.$$

Так как односторонние пределы равны, то $x=3$ – не является точкой разрыва.

Ответ 3)

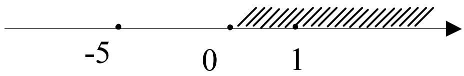
5. Точкой разрыва функции $y=\dfrac{(x-2)}{(x+5)\cdot \ln x}$ является точка…

1) 2 3) 0

2) −5 4) 1

Решение. Область определения данной функции имеет вид

$$\begin{cases} x+5\ne 0 \\ \ln x\ne 0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ne 5 \\ x\ne 1 \\ x>0 \end{cases}$$



Следовательно, $x = 1$ – точка разрыва функции.
Ответ 4)

6. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 6}$ является непрерывной на отрезке …

1) $[-3; 4]$ 3) $[-1; 2]$

3) $[-5; 0]$ 4) $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Решение. Область определения данной функции имеет вид $x^2 - x - 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ и $x \neq 3$.
Ответ 4)

7. Производная функции $y = \dfrac{8x^3\sqrt{x} - 2}{x^3} - 5$ равна…

1) $4\sqrt{x}$ 3) $\dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{x^4} - 5$

2) $\dfrac{4}{\sqrt{x}} - \dfrac{6}{x^4}$ 4) $\dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{x^4}$

Решение.

$$y' = \left(\frac{8x^3\sqrt{x} - 2}{x^3} - 5\right)' = \left(\frac{8x^3\sqrt{x}}{x^3} - \frac{2}{x^3} - 5\right)' = \left(8\sqrt{x}\right)' - \left(\frac{2}{x^3}\right)' - (5)' =$$

$$= 8\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - 2\left(x^{-3}\right) - 0 = 8 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} - 2 \cdot (-3) x^{-3-1} = 4x^{-\frac{1}{2}} + 6x^{-4} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^4}.$$

Ответ 4)

8. Производная функции $y = \operatorname{arctg} 5x$ имеет вид

1) $\dfrac{5}{1+25x^2}$

3) $\dfrac{1}{1+25x^2}$

2) $\dfrac{5}{1-25x^2}$

4) $\dfrac{5}{\cos^2 5x}$

Решение.

$$y' = (\operatorname{arctg} 5x)' = \frac{1}{1+(5x)^2}\cdot(5x)' = \frac{1}{1+25x^2}\cdot 5 = \frac{5}{1+25x^2}.$$

Ответ 1)

9. Производная функции $y = \sin^3 x$ имеет вид…

1) $3\cos^2 x$

3) $-3\sin^2 x\cdot\cos x$

2) $3\sin^2 x\cdot\cos x$

4) $3\sin^2 x$

Решение. $y' = (\sin^3 x)' = 3\sin^2 x\cdot(\sin x)' = 3\sin^2 x\cdot\cos x$.

Ответ 2)

10. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + 2t - 1$. Тогда скорость точки в момент времени $t=3$ равна …

1) 19

3) 20

2) 11

4) 18,5

Решение. Скорость точки в любой момент времени:

$$V(t) = x'(t) = \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t - 1\right)' = (t^3)' - \left(\frac{3}{2}t^2\right)' + (2t)' - (1)' =$$

$$= 3t^2 - \frac{3}{2}\cdot 2t + 2 + 0 = 3t^2 - 3t + 2.$$

При $t=3$: $V(3) = 3\cdot 3^2 - 3\cdot 3 + 2 = 27 - 9 + 2 = 20$.

Ответ 3)

11. Дифференциал функции $y = \sin 5x + \cos\frac{\pi}{3}$ имеет вид …

1) $5\cos 5x$ 3) $5\cos 5x\, dx$

2) $\cos 5x\, dx$ 4) $\sin 5x$

Решение.

$$dy = y'dx = \left(\sin 5x + \cos\frac{\pi}{3}\right)' dx = \left(\cos 5x (5x)' + 0\right)dx = 5\cos 5x dx.$$

Ответ 3)

12. Производная функции $y = f(x)$ имеет вид $f'(x) = x^2(x^2 + 4x + 4)(x-1)$. Тогда количество точек экстремума функции равно …

1) 2 3) 3

2) 1 4) 4

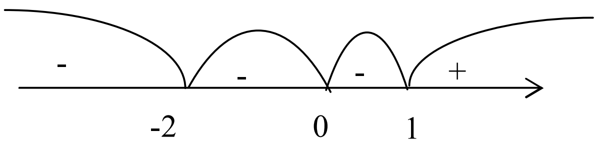
Решение. Полагая $f'(x) = 0$, найдем критические точки.

$x^2(x^2 + 4x + 4)(x-1) = 0 \Rightarrow$ 1. $x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$,

2. $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \cdot \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$,

3. $x - 1 = 0 \Rightarrow x_3 = 1$.

Наносим точки $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 1$ на числовую прямую, и определяем знак $f'(x)$ на получившихся интервалах.



Так как, при переходе через точку $x = 1$ производная сменила знак с «-» на «+»$\Rightarrow x = 1$ - точка экстремума.

Ответ 2)

13. Максимум функции $f(x) = 1 - 3x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$ равен…

1) 1　　　　3) −1/3

2) 3　　　　4) 1

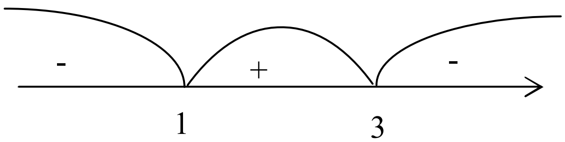
Решение. Область определения функции имеет вид $x \in (-\infty, \infty)$.
Находим первую производную

$$f'(x) = \left(1 - 3x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)' = -3 + 4x - x^2.$$

Находим критические точки

$f'(x) = 0 \Rightarrow -3 + 4x - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$.

Наносим точки $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ на числовую прямую и определяем знак $f'(x)$ на получившихся интервалах.



Так как, при переходе через точку $x = 3$ производная сменила знак с «+» на «-» $\Rightarrow x = 3$ - точка максимума.
Вычислим значение функции в точке максимума

$$f(3) = 1 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 1.$$

Ответ 1)

14. Уравнение вертикальной асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$ имеет вид …

1) $x = 0$　　　　3) $x = -1{,}5$

2) $x = -2$　　　　4) $y = x$

Решение. Для того, чтобы найти уравнение вертикальной асимптоты графика функции, необходимо найти при каком x знаменатель обращается в нуль.

а) приравняем знаменатель нулю

$$x+2=0;$$

б) выразим x

$$x=-2$$

$x=-2$- уравнение вертикальной асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x+2}$.

Ответ 2)

15. Горизонтальная асимптота графика функции $y=\dfrac{6x^2+x}{1-x^2}$ имеет вид...

1) $y=-6$	3) $y=6$
2) $y=1$	4) $y=0$

Решение. Уравнение вертикальной асимптоты графика функции имеет вид: $y = a$.

Для того чтобы найти a, необходимо вычислить предел:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+x}{1-x^2}=\left|\begin{array}{c}\text{т.к. } x\to\infty \text{ оставим в}\\ \text{числителе и в знаменателе}\\ \text{самое большое слагаемое}\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{6\cancel{x^2}^{\,1}}{-\cancel{x^2}_{\,1}}=-6$$

$y=-6$ уравнение горизонтальной асимптоты графика функции $y=\dfrac{6x^2+x}{1-x^2}$.

Ответ 1)

16. Уравнение наклонной асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ имеет вид …

1) $y = x - 1$

2) $y = -1$

3) $y = x$

4) $y = -x + 1$

Решение. Уравнение наклонной асимптоты графика функции имеет вид: $y = kx+b$.

Для того чтобы найти k и b, необходимо вычислить пределы:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x} = \left|\begin{array}{c}\text{т.к. } x\to\infty \text{ оставим в} \\ \text{числителе и в знаменателе} \\ \text{самое большое слагаемое}\end{array}\right|$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x^2}_{\,1}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - k\cdot x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - 1\cdot x\right) = \left|\begin{array}{c}\text{приведем скобку} \\ \text{к общему знаменателю}\end{array}\right|$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - {}^{x+1/}1\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1} = \left|\begin{array}{c}\text{т.к. } x\to\infty \text{ оставим в} \\ \text{числителе и в знаменателе} \\ \text{самое большое слагаемое}\end{array}\right| =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x} = -1.$$

Подставим k и b в уравнение $y = kx + b$. Тогда $y = 1\cdot x + (-1)$ или $y = x - 1$ - уравнение наклонной асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Ответ 1)

17. Производная второго порядка функции $y = \dfrac{3}{2x+5}$ равна …

1) $y = \dfrac{6}{(2x+5)^3}$ 3) $y = \dfrac{24}{(2x+5)^3}$

2) $y = \dfrac{-6}{(2x+5)^2}$ 4) $y = \dfrac{12}{(2x+5)^3}$

Решение. a) найдем производную первого порядка y':

$$y' = \left(\frac{3}{2x+5}\right)' = \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся правилом} \\ \text{дифференцирования частного} \\ \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v'} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{(3)'(2x+5) - 3(2x+5)'}{(2x+5)^2} = \frac{(3)'(2x+5) - 3\left((2x)' + (5)'\right)}{(2x+5)^2} =$$

$$\left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся таблицей производных} \\ \text{основных элементарных функций} \\ (C)' = 0;\ (x)' = 1;\ (2x)' = 2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{0 \cdot (2x+5) - 3(2+0)}{(2x+5)^2} = \frac{-6}{(2x+5)^2};$$

b) найдем производную второго порядка $y'' = \left(y'\right)'$:

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(\frac{-6}{(2x+5)^2}\right)' = \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся правилом} \\ \text{дифференцирования частного} \\ \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v'} \end{array} \right| =$$

$$=\frac{(-6)'(2x+5)^2-\left((2x+5)^2\right)'(-6)}{\left((2x+5)^2\right)^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{найдем производную функции}\\ \left((2x+5)^2\right)'=2\cdot(2x+5)^1\cdot(2x+5)'=\\ =2\cdot(2x+5)\cdot 2=4(2x+5)\end{array}\right|=$$

$$=\frac{0\cdot(2x+5)^2-4(2x+5)\cdot(-6)}{\left((2x+5)^2\right)^2}=\frac{24\cancel{(2x+5)}^{1}}{(2x+5)^{\cancel{4}^{3}}}=\frac{24}{(2x+5)^3}.$$

Ответ 3)

18. Дана функция $y=x\cdot e^x$. Тогда $y''-2y'$ равно …

1) $-3e^x-xe^x$

2) $-e^x$

3) e^x

4) $-xe^x$

Решение.

а) найдем производную первого порядка y':

$$y'=\left(x\cdot e^x\right)'=\left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся правилом}\\ \text{дифференцирования}\\ \text{произведения }(u\cdot v)'=u'v+uv'\end{array}\right|=$$

$$=(x)'e^x+x\left(e^x\right)'=\left|\begin{array}{l}(x)'=1\\ \left(e^x\right)'=e^x\end{array}\right|=1\cdot e^x+xe^x=e^x+xe^x;$$

b) найдем производную второго порядка $y''=\left(y'\right)'$:

$$y''=\left(e^x+x\cdot e^x\right)'=\left(e^x\right)'+\left(x\cdot e^x\right)'=\left(e^x\right)'+(x)'e^x+x\cdot\left(e^x\right)'=$$

$$e^x+e^x+x\cdot e^x=2e^x+xe^x;$$

с) найдем $y''-2y'$:

$$y'' - 2y' = 2e^x + xe^x - 2\cdot\left(e^x + xe^x\right) = \cancel{2e^x} + xe^x - \cancel{2e^x} - 2xe^x = -xe^x.$$

Тогда $y'' - 2y' = -xe^x$.

Ответ 4)

19. График функции $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 12$ обращён выпуклостью вверх на промежутке …

1) $x \in [-5; +\infty)$

2) $x \in (-\infty; 5]$

3) $x \in [5; +\infty)$

4) $x \in (-\infty; 0] \cup [10, +\infty)$

Решение. a) найдем производную первого порядка y':

$$y' = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 12\right)' = \left(-\frac{1}{3}x^3\right)' + \left(5x^2\right)' + (12)' =$$

$$-\frac{1}{3}\left(x^3\right)' + 5\left(x^2\right)' + (12)' = \left|\begin{matrix}\left(x^\lambda\right)' = \lambda x^{\lambda-1} \\ (C)' = 0\end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{3}^1}\cdot \cancel{3}^1 x^2 + 5\cdot 2x + 0 = -x^2 + 10x;$$

b) найдем производную второго порядка $y'' = \left(y'\right)'$:

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(-x^2 + 10x\right)' = -\left(x^2\right)' + (10x)' = \left|\begin{matrix}\left(x^2\right)' = 2x \\ (10x)' = 10\end{matrix}\right| = -2x + 10;$$

$$y'' = -2(x-5);$$

c) приравняем производную второго порядка нулю и найдем при каких x она равна нулю: $y'' = 0$

$-2(x-5) = 0$; при $x = 5$ $y'' = 0$;

d) исследуем знак y'' на промежутках $(-\infty; 5)$ и $(5; +\infty)$, подставив в формулу $y'' = -2(x-5)$ любую точку из этих промежутков. Получим:

x	$(-\infty, 5)$	5	$(5, +\infty)$
y''	+	0	-
	$\cup$	перегиб	$\cap$

График функции $y = -\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 12$ обращён выпуклостью вверх на промежутке $[5, +\infty)$.

Ответ 3)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Частная производная z'_x функции $z = \sin(x^2 - 5y + 2)$ равна…

1) $2x\cos(x^2 - 5y + 2)$
2) $\cos(x^2 - 5y + 2)$
3) $-5\cos(x^2 - 5y + 2)$
4) $\sin(2x - 5)$

Решение. Найдем частную производную функции z по переменной x, при этом y – константа:

$$z'_x = \left(\sin\left(x^2 - 5y + 2\right)\right)'_x = \left| \begin{array}{l} \text{воспользуемся правилом} \\ \text{дифференцирования} \\ \text{сложной функции, если} \\ z = z(u(x)), \text{тогда } z'_x = z'_u \cdot u'_x \end{array} \right| =$$

$$\cos\left(x^2 - 5y + 2\right)\cdot\left(x^2 - 5y + 2\right)'_x =$$

$$\cos\left(x^2 - 5y + 2\right)\cdot\left(\left(x^2\right)'_x - \left(5y\right)'_x + \left(2\right)'_x\right) =$$

$$\cos\left(x^2 - 5y + 2\right)\cdot\left(2x - 0 + 0\right) = 2x\cos\left(x^2 - 5y + 2\right).$$

Ответ 1)

2. Частная производная z'_y функции $z = x^3 + 5xy - 3y^3 + 2x - y - 1$ равна …

1) $3x^2 + 5x + 5y - 9y^2 + 1$

2) $5y - 9y^2 - 1$

3) $5x - 9y^2 - 1$

4) $3x^2 + 5y + 2$

Решение. Найдем частную производную функции z по переменной y, при этом x – константа:

$$z'_y = \left(x^3 + 5xy - 3y^3 + 2x - y - 1\right)'_y =$$

$$\left(x^3\right)'_y + \left(5xy\right)'_y - \left(3y^3\right)'_y + \left(2x\right)'_y - \left(y\right)'_y - \left(1\right)'_y =$$

$$0 + 5x - 9y^2 + 0 - 1 - 0 = 5x - 9y^2 - 1.$$

Ответ 3)

3. Частная производная второго порядка z''_{xy} функции $z = x^2 \cdot y^3$ равна …

1) $2y^3 + 12xy^2 + 6x^2y$

2) $2y^3$

3) $6xy^2$

4) $2xy^3$

Решение.

a) найдем частную производную функции z по переменной x, при этом y – константа

$$z'_x = \left(x^2 \cdot y^3\right)'_x = \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся правилом} \\ \text{дифференцирования} \\ \text{произведения } (u \cdot v)' = u'v + uv' \end{array} \right|$$

$$= y^3\left(x^2\right)'_x + x^2\left(y^3\right)'_x = y^3 \cdot 2x + x^2 \cdot 0 = 2xy^3;$$

b) найдем частную производную функции z по переменной y от результата предыдущего действия, при этом x – константа

$$\left(z'_x\right)'_y = z''_{xy} = \left(2xy^3\right)'_y = 2\left(xy^3\right)'_y = 2\left(y^3\left(x\right)'_y + x\left(y^3\right)'_y\right) =$$

$$2\left(y^3 \cdot 0 + x \cdot 3y^2\right) = 6xy^2.$$

$$z''_{xy} = 6xy^2.$$

Ответ 3)

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Множество первообразных функции $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + 3}{3x^2}$ имеет вид …

1) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{2}{3}$

2) $\dfrac{x^3}{9} - \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{1}{x} + C$

3) $\dfrac{\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 3x}{x^3} + C$

4) $\dfrac{x^3}{9} - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{1}{x} + C$

Решение. Для нахождения всех первообразных функции $f(x)$ вычисляем неопределённый интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C\ .$$

Произведём почленное деление числителя на знаменатель, применяя формулу из таблицы неопределённых интегралов и свойства неопределённых интегралов, получим

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3}{3x^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{x^4}{x^2}dx - \frac{2}{3}\int \frac{x^3}{x^2}dx + \int \frac{1}{x^2}dx = \ = \frac{1}{3}\int x^2\,dx -$$

$$-\frac{2}{3}\int x dx + \int \frac{dx}{x^2} = \left| \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right| = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{x} + C.$$

Ответ 2)

2. Множество первообразных функции $f(x) = \sqrt{2x-1}$ имеет вид …

1) $\frac{2}{3}\sqrt{(2x-1)^3} + C$

2) $-\frac{1}{\sqrt{2x-1}} + C$

3) $\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3} + C$

4) $\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

Решение. Для нахождения всех первообразных функции $f(x)$ вычисляем неопределённый интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C\ .$$

$$\int \sqrt{2x-1}\ dx = |\textit{домножим и разделим интеграл на коэффициент } 2| =$$

$$= \frac{1}{2}\int (2x-1)^{\frac{1}{2}}\ 2dx = |\textit{вычислим этот интеграл по формуле}$$

$$\int U^{\alpha} dU = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ ,\ \textit{где}\ U = 2x-1\ ,\ dU = (2x-1)'dx = 2dx\ | =$$

$$=\frac{1}{2}\int(2x-1)^{\frac{1}{2}}\,d\,(2x-1)=\frac{1}{2}\frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}+C.$$

Ответ 3)

3. Множество первообразных функции $f(x)=x\cdot e^{2x}$ равно …

1) $\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$ 3) $\frac{x^2}{4}\cdot e^{2x}+C$

2) $\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C$ 4) $xe^{2x}-e^{2x}+C$

Решение. Интегрируем, применяя формулу интегрирования по частям.
Разбиваем подъинтегральное выражение на два сомножителя – U и dV, тогда

$$U=x,\quad dV=e^{2x}dx,\quad dU=dx,\ V=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}.$$

$$\int xe^{2x}dx=\left|\int U\,dV=UV-\int V\,dU\right|=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C.$$

Ответ 1)

4. Множество первообразных функции $f(x)=x\cos(x^2)$ равно …

1) $2\sin(x^2)+C$ 3) $-\frac{1}{2}\sin(x^2)+C$

2) $\frac{1}{2}\sin(x^2)+C$ 4) $\frac{x^2}{2}\sin(x^2)+C$

Решение. Для нахождения всех первообразных функции $f(x)$ вычисляем неопределённый интеграл

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

$\int x\cos(x^2)\,dx =$|*домножим и разделим интеграл на коэффициент* 2| =

$= \frac{1}{2}\int \cos(x^2)\;2xdx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)\,d(x^2) =$ |*вычислим этот интеграл по формуле* $\int \cos U\,dU = \sin U + C$, *где* $U = x^2$ | $= \frac{1}{2}\sin(x^2) + C.$

Ответ 2)

5. В неопределенном интеграле $\int \frac{x}{\sqrt{x}-1}\,dx$ введена новая переменная $t = \sqrt{x}$, тогда интеграл примет вид …

1) $\int \frac{t^3}{t-1}\,dt$

2) $2\int \frac{t^3}{t-1}\,dt$

3) $\frac{1}{2}\int \frac{t^3}{t-1}\,dt$

4) $\int \frac{t^2}{t-1}\,dt$

Решение. Вводя новую переменную $\sqrt{x} = t$, получим $x = t^2, dx = 2t\,dt$. Подставляя эти выражения в исходный интеграл, получим $\int \frac{xdx}{\sqrt{x}-1} = \int \frac{t^2\,2t\,dt}{t-1} = 2\int \frac{t^3}{t-1}dt$.

Ответ 2)

6. Определенный интеграл $\int_{-1}^{2}(3x^2 + 4x - 1)\,dx$ равен …

1) 18

2) 12

3) 16

4) -12

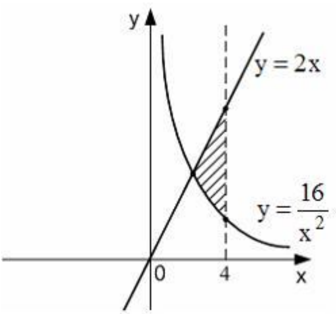
Решение. Применяя формулу Ньютона – Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ - первообразная для подъинтегральной функции $f(x)$, получим

$$\int\limits_{-1}^{2}\left(3x^2 + 4x - 1\right)dx = = 3\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx + 4\int\limits_{-1}^{2} x\,dx - \int\limits_{-1}^{2} dx = \left|\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right| =$$

$$= \left(x^3 + 2x^2 - x\right)\Big|_{-1}^{2} = 2^3 + 2\cdot 2^2 - 2 - (-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 - 1 = 12.$$

Ответ 2)

7.



Площадь фигуры, изображенной на рисунке
равна…

1) 4 3) 8
2) 16 4) 3

Решение. Найдём значение x, при котором пересекаются графики функций $y_1 = 2x$ *и* $y_2 = \dfrac{16}{x^2}$, приравнивая, друг к другу правые части уравнений, получим $2x = \dfrac{16}{x^2}$, $2x^3 = 16, x^3 = 8,$ $x = 2.$

Значение $x = 2$ и будет нижним пределом интегрирования. Площадь фигуры S выразится по формуле:

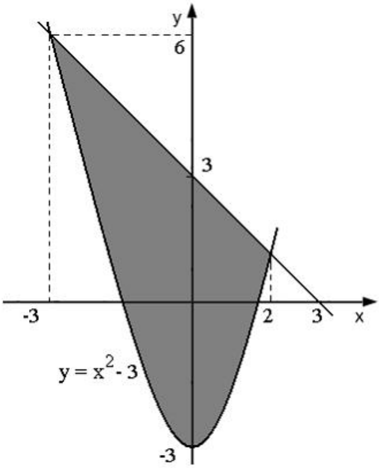
$$S=\int_2^4 (y_1-y_2)dx=\int_2^4\left(2x-\frac{16}{x^2}\right)dx=$$

$$=2\int_2^4 x\,dx-16\int_2^4 x^{-2}\,dx=\left|\int x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\right|=\left(x^2+\frac{16}{x}\right)\Big|_2^4=$$

$$=4^2+\frac{16}{4}-2^2-\frac{16}{2}=16+4-4-8=8.$$

Ответ 3)

8. Площадь фигуры, изображённой на рисунке, может быть вычислена по формуле…



1) $S=-\int_{-3}^{2}(x^2-3)\,dx$

2) $S=\int_{-3}^{2}((x+3)-(x^2-3))\,dx$

3) $S=-2\int_{-3}^{2}(x^2-3)\,dx$

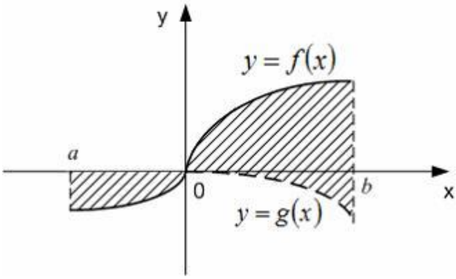
4) $S=\int_{-3}^{2}((-x+3)-(x^2-3))\,dx$

Решение. Учитывая расположение фигуры относительно осей координат, $S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx$, где

$f_1(x)=-x+3,\quad f_2(x)=x^2-3$, $S=\int_{-3}^{2}((-x+3)-(x^2-3))dx$.

Ответ 4)

9. Площадь фигуры, изображенной на рисунке вычисляется как …



1) $\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

3) $\int\limits_a^b (f(x) - \int\limits_0^b g(x)\,dx$

2) $\left|\int\limits_a^0 f(x)\,dx\right| + \int\limits_0^b (f(x) - g(x))\,dx$

4) $\int\limits_a^0 f(x)\,dx + \int\limits_0^b (f(x) - g(x))\,dx$

Решение. Пусть S_1 - площадь фигуры расположенной слева, S_2 - площадь фигуры расположенной справа. Учитывая расположение фигур относительно осей координат и то, что площадь не может быть отрицательной, $S_1 = \left|\int\limits_a^0 f(x)\,dx\right|,\ S_2 = \int\limits_0^b (f(x) - g(x))\,dx,\ S = S_1 + S_2.$ Знак модуля в вычислении площади S_1 ставится потому, что фигура расположена в отрицательной полуплоскости (ниже оси OX).

Ответ 2)

10. Подынтегральная функция $f(x)$ четная $f(x) \geq 0$ и на $[-a, a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx$ может быть равен …

1) $2\int\limits_0^a f(x)\,dx$

3) $\int\limits_0^a f(x)\,dx$

2) $\dfrac{1}{2a}\int\limits_0^1 f(x)\,dx$

4) 0

Решение. Учитывая, что график чётной функции симметричен относительно оси OY, а интервал интегрирования симметричен относительно $(\cdot)O(0,0)$ $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$.

Ответ 1)

11. Если $f(x)\geq 0$ на $[a, c]$ и $a<b<c]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ может быть равен …

1) $\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$

3) $\int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_b^c f(x)\,dx$

2) $\int\limits_c^a f(x)dx - \int\limits_b^c f(x)\,dx$

4) $\int\limits_c^a f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$

Решение. Воспользуемся геометрической иллюстрацией определённого интеграла $\int\limits_a^c f(x)dx$ - это площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, слева прямой $x=a$, справа прямой $x=c$, нижним основанием служит отрезок $[a;c]$, точка b лежит между точками a и c.

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx.$$

Выразим из этого соотношения $\int\limits_a^b f(x)dx$, получим

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_b^c f(x)dx.$$

Ответ 2)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Уравнение $4x + 3y + (2y - 3x) \cdot y' = 0$ является …

1) линейным дифференциальным уравнением первого порядка;
2) уравнением Бернулли;
3) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными;
4) однородным относительно x и y дифференциальным уравнением первого порядка.

Решение. Для того, чтобы правильно закончить предложение, выразим в данном уравнении y' и по виду правой части уравнения определим вид уравнения.

$$4x + 3y + (2y - 3x) \cdot y' = 0$$

$$(2y - 3x) \cdot y' = -4x - 3y$$

$$y' = \frac{-4x - 3y}{2y - 3x}.$$

Далее разделим числитель и знаменатель на x:

$$y' = \frac{-\frac{4x}{x} - \frac{3y}{x}}{\frac{2y}{x} - \frac{3x}{x}} = \frac{-4 - 3 \cdot \frac{y}{x}}{2\frac{y}{x} - 3} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Правая часть уравнения зависит от $\frac{y}{x}$. Согласно определению, наше уравнение однородное.
Ответ 4)

Памятка 1.

Название уравнения $1^{\text{го}}$ порядка	Вид уравнения
Уравнение с разделяющимися переменными.	$y' = f(x) \cdot q(y)$
Однородное уравнение.	$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$
Линейное неоднородное.	$y' + p(x) \cdot y = q(x)$
Уравнение Бернулли.	$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$

2. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка является…

1) $y'' + 3y' + 2y = 0$

2) $3x^2 dy + \sqrt{x^2 - y^2}\, dx = 0$

3) $y' + 3y + 2x^2 = 0$

4) $y' = \frac{x^2 - 2xy}{y^2}$

Решение. Однородным дифференциальным уравнением $1^{\text{го}}$ порядка среди четырех предложенных уравнений, является уравнение $y' = \frac{x^2 - 2xy}{y^2}$, т. к. оно после деления числителя и знаменателя на x^2, подходит под определение однородного уравнения:

$$y' = \frac{\dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{2xy}{x^2}}{\dfrac{y^2}{x^2}} = \frac{1 + 2\dfrac{y}{x}}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ответ 4)

3. Уравнение $2x \cdot y' + y = 3x^2$ является …

1) линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка;

2) однородным относительно x и y дифференциальным уравнением первого порядка;

3) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными:

4) уравнением Бернулли.

Решение. Уравнение $2x \cdot y' + y = 3x^2$ является линейным неоднородным $1^{\text{го}}$ порядка. После деления обеих частей уравнения на $2x \neq 0$, получаем уравнение, которое определяет линейное неоднородное (см. памятку)

$$y' + \frac{1}{2x} y = \frac{3}{2} x .$$

Ответ 1)

4. Общее решение дифференциального уравнения $2ydy = \dfrac{dx}{1+x^2}$ имеет вид …

1) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x + C}$

2) $y = \pm\sqrt{\operatorname{arctg} x + C}$

3) $y = \pm\sqrt{\ln(1+x^2) + C}$

4) $y = \pm\sqrt{\operatorname{arctg} x}$

Решение. Для того, чтобы правильно закончить предложение, решим данное уравнение с разделяющимися переменными и выберем из предложенных функций полученное решение

$$\int 2y\,dy = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$2\cdot\frac{y^2}{2} = \text{arctg }x + C \Rightarrow y = \pm\sqrt{\text{arctg}\,x + C}\ .$$

Ответ 2)

5. Общее решение дифференциального уравнения $(2x+1)dy + y^2dx = 0$ при $y \neq 0$ имеет вид…:

1) $y = \dfrac{2}{\ln\left|C(2x+1)\right|}$, $C \neq 0$

2) $y = \dfrac{1}{\ln\left|C(2x+1)\right|}$, $C \neq 0$

3) $y = \dfrac{-2}{\ln\left|C(2x+1)\right|}$, $C \neq 0$

4) $y = \dfrac{2}{\ln\left|2x+1\right|}$

Решение. Для того, чтобы указать вид общего решения данного уравнения, решим его и выберем правильный ответ.

$(2x+1)\,dy + y^2dx = 0$ − уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим обе части уравнения на $(2x+1)\neq 0$:

$$dy + \frac{y^2}{2x+1}dx = 0\ .$$

Разделим обе части уравнения на $y^2 \neq 0$:

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{dx}{2x+1} = 0\ .$$

$\dfrac{dy}{y^2} = -\dfrac{dx}{2x+1}$. Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{dy}{y^2} = -\int\frac{dx}{2x+1}$$

$$-y^{-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|2x+1\right| + C$$

$$\frac{2}{y} = \ln\left|2x+1\right| + \ln\left|C\right|$$

$$y=\frac{2}{\ln\left|C(2x+1)\right|},\ C\neq 0.$$

Ответ 1)

6. Общее решение дифференциального уравнения $y'-\frac{y}{x}=xe^{\frac{x}{2}}$ имеет вид …

1) $y=(C+2e^{x})x,\ \ C\in R$

2) $y=\left(C+2e^{\frac{x}{2}}\right)x,\ \ C\in R$

3) $y=\left(C+e^{\frac{x}{2}}\right)x,\ \ C\in R$

4) $y=\left(C+2e^{\frac{x}{2}}\right)\cdot x^{2},\ \ C\in R$

Решение. Для того, чтобы указать вид общего решения данного линейного неоднородного уравнения, решим его и выберем правильный ответ.

$$y'-\frac{y}{x}=xe^{\frac{x}{2}}.$$

Решим уравнение методом Бернулли. $y=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow y'=u'v+uv'$.
Подставим эти выражения в данное уравнение и получим

$$u'v+\left(uv'-\frac{1}{x}uv\right)=xe^{\frac{x}{2}}$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=xe^{\frac{x}{2}} \qquad (1)$$

Приравняем скобку к нулю $v'-\frac{v}{x}=0$

$$\frac{dv}{dx}-\frac{v}{x}=0.$$

Умножим обе части на $\frac{dx}{v}$ и проинтегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$\ln|v| = \ln|x| + C$, принимаем $C = 0$ и отбрасываем логарифмы. Получим $v = x$.

Подставим найденное $v = x$ в уравнение (1), тогда скобка в нем будет равна нулю.

$$u' \cdot x = x \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

$$u' = e^{\frac{x}{2}}$$

$$u = \int e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} + C.$$

Итак, $y = u(x) \cdot v(x) = x\left(2e^{\frac{x}{2}} + C\right) = y$.

Ответ 2)

7. Функция $y = kx^4 + 7x$ является решением дифференциального уравнения $y' - \frac{y}{x} = 2x^3$. Тогда значение k равно … :

1) 2

2) $\frac{1}{2}$

3) $\frac{2}{3}$

4) $\frac{2}{5}$

Решение. $y = k\,x^4 + 7x \Rightarrow y' = 4k\,x^3 + 7$. Подставим эти y и y' в уравнение

$y' - \frac{y}{x} = 2x^3$. Получим $4kx^3 + 7 - \frac{kx^4 + 7x}{x} = 2x^3$

$$4kx^3 + 7 - kx^3 - 7 = 2x^3$$

$$3kx^3 = 2x^3$$

$$3k = 2$$

$$k = \frac{2}{3}.$$

Ответ 3)

8. Функция $y = \ln x + kx^2 + C$ является общим решением дифференциального уравнения $xy' = 1 - x^2$. Тогда …

1) $k = 0{,}5,\ \ C \in R$ 3) $k = -0{,}5,\ \ C = 0$

2) $k = -0{,}5,\ \ C \in R$ 4) $k = 0{,}5,\ \ C = 0$

Решение. $y = \ln x + kx^2 + C$, где $C \in R \Rightarrow y' = \frac{1}{x} + 2kx$.

Подставим эти y и y' в уравнение $xy' = 1 - x^2$. Получим

$$x\left(\frac{1}{x} + 2kx\right) = 1 - x^2$$

$$1 + 2kx^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 2kx^2 = -x^2 \Rightarrow 2k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Ответ 2)

9. Частный интеграл дифференциального уравнения $\frac{dy}{y^2+1} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, удовлетворяющий начальному условию $y(0{,}5) = 1$ имеет вид …

1) $\operatorname{arctg} y + \arcsin x = C$ 3) $\operatorname{arctg} y + \arcsin x = \frac{5\pi}{12}$

2) $\operatorname{arctg} y + \arcsin x = \pi$ 4) $\arcsin y + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{12} + \operatorname{arctg} 0{,}5$

Решение. Для того, чтобы определить верный ответ среди предложенных, надо найти частный интеграл (частное решение) данного уравнения с разделяющимися переменными. Сначала найдем общее решение уравнения:

$$\frac{dy}{y^2+1}+\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

$$\int\frac{dy}{y^2+1}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int 0\,dx$$

$\operatorname{arctg} y+\arcsin x=C$ − общее решение.

Далее, используя начальное условие $y(0{,}5)=1$, найдем частный интеграл.

$$\operatorname{arctg} 1+\arcsin 0{,}5=C$$

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi+2\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}=C.$$

Значит, верный ответ: $\operatorname{arctg} y+\arcsin x=\dfrac{5\pi}{12}$.

Ответ 3)

10. Решение задачи Коши $y'+2y\operatorname{tg} x=0$, $y(0)=3$ имеет вид…

1) $y=\ln\cos^2 x+3$

2) $y=3\cos^2 x$

3) $y=C\cos^2 x$

4) $y=3+\sin^2 x$

Решение. Найдем частное решение данного уравнения с разделяющимися переменными, тем самым решим задачу Коши. Затем выберем среди предложенных функций найденное решение.

$$y'=2y\operatorname{tg} x=0, \quad y(0)=3$$

$$\frac{dy}{dx}+2y\operatorname{tg} x=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-2y\operatorname{tg} x.$$

Умножим обе части уравнения на $\dfrac{dx}{y}$ и проинтегрируем:

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int\operatorname{tg} x\cdot dx$$

$$\ln|y| = -2(-\ln|\cos x|) + C$$
$$\ln|y| = \ln\cos^2 x + \ln C$$
$$\ln|y| = \ln\left|C\cdot\cos^2 x\right|$$
$y = C\cdot\cos^2 x$ – общее решение уравнения.

Найдем значение C, используя начальное условие $y(0) = 3$:
$$3 = C\cdot\cos^2 0$$
$3 = C\cdot 1 \Rightarrow C = 3$, тогда

$y = 3\cos^2 x$ – решение задачи Коши.

Ответ 2)

11. Решение задачи Коши $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$, $y(2) = 6$ имеет вид…

1) $y = \dfrac{x^3}{2} + Cx$

3) $y = \dfrac{x^3}{2} - x$

2) $y = \dfrac{x^3}{2} + x$

4) $y = x^3 - x$

Решение. Найдем частное решение линейного неоднородного уравнения, затем среди предложенных вариантов ответов выберем верный.
$$y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(2) = 6.$$
Общее решение данного уравнения найдем методом Бернулли: $y = u(x)\cdot v(x) \Rightarrow y' = u'v + uv'$. Подставим эти выражения в данное уравнение.
$$u'v + \left(uv' - \frac{1}{x}uv\right) = x^2$$
$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x^2 \qquad (2)$$
Приравняем скобку к нулю:

$$v' - \frac{v}{x} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}.$$

Умножим обе части равенства на $\frac{dx}{v}$ и проинтегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = \ln|x| + C,$$

примем $C = 0$, логарифмы опустим: $v = x$.

Подставим найденное $v = x$ в уравнение (2), тогда скобка в нем будет равна нулю

$$u' \cdot x = x^2$$

$$u' = x$$

$$u = \int x\,dx \Rightarrow \frac{x^2}{2} + C.$$

Итак, $y = u \cdot v = x \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C\right) = \frac{x^3}{2} + xC$ − общее решение.

Найдем частное решение, используя начальное условие $y(2) = 6$:

$6 = \frac{2^3}{2} + 2 \cdot C \Rightarrow 6 = 4 + 2 \cdot C \Rightarrow 2 = 2 \cdot C \Rightarrow C = 1$, тогда

$y = \frac{x^3}{2} + x$ −частное решение.

Ответ 2)

12. Функция $y = \frac{a}{x^3}$ будет частным решением задачи Коши: $y' + b\frac{y}{x} = 0,\ \ y(-2) = 2$ при…

1) $a = -16,\ b = -3$ 3) $a = -16,\ b = 3$

2) $a=-2,\ b=2$ 4) $a=-8,\ b=1{,}5$

Решение. Найдем a из условия принадлежности точки $(-2;2)$ графику функции $y=\dfrac{a}{x^2}$:

$2=\dfrac{a}{(-2)^3}\Rightarrow 2=\dfrac{a}{-8}\Rightarrow a=-16$ и $y=\dfrac{-16}{x^3}$ − частное решение.

Найдем b. Так как $y=\dfrac{-16}{x^3}$, то

$y'=(-16\cdot x^{-3})'=-16\cdot(-3)\cdot x^{-4}=\dfrac{48}{x^4}$.

Подставим эти y и y' в уравнение $y'+b\dfrac{y}{x}=0$. Получим

$$\frac{48}{x^4}+b\cdot\frac{-16}{x^3\cdot x}=0\Rightarrow\frac{48}{x^4}=\frac{16b}{x^4}\Rightarrow 48=16b\Rightarrow b=\frac{48}{16}=3.$$

Ответ 3)

13. Общее решение дифференциального уравнения $y'''=\sin x$ имеет вид …

1) $y=\cos\,x+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2\,x+C_3,\ \ C_1,C_2,C_3\in R$

2) $y=-\cos\,x+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2\,x+C_3,\ \ C_1,C_2,C_3\in R$

3) $y=-\cos\,x+C_1x^3+C_2\,x+C_3,\ \ C_1,C_2,C_3\in R$

4) $y=\cos\,x+C_1x^3+C_2\,x+C_3,\ \ C_1,C_2,C_3\in R$

Решение. Общее решение дифференциального уравнения $y'''=\sin x$ имеет вид

$$y=\cos x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

Покажем это, интегрируя трижды данное уравнение:

$$y'' = \int \sin x\, dx = -\cos x + C_1$$

$$y' = \int (-\cos x + C_1)\, dx = -\sin x + C_1 x + C_2$$

$$y = \int (-\sin x + C_1 x + C_2)\, dx = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 .$$

Ответ 1)

14. Дифференциальное уравнение $4y^3 y'' + (y')^2 = y - 1$ заменой $p = p(y) = y'$ приводится к виду…

1) $4y^3 p'p^2 + p^2 = y - 1$

2) $4y^3 p' + p^2 = y - 1$

3) $4y^3 p'p + y^2 = x - 1$

4) $4y^3 p'p + p^2 = y - 1$

Решение. $p = p(y) = y' \Rightarrow y'' = p'(y) \cdot y' = p' \cdot p$. Подставим эти выражения в исходное уравнение. $4 \cdot y^3 \cdot p' \cdot p + p^2 = y - 1$.

Ответ 4)

15. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 5y' + 6y = 0$ имеет вид …

1) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}, \quad C_1 C_2 \in R$

2) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}, \quad C_1 C_2 \in R$

3) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}, \quad C_1 C_2 \in R$

4) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \quad C_1 C_2 \in R$

Решение. Запишем и решим характеристическое уравнение, соответствующее данному дифференциальному:

$$k^2 + 5k + 6 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1, \quad k = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2}, \quad k_1 = -3, \quad k_2 = -2 .$$

Имеем два действительных, различных корня, значит общее решение данного уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$, $C_1 C_2 \in R$.

Ответ 3)

Памятка 2.

Корни характеристического уравнения	Вид общего решения однородного уравнения
Корни различные действительные $k_1 \neq k_2$.	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
Корни действительные равные $k_1 = k_2 = k$	$y = C_1 e^{k x} + C_2 x \cdot e^{k x}$
Корни комплексные $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

16. Корни характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения равны: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Тогда это уравнение имеет вид …

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$
2) $y'' + 2y' + 3y = 0$
3) $y'' - 5y' + 6y = 2x + 3$
4) $y'' + 5y' + 6y = 0$

Решение. Для того, чтобы определить вид уравнения, которому соответствуют корни характеристического уравнения $k_1 = 2$ и $k_2 = 3$, запишем характеристическое уравнение, корнями которого являются эти числа: $(k-2)(k-3) = 0 \Rightarrow k^2 - 5k + 6 = 0$. Тогда линейное однородное уравнение имеет вид: $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Ответ 1)

17. Дано дифференциальное уравнение $(k+2)y'' + (k-3)y' - 4y = (k+1)x^5$. Тогда его порядок равен одному, если значение параметра k равно…

1) -2
3) 0

2) 3 4) -1

Решение. Данное уравнение – уравнение $2^{\text{го}}$ порядка, т. к. порядок старшей производной равен двум. Для того, чтобы данное уравнение имело порядок равный одному слагаемое $(k+2)y''$ должно быть равно нулю. Это возможно, когда $k+2=0 \Rightarrow k=-2$.

Ответ 1)

18. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y''-8y'+12y=2x^2+1$ имеет вид …

1) $y=Ax^2+Bx+C$ 3) $y=x(Ax^2+Bx+C)$

2) $y=x(Ae^{2x}+Be^{6x})(2x^2+1)$ 4) $y=Ae^{2x}+Be^{6x}$

Решение.

Памятка 3.

1) $y''+p\cdot y'+qy=f(x)$

Вид правой части уравнения $f(x)$	Вид частного решения $y_{\text{ч}}$
$f(x)=P_n(x)$, $P_n(x)-$ многочлен степени n	$y_{\text{ч}}=Q_n(x)\cdot x^r$, r – число корней характеристического уравнения равных 0.
$f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$	$y_{\text{ч}}=Q_n(x)\cdot x^r\cdot e^{\alpha x}$, $r-$ количество корней характеристического уравнения равных α.
$f(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$	$y_{\text{ч}}=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)\cdot x^r$, $r-$ число корней характеристического уравнения равных $i\beta$.

Правая часть данного уравнения есть $f(x) = P_2(x) = 2x^2 + 1$ – многочлен $2^{\text{го}}$ порядка, значит частное решение уравнения имеет вид $y_{\text{ч}} = Q_2(x) \cdot x^r$, согласно Памятки 3.

Для определения *r*, составим и решим характеристическое уравнение, соответствующее линейному однородному:

$$y'' - 8y' + 12y = 0$$

$$k^2 - 8k + 12 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 12 = 64 - 48 = 16$$

$$k = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$k_1 = \frac{8+4}{2} = 6\,,\ k_2 = \frac{8-4}{2} = 2\,.$$

Среди полученных корней нулевых значений нет, значит $r = 0$. Тогда $y_{\text{ч}} = Q_2(x) \cdot x^0$, где $Q_2(x)$ – многочлен $2^{\text{го}}$ порядка с неопределенными коэффициентами: $Ax^2 + Bx + C = Q_2(x)$.

Значит, $y_{\text{ч}} = (Ax^2 + Bx + C) \cdot x^0 = Ax^2 + Bx + C$.

Ответ 1)

РЯДЫ

1. Общий член числовой последовательности $a_{n+1} = 2a_n$ и $a_1 = 1$. Тогда a_3 равно …

1) 0,25
2) 2
3) 6
4) 4

Решение. В формуле $a_{n+1} = 2a_n$ полагая $n = 1$, $n = 2$, и учитывая, что $a_1 = 1$, получим:

$$n = 1, \qquad a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 1 = 2;$$

$$n = 2, \qquad a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 2 = 4;$$

Ответ 4)

2. Сходящимся числовым рядом является …

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+10}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-7}{n^2+6n-1}$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{n^3}}$

Решение. 1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+10}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+10} = \infty \neq 0$, то есть необходимый признак сходимости ряда не выполняется.

Остальные ряды для исследования необходимо сравнить с эталонными рядами.

В качестве эталонных рядов выбирают**:**

а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a \neq 0$, сходящийся при $|q| < 1$ и расходящийся при $|q| \geq 1$;

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, сходящийся при $p > 1$ и расходящийся при $p \leq 1$.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-7}{n^2+6n-1}$ расходится, так как при $n\to\infty$

$\frac{n-7}{n^2+6n-1}\sim\frac{n}{n^2}\sim\frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ сходится, так как $p=\frac{5}{2}>1$.

4) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{n^3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/8}}$ расходится, так как $p=\frac{3}{8}<1$.

Ответ 3)

3. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{3^n}$ равен …

1) $\frac{3}{4}$

2) $\frac{4}{3}$

3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Здесь $a_n=\frac{4^n}{3^n}$, $a_{n+1}=\frac{4^{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{4^n 4}{3^n 3}$, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n 3^n 3}{3^n 4^n 4}=\frac{3}{4}$.

Ответ 1)

4. Область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n n^2}{4^n}$ имеет вид …

1) $[-2;6]$

2) $[-2;6)$

3) $(-2;6]$

4) $(-2;6)$

Решение. Исследуем сходимость ряда в точках $x=-2$ и $x=6$.

При $x=-2$ имеем:

$$\frac{(x-2)^n n^2}{4^n}=\frac{(-2-2)^n n^2}{4^n}=\frac{(-4)^n n^2}{4^n}=\frac{(-1)^n 4^n n^2}{4^n}=(-1)^n n^2.$$

В точке $x=-2$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$. Этот ряд знакочередующийся. Для исследования его сходимости применим ***признак Лейбница.***

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, начиная с некоторого номера, монотонно убывают по абсолютной величине ($a_n > a_{n+1}$) и если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится, и его сумма не превосходит первого члена ряда.

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$ условия признака Лейбница не выполняются:

1) каждый последующий член больше предыдущего: $a_n = n$, $a_{n+1}=n+1$ и $a_n < a_{n+1}$ для всех *n*, начиная с $n=1$;

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \ne 0$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$ расходится. Следовательно, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n n^2}{4^n}$ в точке $x=-2$ расходится.

В точке $x=6$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$, так как

$$\frac{(x-2)^n n^2}{4^n}=\frac{(6-2)^n n^2}{4^n}=\frac{4^n n^2}{4^n}=n^2.$$

Общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ не стремится к нулю при $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \neq 0$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ расходится. Следовательно, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n n^2}{4^n}$ в точке $x = 6$ расходится.

Таким образом, точки $x = -2$ и $x = 6$ не входят в область сходимости данного функционального ряда.

Ответ 4)

5. Разложение в ряд Маклорена функции $y(x) = \cos x$ имеет вид: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ Тогда разложением в ряд Маклорена функции $y(x) = \cos 2x$ является …

1) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots.$

2) $1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots.$

3) $2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + \ldots + \frac{(-1)^n 2x^{2n}}{(2n)!} + \ldots.$

4) $1 - x^2 + 4x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n 4^{n-1} x^{2n}}{n!} + \ldots.$

Решение. В стандартном разложении заменяя x на $2x$ и учитывая, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, получим:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{2^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \ldots +$$

$$+ \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots .$$

Ответ 2)

6. Если $f(x) = x^2 - 9$, то коэффициент a_3 разложения данной функции в ряд Тейлора по степеням $(x-3)$ равен …

1) 9	3) 1
2) 6	4) 0

Решение. $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \to a_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{3!}$.

$f(x) = x^2 - 9 \quad \to \quad f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2,$

$f'''(x) = 0, f'''(x_0) = f'''(3) = 0 \quad \to \quad a_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{3!} = \dfrac{0}{3!} = 0.$

Ответ 4)

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

1. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет четное число очков, равна…

1) 1/3	3) 1/6
2) 0,1	4) 1/2

Решение. Всего исходов $n = 6$ $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Благоприятных исходов (четных чисел) $m = 3$ $\{2, 4, 6\}$. Вероятность того, что на верхней грани выпадет четное число очков, равна $P = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Ответ 4)

2. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы этих элементов (в течение рабочего дня) равны соответственно 0,9, 0,8 и 0,7. Тогда вероятность того, что в течение рабочего дня будут работать безотказно все три элемента, равна…

1) 0,504 3) 0,72
2) 0,80 4) 0,56

Решение. P (работают все 3 независимых элемента) =
$= P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504$.

Ответ 1)

3. Два стрелка производят по одному выстрелу. Вероятность попадания в цель для первого и второго стрелков равны 0,7 и 0,85 соответственно. Тогда вероятность того, что в цель попадет только один стрелок, равна …

1) 0,85 2) 0,105 3) 0,255 4) 0,36

Решение. P (попадет только один) = ($1^{й}$попал·$2^{й}$не попал) +
+ ($2^{й}$попал·$1^{й}$не попал) =
$= P_1 \cdot (1 - P_2) + P_2 \cdot (1 - P_1) = 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}85) + 0{,}85 \cdot (1 - 0{,}7) = 0{,}36$.

Ответ 4)

4. Два предприятия производят разнотипную продукцию. Вероятности их банкротства в течение года равны 0,1 и 0,2 соответственно. Тогда вероятность того, что в течение года обанкротится хотя бы одно предприятие, равна…

1) 0,02 3) 0,2
2) 0,72 4) 0,28

Решение. P (хотя бы одно обанкротится) = $1-P$ (ни одно не обанкротится) = $1-(1-0{,}1)\cdot(1-0{,}2)=1-0{,}9\cdot 0{,}8=1-0{,}72=0{,}28$.

Здесь (1-0,1) – это вероятность того, что 1-ое не обанкротится, (1-0,2) – вероятность того, что 2-ое не обанкротится.

Ответ 4)

5. С первого станка на сборку поступает 45%, со второго – 55% всех деталей. Среди деталей первого станка 90% стандартных, второго – 80%. Тогда вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется нестандартной, равна …

1) 0,15 2) 0,845 3) 0,155 4) 0,325

Решение. P (деталь стандартная) = P (дет. с $1^{\text{го}}$ станка)$\cdot$ P (стандарт. с $1^{\text{го}}$ станка) + P (дет. со $2^{\text{го}}$ станка)$\cdot$ P (стандарт. со $2^{\text{го}}$ станка) = $\frac{45\%}{100\%}\cdot\frac{90\%}{100\%}+\frac{55\%}{100\%}\cdot\frac{80\%}{100\%}=0{,}405+0{,}44=0{,}845$.

P (деталь не стандартная) = 1 − P (деталь стандартная) =
= $1-0{,}845=0{,}155$.

Ответ 3)

6. В первой урне 3 черных и 7 белых шаров. Во второй урне 4 белых и 6 черных шаров. В третьей урне 11 белых и 9 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна…

1) 11/15 3) 9/20
2) 11/20 4) 11/40

Решение. Вероятность каждой урны $\frac{1}{3}$. P (белый шар в $1^{\text{ой}}$ урне) = $\frac{7}{10}$.

P (белый шар во $2^{\text{ой}}$ урне) = $\frac{4}{10}$. P (белый шар в $3^{\text{ей}}$ урне) = $\frac{11}{20}$.

P (взят белый шар) = $\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{11}{20}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{7}{10}+\frac{4}{10}+\frac{11}{20}\right)=$

$= \dfrac{33}{3\cdot 20} = \dfrac{11}{20}$.

Ответ 2)

7. В первой урне 6 черных и 4 белых шара. Во второй урне 2 белых и 18 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар, который оказался белым. Тогда вероятность того, что этот шар извлечен из первой урны, равна…

1) 0,4 2) 0,2 3) 0,8 4) 0,25

Решение. Вероятность каждой урны $\dfrac{1}{2}$;

P (белый в 1ой урне) $=\dfrac{4}{10}$; P (белый во 2ой урне) $= \dfrac{2}{20}$.

P (взят белый из 1ой урны) $= \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{20}} = \dfrac{4/10}{10/20} = 0{,}8$.

Ответ 3)

8. Дискретная случайная величина задана законом распределения вероятностей

X	1	2	4	5
P	0,2	0,1	a	$в$

Тогда значения a и $в$ могут быть равны…

1) $a = 0{,}7$, $в = 0{,}7$ 3) $a = 0{,}2$, $в = 0{,}1$

2) $a = 0{,}4$, $в = 0{,}3$ 4) $a = 0{,}4$, $в = 0{,}2$

Решение. $\sum P_i = 0{,}2 + 0{,}1 + a + b = 1 \Rightarrow a + b = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$, т. е. $a = 0{,}4$ и $b = 0{,}3$.

Ответ 2)

9. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	-1	2	4
P	0,3	0,1	0,6

Тогда ее математическое ожидание равно…

1) 2,9

2) 5/3

3) 4

4) 2,3

Решение. Математическое ожидание

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = -1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}6 = -0{,}3 + 0{,}2 + 2{,}4 = 2{,}3 .$$

Ответ 4)

10. Дискретная случайная величина задана законом распределения вероятностей

X	1	3	5
P	0,1	0,3	0,6

Тогда ее функция распределения вероятностей имеет вид…

1) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ 0{,}3 & \text{при } 1 < x \le 3, \\ 0{,}6 & \text{при } 3 < x \le 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$

2) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ 0{,}1 & \text{при } 1 < x \le 3, \\ 0{,}3 & \text{при } 3 < x \le 5, \\ 0{,}6 & \text{при } x > 5. \end{cases}$

3) $F(x) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{при } x \le 1, \\ 0{,}4 & \text{при } 1 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } 3 < x \le 5, \\ 0 & \text{при } x > 5. \end{cases}$

4) $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x \le 1, \\ 0{,}1 \ \text{при } 1 < x \le 3, \\ 0{,}4 \ \text{при } 3 < x \le 5, \\ 1 \quad \text{при } x > 5. \end{cases}$

Решение. При $x \le 1$ $\qquad F(x)=0$

$1 < x \le 3$ $\qquad F(x)=0{,}1$

$3 \le x \le 5$ $\qquad F(x)=0{,}1+0{,}3=0{,}4$

$x > 5$ $\qquad F(x)=0{,}1+0{,}3+0{,}6=1$.

Ответ 4)

11. Даны две независимые дискретные случайные величины X и Y:

X	1	2
P	0,2	0,8

X	3	5
P	0,4	0,6

Тогда закон распределения вероятностей суммы $X+Y$ имеет вид…

1)

$X+Y$	4	5	6	7
P	0,08	0,32	0,12	0,48

2)

$X+Y$	1	2	3	5
P	0,08	0,32	0,12	0,48

3)

$X+Y$	4	7
P	0,3	0,7

4)

$X+Y$	4	5	6	7
P	0,2	0,8	0,4	0,6

Решение. Если закон, то $\sum P_i = 1$. Значения $(X+У) = \{1+3;\ 2+3;\ 1+5;\ 2+5\} = \{4;\ 5;\ 6;\ 7\}$.

$X+У$	4	5	6	7
P	0,08	0,32	0,12	0,48

$\Rightarrow \sum P_i = 1$.

Ответ 2)

12. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Тогда вероятность $P(-0{,}5 < X < 1{,}5)$ равна…

1) $\dfrac{3}{8}$ 3) $\dfrac{9}{16}$

2) $\dfrac{1}{2}$ 4) $\dfrac{5}{8}$

Решение. $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$

$$P(-0{,}5 < x < 1{,}5) = F(1{,}5) - F(-0{,}5) = \frac{(1{,}5)^2}{4} - 0 = \frac{2{,}25}{4} = \frac{5}{8}.$$

Ответ 4)

13. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ Cx & \text{при } 0 < x < 4, \\ 0 & \text{при } x \ge 4. \end{cases}$$

Тогда значение C равно…

1) 1/16 3) 1/4
2) 1/8 4) 1/2

Решение. $\int\limits_0^4 cx\,dx = 1 \Rightarrow c\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = c\cdot\frac{16}{2} = 8\,c = 1 \qquad c = 1/8$.

Ответ 2)

14. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{при } 0 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Тогда плотность распределения вероятностей имеет вид…

1) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{2x}{9} & \text{при } 0 < x \le 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^3}{27} & \text{при } 0 < x \le 3, \\ x & \text{при } x > 3. \end{cases}$

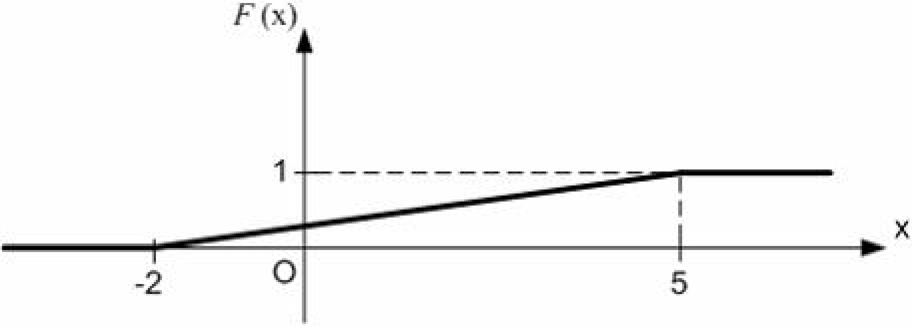
2) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{2x}{9} & \text{при } 0 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{2x}{9} & \text{при } 0 < x \le 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$

Решение. $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ \dfrac{2x}{9} & 0 < x < 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$

Ответ 1)

15. Функция распределения вероятностей равномерно распределенной случайной величины изображена на рисунке:



Тогда ее математическое ожидание равно…

1) 2,5
3) 3,5
2) 1,5
4) 49/12

Решение. Для равномерного закона $m_x = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{-2+5}{2} = 1{,}5$,

где $a = -2$; $b = 5$.

Ответ 2)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1. Размах варьирования вариационного ряда 3, 5, 5, 7, 9, 10, 16 равен …

1) 7
3) 13
2) 16
4) 6,5

Решение. $\Delta = n_{max} - n_{min} = 16 - 3 = 13$.
Ответ 3)

2. Мода вариационного ряда 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4 равна ….

1) 2 3) 3
2) 1 4) 4

Решение. Мода M_0 – это наибольшая частота, она равна $M_0 = 4$.
Ответ 4)

3. Медиана вариационного ряда 3, 4, 5, 6, 7, 12 равна …

1) 5,5 3) 5
2) 7,5 4) 6

Решение. Медиана M_e– это центр ряда. Так как объем ряда равен 6, то $M_e = \frac{n_3 + n_4}{2} = \frac{5+6}{2} = 5{,}5$.
Ответ 1)

4. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 100$:

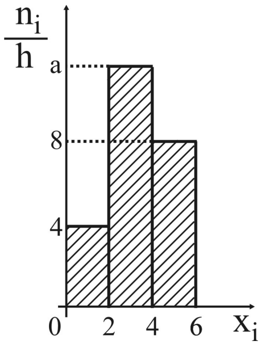
x_i	1	3	5	7
n_i	15	16	17	n_4

Тогда значение n_4 равно …

1) 52 3) 51
2) 18 4) 100

Решение. Так как $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$, то $n_4 = 100 - 15 - 16 - 17 = 52$.
Ответ 1)

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$, гистограмма частот которой имеет вид:



Тогда значение a равно …

1) 13
3) 24
2) 11
4) 38

Решение. $\frac{n_1}{2} = 4$; $\frac{n_2}{2} = a$; $\frac{n_3}{2} = 8 \Rightarrow n_1 = 8; n_2 = 2a; n_3 = 16.$

$8 + 2a + 16 = 50$, где 50 – объем выборки, тогда

$a = \frac{50 - 8 - 16}{2} = 13$.

Ответ 1)

6. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 20$:

x_i	3	4	6	9
n_i	2	4	7	7

Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна …

1) 6,35
3) 5
2) 5,5
4) 5,95

Решение.

$$M = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + x_4n_4}{n} = \frac{2\cdot 3 + 4\cdot 4 + 7\cdot 6 + 7\cdot 9}{20} =$$

$$= \frac{6+16+42+63}{20} = 6{,}35.$$

Ответ 1)

7. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 8,10,12. Тогда несмещенная оценка дисперсии равна …

1) 2
2) 10
3) 8
4) 4

Решение. $M_3 = \dfrac{8+10+12}{3} = 10$

$$D_3 = \frac{(8-10)^2 + (10-10)^2 + (12-10)^2}{2} = \frac{4+0+4}{2} = 4\,.$$

Ответ 4)

8. Проведено четыре измерения (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 10, 11, 12, 15. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна …

1) 11,75
2) 12
3) 11,5
4) 12,5

Решение. $M_4 = \dfrac{10+11+12+15}{4} = 12.$

Ответ 2)

9. Дана интервальная оценка (8,45; 9,15) математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда точечная оценка математического ожидания равна …

1) 9,0
2) 8,8
3) 8,75
4) 0,35

Решение. Математическое ожидание совпадает с центром доверительного интервала, тогда

$$M_n = 8.45 + \frac{9.15 - 8.45}{2} = 8.45 + \frac{0.7}{2} = 8.45 + 0.35 = 8.8$$

Ответ 2)

10. Точечная оценка математического ожидания нормально распределенного количественного признака равна 21,5. Тогда его интервальная оценка может иметь вид …

1) (21,5; 22,95)
2) (20,05; 21,5)
3) (20,85; 21,85)
4) (20,05; 22,95)

Решение. Математическое ожидание совпадает с центром доверительного интервала, тогда

$$(21.5 - \frac{n_{max} - n_{min}}{2},\ 21.5 + \frac{n_{max} - n_{min}}{2}).$$

Если $\frac{n_{max} - n_{min}}{2} = \frac{22,95 - 20,05}{2} = 1,45$, тогда

$$(21.5 - 1.45,\ 21.5 + 1.45) = (20.05,\ 22.95)$$

Ответ 4)

11. Дана интервальная оценка (10,45; 11,55) математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда точность этой оценки равна …

1) 1,1
2) 0,55
3) 11,0
4) 0,05

Решение. Точность оценки математического ожидания равна

$$\frac{n_{max} - n_{min}}{2} = \frac{11,55 - 10,45}{2} = \frac{1,1}{2} = 0,55.$$

Ответ 2)

12. При построении выборочного уравнения парной регрессии вычислены: выборочный коэффициент корреляции $r_B = 0.75$ и выборочные средние квадратичные отклонения $\sigma_X = 1.1, \ \sigma_Y = 2.2$. тогда выборочный коэффициент регрессии Y на X равен …

1) 1,50 3) 1,815
2) 0,375 4) -1,50

Решение. Выборочный коэффициент регрессии Y на X равен

$$r_B \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = 0.75 \cdot \frac{2.2}{1.1} = 0.75 \cdot 2 = 1.5$$

Ответ 1)

13. Выборочное уравнение парной регрессии имеет вид $y = 6 - 3x$. Тогда выборочный коэффициент корреляции может быть равен …

1) 6,0 3) 0,9
2) -3,0 4) -0,9

Решение. Выборочный коэффициент корреляции определен в интервале $-1 \le r_B \le 1$. В уравнении парной регрессии коэффициент регрессии отрицателен (он равен -3), тогда в предложенных ответах подходящим является $r_B = -0,9$.

Ответ 4)

14. Левосторонняя критическая область может определяться из соотношения …

1) $P(K < -1.5) + P(K > 1.5) = 0.05$ 3) $P(-2,2 < K < 2.2) = 0.95$
2) $P(K < -1,92) = 0.05$ 4) $P(K > 2.45) = 0.05$

Решение. Левосторонняя критическая область определяется из $P(K < -1,92) = 0.05$.

Ответ 2)

15. Соотношение вида $P(K < -1.88) + P(K > 1.88) = 0.05$ может определить …

1) правостороннюю критическую область
2) область принятия гипотезы
3) двустороннюю критическую область
4) левостороннюю критическую область.

Решение. Соотношение $P(K < -1.88) + P(K > 1.88) = 0.05$ определяет двустороннюю критическую область.

Ответ 3)

16. Основная гипотеза имеет вид $H_0 : \sigma^2 = 4$. Тогда конкурирующей может являться гипотеза …

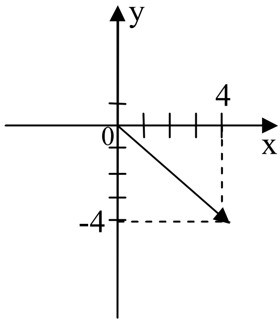
1) $H_0 : \sigma^2 \le 4$
2) $H_0 : \sigma^2 \ge 4$
3) $H_0 : \sigma^2 > 3$
4) $H_0 : \sigma^2 > 4$

Решение. Основная и конкурирующая гипотезы определяют полную группу событий, т.е. $\sigma^2_{осн} + \sigma^2_{кон} = \Omega$, то есть для основной гипотезы вида $\sigma^2 = \sigma_0$ конкурирующая гипотеза может быть записана в одном из видов: $\sigma^2 > \sigma_0$, $\sigma^2 < \sigma_0$, $\sigma^2 \ne \sigma_0$. Тогда конкурирующая гипотеза $\sigma^2_{кон} > 4$.

Ответ 4)

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

1.



На рисунке приведено геометрическое изображение комплексного числа. Его тригонометрическая форма записи имеет вид…

1) $4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

3) $4\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) $4\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

4) $4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Решение. Тригонометрическая форма записи комплексного числа $z=x+iy$ имеет вид: $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, а $\varphi=\arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $-\pi<\varphi\le\pi$. Найдем $|z|$ и φ: $|z|=\sqrt{4^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$. Т.к. комплексное число находится в четвертой координатной четверти, то $\varphi=-\operatorname{arctg}\left|\frac{y}{x}\right|=-\operatorname{arctg}\left|\frac{-4}{4}\right|=-\operatorname{arctg}1=-\frac{\pi}{4}$.

Т.о. $z = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Ответ 2)

2. Комплексное число $1-\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме имеет вид…

1) $2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

3) $2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

2) $2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

4) $2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Решение. Тригонометрическая форма записи комплексного числа $z = x + iy$ имеет вид: $z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $-\pi < \varphi \le \pi$.

1) Найдем $|z|$: $x = 1$, $y = -\sqrt{3}$, тогда $|z| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

2) Найдем φ: Так как $x > 0$, а $y < 0$, комплексное число лежит в четвертой координатной четверти, тогда φ найдем по формуле $\varphi = -\operatorname{arctg}\left|\frac{y}{x}\right| = -\operatorname{arctg}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

3) Подставим найденные $|z|$ и φ для данного комплексного числа в тригонометрическую форму записи: $z = 2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Ответ 2)

3. Модуль комплексного числа $2+4i$ равен…

1) 2

3) $2\sqrt{5}$

2) 20 4) $\sqrt{5}$

Решение. Модуль комплексного числа $z = x + iy$ находится по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. $|z| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

Ответ 3)

4. Суммой двух комплексных чисел $2 + 3i$ и $7 - 4i$ является…

1) $5 - 7i$ 3) $9 - i$

2) $9 + i$ 4) $-5 + 7i$

Решение. Складываем

$2 + 3i + 7 - 4i = 2 + 7 + 3i - 4i = 2 + 7 + i(3 - 4) = 9 - i$.

Ответ 3)

5. Найти значение выражения $(7 + i)(2 - i)$.

1) $15 + 5i$ 3) $13 - 5i$

2) $13 + 5i$ 4) $15 - 5i$

Решение. Перемножаем, учитывая, что $i^2 = -1$

$(7 + i)(2 - i) = 7 \cdot 2 - 7i + 2i - i^2 = 14 - 5i + 1 = 15 - 5i$

Ответ 4)

6. Пусть $z = 1 + i$. Известно, что $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$, тогда $(1 + i)^4$ равно…

1) -4 3) $2\sqrt{2}$

2) 4 4) $-2\sqrt{2}$

Решение.

1) Запишем комплексное число в тригонометрической форме $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi = \arg z$: $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2) Применим формулу $z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$:

$$z = \left(\sqrt{2}\right)^4 \left(\cos 4\cdot\frac{\pi}{4} + i\sin 4\cdot\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z = 4\cdot(\cos\pi + i\sin\pi) = 4\cdot(-1 + i\cdot 0) = -4 .$$

Ответ 1)

7. Найти значение выражения $\dfrac{e-i}{2+4i}$.

1) $\dfrac{2+e}{6} - i\cdot\dfrac{2e-1}{6}$

2) $\dfrac{2-e}{6} - i\cdot\dfrac{2e+1}{6}$

3) $\dfrac{e-2}{10} - i\cdot\dfrac{2e+1}{10}$

4) $\dfrac{e+2}{10} - i\cdot\dfrac{2e+1}{10}$

Решение. Преобразуем данное комплексное число к виду $z = x + iy$, для этого умножим и поделим на сопряженное знаменателю комплексное число $2-4i$: $\dfrac{e-i}{2+4i} = \dfrac{(e-i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = \dfrac{2e-4ei-2i+4i^2}{2\cdot 2-2\cdot 4i+2\cdot 4i-16i^2}$, учитывая, что $i^2 = -1$, получим $\dfrac{e-i}{2+4i} = \dfrac{2e-4-i(4e+2)}{20} = \dfrac{e-2}{10} - i\dfrac{2e+1}{10}$.

Ответ 3)

8. Результатом деления комплексного числа $7-7i$ на комплексное число $2i$ является…

1) $-\dfrac{7}{2} - \dfrac{7}{2}i$

2) $-\dfrac{7}{2} + 7i$

3) $\dfrac{7}{2} - \dfrac{7}{2}i$

4) $\dfrac{7}{2} + 7i$

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{7-7i}{2i}$ на сопряженное знаменателю комплексное число $-2i$: $\dfrac{7-7i}{2i} = \dfrac{(7-7i)(-2i)}{2i\cdot(-2i)} = \dfrac{-14i+14i^2}{-4i^2}$, т.к. $i^2=-1$, получим $\dfrac{-14i+14\cdot(-1)}{-4\cdot(-1)} = \dfrac{-14i}{4} - \dfrac{14}{4} = -\dfrac{7}{2} - \dfrac{7}{2}i$.

Ответ 1)

9. Дана функция $f(z) = \dfrac{e^{z+2}}{i}$. Тогда $f(i\dfrac{\pi}{2})$ равно…

1) e^2
3) $-e^2$
2) $-ie^2$
4) ie^2

Решение. 1) Подставим в функцию число $i\dfrac{\pi}{2}$:

$$f(i\frac{\pi}{2}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}+2}}{i} = \frac{e^2 e^{i\frac{\pi}{2}}}{i}.$$

2) Воспользуемся формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$:

$$f(i\frac{\pi}{2}) = \frac{e^2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{i} = \frac{e^2(0+i)}{i} = e^2.$$

Ответ 1)

10. Дана функция $f(z) = x^2 + y^2 i$, где $z = x + iy$. Тогда $f(1+2i)$ равно…

1) $1+4i$
3) $1+2i$
2) $1-4i$
4) $1+16i$

Решение. Т.к. $z = 1+2i$, то $x=1$, $y=2$.

Т.о. $f(1+2i)=1^2+2^2 i=1+4i$

Ответ 1)

11. Мнимая часть функции $f(z)=e^{3z}$, где $z=x+iy$, имеет вид…

1) $e^{3x}\cdot\sin y$
2) $e^{3x}\cdot\cos y$
3) $e^{3x}\cdot\cos 3y$
4) $e^{3x}\cdot\sin 3y$

Решение. Отделим вещественную u и мнимую v части функции $f(x+iy)=u+iv$: $f(x+iy)=e^{3(x+iy)}=e^{3x}e^{i3y}$. Преобразуем второй множитель, используя формулу Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$:

$f(x+iy)=e^{3x}e^{i3y}=e^{3x}(\cos 3y+i\sin 3y)=e^{3x}\cos 3y+ie^{3x}\sin 3y.$

Т.о. мнимая часть функции $v=e^{3x}\sin 3y$.

Ответ 4)

12. Действительная часть функции $f(z)=(x+iy)^2+4i$, где $z=x+iy$, имеет вид…

1) $-2xy+4$
2) x^2-y^2
3) $2xy+4$
4) x^2+y^2

Решение. Отделим вещественную u и мнимую v части функции $f(x+iy)=u+iv$:

$f(z)=(x+iy)^2+4i=x^2+2ixy+i^2y^2+4i$.

Т.к. $i^2=-1$, то $f(z)=x^2-y^2+i(2xy+4)$. Т.о. вещественная часть функции $u=x^2-y^2$.

Ответ 2)

13. Пусть $f(z)=\dfrac{4}{i+1}\cdot z^2$, тогда $f'(1-i)$ равно…

1) $8-8i$
3) $8+8i$

2) $-8i$ 4) $8i$

Решение. 1)Найдем $f'(z)$, учитывая, что $\frac{4}{i+1}$ является константой: $f'(z)=\left(\frac{4}{i+1}\cdot z^2\right)' = \frac{4}{i+1}\cdot\left(z^2\right)' = \frac{4}{i+1}\cdot 2z = \frac{8z}{i+1}$.

Тогда $f'(1-i)=\frac{8(1-i)}{1+i}$.

2) Преобразуем комплексное число к виду $z=x+iy$, для этого умножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное знаменателю комплексное число $1-i$:

$\frac{8(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{8\left(1-2i+i^2\right)}{1-i^2}$. Т.к. $i^2=-1$, получим

$f'(1-i)=\frac{-2i\cdot 8}{2}=-8i$.

Ответ 2)

14. Значение производной функции $f(z)=e^{2z}$ в точке $z_0=i\frac{\pi}{2}$ равно…

1) -1 3) -2

2) 2 4) 1

Решение. 1) Найдем производную:

$f'(z)=\left(e^{2z}\right)' = e^{2z}\cdot(2z)' = 2e^{2z}$.

2) Подставим в производную $z_0=i\frac{\pi}{2}$:

$f'\left(i\frac{\pi}{2}\right)=2e^{2\cdot i\frac{\pi}{2}}=2e^{i\pi}$.

3) Применим формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$:

$$f'\left(i\frac{\pi}{2}\right) = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2(-1 + i\cdot 0) = -2.$$

Ответ 3)

15. Если $z = x + iy$ и $f(z) = e^{4z}$, то $f'(z)$ имеет вид…

1) $4\cdot e^{4x}(\cos 4y + i\sin 4y)$

2) $e^{4x}(\sin 4y + i\cos 4y)$

3) $4\cdot e^{4x}(\sin 4y + i\cos 4y)$

4) $e^{4x}(\cos 4y + i\sin 4y)$

Решение. 1) Найдем производную:

$f'(z) = \left(e^{4z}\right)' = e^{4z}\cdot(4z)' = 4e^{4z}$. Тогда

$f'(x+iy) = 4e^{4(x+iy)} = 4e^{4x}e^{i4y}$.

2) Применим формулу Эйлера ко второму множителю

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$: $f'(z) = 4e^{4x}(\cos 4y + i\sin 4y)$.

Ответ 1)

АБСТРАКТНАЯ АЛГЕБРА

1. Дано множество всех чисел вида $a + b\sqrt{7}$, где $a, b \in R$. Тогда обратным элементом относительно обычной операции умножения для элемента $1 - 2\sqrt{7}$ является элемент

1) $-1 + 2\sqrt{7}$

2) $\frac{1}{29} + \frac{2}{29}\cdot\sqrt{7}$

3) $1 + 2\sqrt{7}$

4) $-\frac{1}{27} - \frac{2}{27}\cdot\sqrt{7}$

Решение.

$$\frac{1}{1-2\sqrt{7}}=\frac{1+2\sqrt{7}}{\left(1-2\sqrt{7}\right)\left(1+2\sqrt{7}\right)}=\frac{1+2\sqrt{7}}{1-4\cdot 7}=\frac{1+2\sqrt{7}}{-27}=-\frac{1}{27}-\frac{2}{27}\sqrt{7}\,.$$

Ответ 4)

2. Дано множество вырожденных матриц 2 порядка. Тогда алгебраическими действиями всегда выполнимыми на данном множестве являются…

1) сложение и умножение
2) вычитание и деление
3) деление и умножение
4) сложение и деление

Решение. Дано множество вырожденных матриц 2 порядка. Тогда алгебраическими действиями всегда выполнимыми на данном множестве являются сложение и умножение, т. к. вырожденные матрицы не имеют обратных матриц.

Ответ 1)

3. Свойством коммутативности обладает операция…

1) композиция элементарных функций
2) возведение в степень на множестве N
3) умножение матриц порядка 2
4) пересечение множеств

Решение. Свойством коммутативности обладает операция пересечения множеств, т. к.

$$A\bigcap B=B\bigcap A$$

Ответ 4)

4. На множестве элементарных функций, определенных на множестве действительных чисел, задана операция композиции элементарных функций. Тогда свойство коммутативности $f(g(x)) = g(f(x))$ выполняется для функций…

1) $f(x)=\ln x$, $g(x)=e^x$
2) $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$
3) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$
4) $f(x)=\cos x$, $g(x)=\arccos x$

Решение. На множестве элементарных функций, определенных на множестве действительных чисел, задана операция композиции элементарных функций. Тогда свойство коммутативности $f(g(x)) = g(f(x))$ выполняется для функций $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt[3]{x}$.

В случае композиции элементарных функций $f(g(x))$ или $g(f(x))$ свойство коммутативности $f(g(x)) = g(f(x))$ выполняется для взаимно обратных функций. На множестве всех действительных чисел определены следующие взаимно обратные функции

$f(x) = x^3, g(x) = \sqrt[3]{x}$

Ответ 2)

5. Операция деления определена для всех ненулевых элементов множества…

1) вырожденных матриц 2 порядка
2) натуральных чисел
3) рациональных чисел
4) всех многочленов меньше, чем n

Решение. Операция деления определена для всех ненулевых элементов множеств

1) рациональных чисел
2) всех многочленов степени меньше, чем n.

Т. к. в результате деления элементов из этих множеств получаем элемент того же множества.

Ответ 3), 4)

6. Условию ассоциативности удовлетворяют операции

1) разности и объединения
2) объединения и пересечения
3) дополнения и разности
4) дополнения и пересечения

множеств…

Решение. Для чисел условию ассоциативности удовлетворяют операции сложения и умножения:

$(a+b)+c=a+(b+c)$,

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

Так как операция объединения множеств – это аналог сложения, а операция пересечения множеств – это аналог умножения, то условию ассоциативности удовлетворяют операции объединения и пересечения множеств.

Ответ 2)

7. Дано линейное пространство векторов $x=x_1\cdot e_1+x_2\cdot e_2$, где $x_1,x_2\in R$. Тогда линейным является отображение $\varphi(x)$, задаваемое соотношением…

1) $x_2\cdot e_1+x_1\cdot e_2$

2) $(x_1+2)\cdot e_1+x_2\cdot e_2$

3) $x_2\cdot e_1+x_1\cdot x_2\cdot e_2$

4) $x_1^2\cdot e_1+x_2^2\cdot e_2$

Решение. Линейным будет являться такое отображение, в котором коэффициенты при e_1 и e_2 представлены в виде линейной комбинации x_1 и x_2, то есть в виде ax_1+bx_2, где a и b - некоторые числа.

1)В отображении $\varphi(x)=x_2e_1+x_1e_2$

коэффициент $x_2=0\cdot x_1+1\cdot x_2$ - линейная комбинация,

коэффициент $x_1=1\cdot x_1+0\cdot x_2$ - линейная комбинация.

Таким образом, $\varphi(x)=x_2e_1+x_1e_2$ - линейное отображение.

2)В отображении $\varphi(x)=(x_1+2)\cdot e_1+x_2\cdot e_2$ коэффициент $x_1+2=1\cdot x_1+0\cdot x_2+2\neq ax_1+bx_2$, то есть не является линейной комбинацией. Таким образом, $\varphi(x)=(x_1+2)\cdot e_1+x_2\cdot e_2$ - не линейное отображение.

3)В отображении $\varphi(x)=x_2\cdot e_1+x_1\cdot x_2\cdot e_2$ коэффициент $x_1\cdot x_2\neq ax_1+bx_2$, то есть не является линейной комбинацией.

Таким образом, $\varphi(x) = x_2 \cdot e_1 + x_1 \cdot x_2 \cdot e_2$ - не линейное отображение.

4)В отображении $\varphi(x) = x_1^2 \cdot e_1 + x_2^2 \cdot e_2$ коэффициенты $x_1^2 \neq ax_1 + bx_2$ и $x_2^2 \neq ax_1 + bx_2$, то есть не являются линейными комбинациями. Таким образом $\varphi(x) = x_1^2 \cdot e_1 + x_2^2 \cdot e_2$ - не линейное отображение.

Ответ 1)

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Произведение значений параметра a, при которых период функции $y = \sin^2(a^2 - 4a - 21)x$ равен $\frac{\pi}{24}$, равно …

1) 1
2) –135
3) 3
4) –45

Решение. Известно, что если $f(x)$ – периодическая функция с периодом T, то функция $f(bx + c)$, где $b > 0$, тоже периодическая с периодом $\frac{T}{b}$.

Так как π – период функции $y = \sin^2 x$, то период функции $y = \sin^2(a^2 - 4a - 21)x$ равен $\frac{\pi}{a^2 - 4a - 21}$.

По условию

$$\frac{\pi}{a^2 - 4a - 21} = \frac{\pi}{24} \quad \Rightarrow a^2 - 4a - 21 = 24 \Rightarrow a^2 - 4a - 45 = 0.$$

Корни этого уравнения $a_1 = -5$, $a_2 = 9$. Тогда $a_1 \cdot a_2 = -45$.

Ответ 4)

2. Если функция $f(x)$ имеет наименьший период T, то периодом этой функции не является число …

1) $T/2$
2) $2T$
3) $-3T$
4) $15T$

Решение. Так как $T/2 \neq kT$, где $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, то и не может быть периодом функции.

Ответ 1)

3. Если функция $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ описывает гармоническое колебательное движение, то частотой колебания называется величина …

1) A
2) $\omega x + \varphi$
3) φ
4) ω

Решение. Частоту колебания обозначают ω.

Ответ 4)

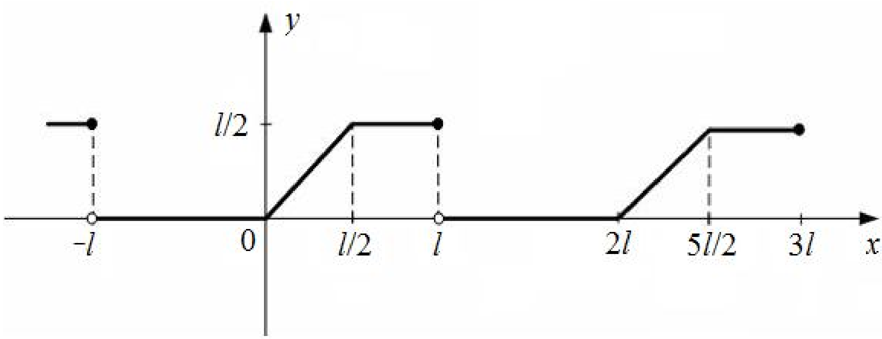
4. Пусть $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ – гармоника. Сумма нескольких гармоник с различными частотами, находящимися в рациональном отношении, является функцией …

1) непериодической
2) общего вида
3) линейной
4) периодической

Решение. Сумма периодических функций – тоже периодическая.

Ответ 4)

5. На рисунке изображен график периодической функции $y = f(x)$.



Ее аналитическое представление на промежутке $(-l, l]$ имеет вид …

1) $f(x)=\begin{cases} 0, & -l \le x \le 0, \\ 2x, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2}, \\ l, & \dfrac{l}{2} \le x \le 2l. \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} 0, & -l \le x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2}, \\ l, & \dfrac{l}{2} \le x \le l. \end{cases}$

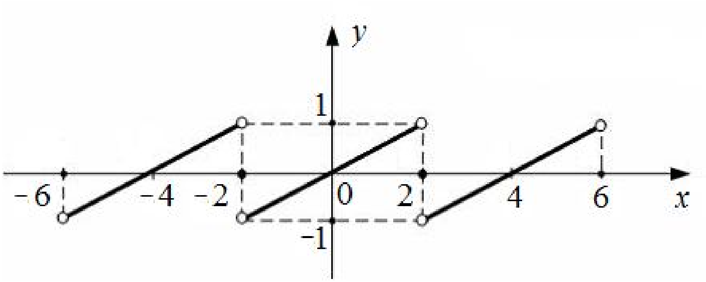
2) $f(x)=\begin{cases} 0, & -l < x \le 0, \\ 2x, & 0 < x < \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{l}{2}, & \dfrac{l}{2} \le x \le l. \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} 0, & -l < x \le 0, \\ x, & 0 < x < \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{l}{2}, & \dfrac{l}{2} \le x \le l. \end{cases}$

Решение. Из графика видно, что на интервале $(0,\ l/2)$ функция задана уравнением $y = x$, а это соответствует только уравнению 4).

Ответ 4)

6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)\,(-2 < x < 2)$ с ее периодическим продолжением.



Периодическое продолжение является …

1) нечетной функцией с наименьшим периодом 2

2) четной функцией с наименьшим периодом 2

3) четной функцией с наименьшим периодом 4

4) нечетной функцией с наименьшим периодом 4

Решение. Функция является нечетной т.к. на интервале (-2,2) график функции симметричен относительно начала координат т.е. f(x) = f(-x). Все значения функции повторяются с периодом равным 4 т.е. f(x) = f(x+4)

Ответ 4)

7. Ряд Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом $2l$, определенной на отрезке $[-l,l]$, имеет вид …

1) $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}+b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$ 3) $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{kx}{l}+b_k \sin\frac{kx}{l}$

2) $a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}+b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$ 4) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}+b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$

Решение. Формула для ряда Фурье имеет вид: $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}+b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$.

Ответ 1)

8. Коэффициент b_2 ряда Фурье функции $f(x) = \arcsin(\cos x)$ с периодом 2π равен …

1) 0 3) $2/\pi$

2) π 4) $1/\pi$

Решение.

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx, \quad m = 1, 2, 3, \ldots; \; b_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \arcsin(\cos x)\sin 2xdx = 0,$$

так как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку $[-a, a]$ равен нулю.

Ответ 1)

9. Коэффициент a_0 ряда Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом $2l$, заданной на интервале $(0, 2l)$ соотношением

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{при} \quad 0 < x < l, \\ 0, & \text{при} \quad l < x < 2l, \end{cases}$$ равен …

1) A 3) $A \cdot l$

2) 0 4) $2A \cdot l$

Решение. $a_m = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos mxdx, \quad m = 0, 1, 2, \ldots;$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos 0dx = \frac{1}{l}\int_0^{l} A\cos 0dx + \frac{1}{l}\int_l^{2l} 0\cos 0dx = \frac{1}{l}\int_0^{l} Adx + 0 = \frac{1}{l}A \cdot l = A.$$

Ответ 1)

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Высказывание: «Если студент не занимается, то он не сдаст экзамен», может быть записано логической формулой …

1) $\overline{A \sim B}$ 3) $\overline{A} \sim \overline{B}$

2) $\overline{A} \to \overline{B}$ 4) $\overline{A \to B}$

Решение. A – это высказывание «Студент занимается». Его отрицанием является высказывание $\overline{A}$ - «Студент не занимается». B - это высказывание «Он сдаст экзамен», тогда $\overline{B}$ - «Он не сдаст экзамен».

Союз «если…, то…» задаёт логическую операцию импликации, которая обозначается →. Таким образом, высказывание «Если студент не занимается, то он не сдаст экзамен» записывается формулой $\overline{A} \to \overline{B}$.

Ответ 2)

2. Логическая операция $x \sim y$ равносильна формуле …

1) $(x \vee y) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y})$ 3) $\overline{x}y \vee x\overline{y}$

2) $xy \vee \overline{x} \cdot \overline{y}$ 4) $\overline{x} \vee y$

Решение. Для следующих логических операций справедливы формулы:

$x \oplus y = x\overline{y} \vee \overline{x}y$,

$x \to y = \overline{x} \vee y$,

$x \sim y = xy \vee \overline{x}\overline{y}$.

Ответ 2)

3. Даны два простых высказывания:

A – «Сегодня на ужин будет суп»,

B – «Сегодня на ужин будет пюре».

Тогда логической формулой $A \vee B$ записывается выражение …

1)«Если сегодня на ужин будет суп, то будет и пюре»
2)«Сегодня на ужин будет суп и пюре»
3)«Сегодня на ужин будет суп или пюре»
4)«Сегодня на ужин будет суп только вместе с пюре»

Решение. Логическая операция дизъюнкции, обозначаемая $\vee$, задается союзом «или». Следовательно, $A \vee B$ - это выражение «Сегодня на ужин будет суп или пюре».

Ответ 3)

4. Даны множества $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{m, n\}$, $M_3 = \{e, f\}$. Тогда множество
$M = \{(1,e,m\};(1,e,n);(1,f,m);(1,f,n);(2,e,m);(2,e,n);(2,f,m);2,f,n)\}$
является прямым произведением …

1) $M_2 \times M_1 \times M_3$
2) $M_2 \times M_3 \times M_1$
3) $M_1 \times M_3 \times M_2$
4) $M_1 \times M_2 \times M_3$

Решение. Так как в каждой тройке элементов множества M на первом месте стоит элемент из M_1, на втором – элемент из M_3, на третьем – элемент из M_2, следовательно $M = M_1 \times M_3 \times M_2$.

Ответ 3)

5. Даны множества $M_1 = \{d, e\}$, $M_2 = \{1, 3\}$, $M_3 = \{b, y\}$. Тогда прямым произведением $M_2 \times M_3 \times M_1$ является множество...

1)
$\{(b, 1, d); (b, 1, e); (b, 3, d); (b, 3, e); (y, 1, d); (y, 1, e); (y, 3, d); (y, 3, e)\}$
2)
$\{(b, d, 1); (b, d, 3); (b, e, 1); (b, e, 3); (y, d, 1); (y, d, 3); (y, e, 1); (y, e, 3)\}$
3)
$\{(1, b, d); (1, b, e); (1, y, d); (1, y, e); (3, b, d); (3, b, e); (3, y, d); (3, y, e)\}$
4)
$\{(d, b, 1); (d, b, 3); (d, y, 1); (d, y, 3); (e, b, 1); (e, b, 3); (e, y, 1); (e, y, 3)\}$

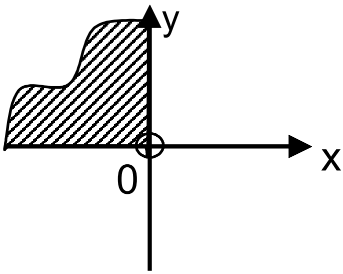
Решение. Для того чтобы найти прямое произведение $M_2 \times M_3 \times M_1$ нужно составить все возможные комбинации элементов этих множеств, причём на первое место ставить элемент из M_2, на второе – из M_3, на третье – из M_1. Тогда

$$M_2 \times M_3 \times M =$$
$$= \{(1,b,d);(1,b,e);(1,y,d);(1,y,e);(3,b,d);(3,b,e);(3,y,d);(3,y,e)\}$$

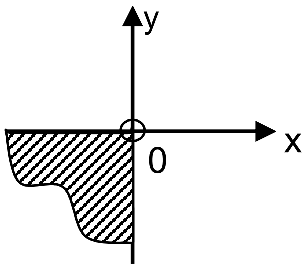
Ответ 3)

6. Даны множества $M_1 = \{a \in R, a \geq 0\}, M_2 = \{b \in R, b < 0\}$. Тогда прямым произведением $M_1 \times M_2$ является область, изображенная на рисунке …

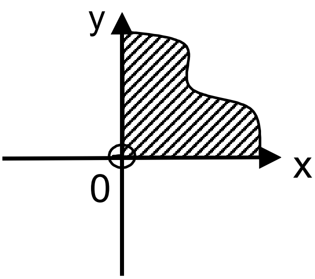
1)



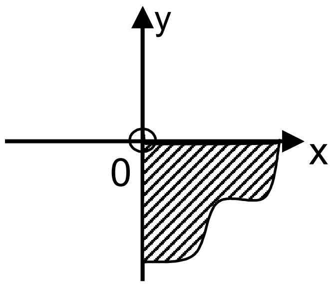
2)



3)



4)



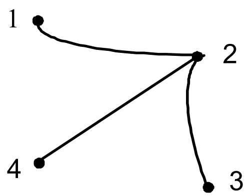
Решение.

Прямое произведение $M_1 \times M_2$, где $M_1 = \{a \in R, a \ge 0\}, M_2 = \{b \in R, b < 0\}$, - это множество точек с координатами (x,y), где $x \in M_1$, то есть $x \ge 0$, а $y \in M_2$, то есть $y < 0$. Такое множество изображено в четвертом ответе.

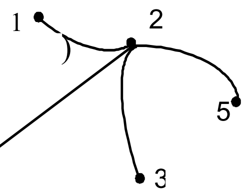
Ответ 4)

7. Реализацией неориентированного графа со множеством вершин V = {1, 2, 3, 4} и ребер E = {(1,2); (2,3); (2,4); (2,2)} является…

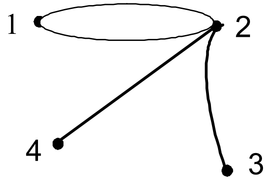
1)



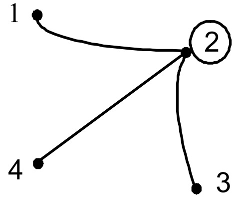
2)



3)



4)



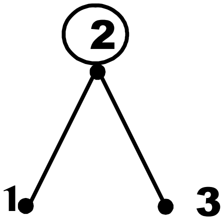
Решение. Ребро соединяющее, например, вершину 1 с вершиной 2 обозначается - (1, 2). Петля считается за ребро (2,2). Тогда набор ребер E = {(1, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 2)} соответствует графу 4).

Ответ 4)

8. Матрица смежности графа, изображённого на рисунке, имеет вид…

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



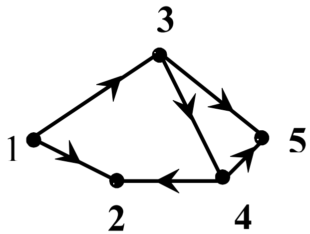
Решение. Матрица смежности имеет вид $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, причем,

$a_{ij} = 0$ если вершина i не соединена с вершиной j и $a_{ij} = 1$, если вершины соединены. Графу, изображенному на рисунке соответствует матрица 1) т.к. $a_{12} = a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{32} = 1$, а $a_{11} = a_{13} = a_{31} = a_{33} = 0$.

Ответ 1)

9. Для ориентированного графа, изображённого на рисунке, полный путь может иметь вид…

1) $l : 1 \to 2 \to 4 \to 5$
2) $l : 1 \to 5$
3) $l : 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$
4) $l : 1 \to 3 \to 5$



Решение. Полный путь – это последовательность ребер по которым можно попасть из вершины 1 в вершину 5, при условии, что начало каждого следующего ребра совпадает с концом предыдущего. Для данного графа это путь 4) $l : 1 \to 3 \to 5$.

Ответ. 4)

10. Таблица истинности логического высказывания f имеет вид:

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Тогда совершенная конъюнктивная нормальная форма функции f имеет вид …

1) $f(x,y) = xy \vee \bar{x}y \vee \overline{xy}$

2) $f(x,y) = (x \vee y)(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$

3) $f(x,y) = \bar{x} \cdot y$

4) $f(x,y) = (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee \bar{y})(x \vee y)$

Решение. Выбираем в таблице строки, в которых f принимает значение 0. Для каждой такой строки записываем элементарную дизъюнкцию.

Для первой строки: $x \vee y$ (т.к. x=0, y=0),

для третьей строки: $\bar{x} \vee y$ (т.к. x=1, y=0),

для четвёртой строки: $\bar{x} \vee \bar{y}$ (т.к. x=1, y=1).

Эти элементарные дизъюнкции соединяем конъюнкцией, получаем

$$f\left(x,y\right) = \left(x \vee y\right)\left(\bar{x} \vee y\right)\left(\bar{x} \vee \bar{y}\right).$$

Ответ 2)

11. Таблицей истинности логического высказывания $\bar{a} \wedge b$ является…

1)

a	b	$\overline{a} \wedge b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2)

a	b	$\overline{a} \wedge b$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

3)

a	b	$\overline{a} \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4)

a	b	$\overline{a} \wedge b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Решение.

Таблица истинности высказывания $a \wedge b$ имеет вид:

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Высказывание $\overline{a}$ принимает значения, противоположные значениям a:

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Составим таблицу истинности для $\overline{a} \wedge b$, пользуясь таблицей истинности для $a \wedge b$ и учитывая, что теперь на первом месте стоит $\overline{a}$ вместо a. Получим

a	$\overline{a}$	b	$\overline{a} \wedge b$
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0

Здесь при заполнении столбца значений высказывания $\overline{a} \wedge b$ делаем следующее.

В первой строке $\overline{a} = 1$, $b = 0$, поэтому находим в таблице истинности $a \wedge b$ строку $a = 1$, $b = 0$. В ней $a \wedge b = 0$. Следовательно, и $\overline{a} \wedge b = 0$.

Во второй строке $\overline{a} = 1$, $b = 1$, поэтому находим в таблице истинности $a \wedge b$ строку $a = 1$, $b = 1$. В ней $a \wedge b = 1$. Следовательно, и $\overline{a} \wedge b = 1$. И так далее. Выбросив из получившейся таблицы столбец $\overline{a}$, получим

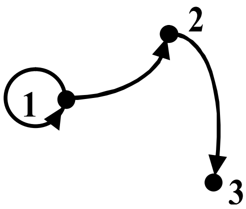
a	b	$\overline{a} \wedge b$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Ответ 2)

Замечание. Приведём таблицы истинности для других высказываний:

a	b	$a \vee b$	$a \to b$	$a \sim b$	$a \oplus b$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0

12. Матрица смежности графа, изображённого на рисунке, имеет вид…



1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Решение. Матрица смежности имеет вид $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, причем**,**

$a_{ij} = 1$ если направление ребра позволяет попасть из вершины i в вершину j и $a_{ij} = 0$, если направление противоположно или вершины вовсе не соединены ребром. Петля считается за ребро. Графу, изображенному на рисунке соответствует матрица 1) т.к. для него только $a_{11} = a_{12} = a_{23} = 1$.

Ответ 1)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Уравнение касательной прямой к кривой $y=(2x-1)^2$ в точке $(-1;16)$ имеет вид …

1) $12x+y-28=0$ 3) $6x+y-10=0$
2) $12x+y-4=0$ 4) $x-6y+97=0$

Решение. Уравнение касательной прямой в заданной точке (x_0, y_0) к данной кривой имеет вид $y = y'(x_0)(x-x_0)+y_0$.
Найдём производную данной функции
$y'=((2x-1)^2+7)'=2(2x-1)\cdot 2=4(2x-1)$. Значение производной в точке $x_0=-1$ равно $y'(-1)=4(-2-1)=-12$. Значение функции в точке $x_0=-1$ равно
$y_0=y(x_0)=y(-1)=(2(-1)-1)^2+7=9+7=16$. Поэтому уравнение касательной прямой к кривой $y=(2x-1)^2+7$ в точке $(-1;16)$ имеет вид $y=-12(x+1)+16$ или $12x+y-4=0$.
Ответ 2)

2. Уравнение касательной к кривой $(x-1)^2+y^2=10$ в точке $(-2;1)$ имеет вид …

1) $-3x+y+5=0$ 3) $-3x+y-7=0$
2) $6x+y+13=0$ 4) $2x+y+3=0$

Решение. Уравнение касательной прямой в заданной точке (x_0, y_0) к данной кривой имеет вид $F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$. Частные производные функции двух переменных $F(x,y)=(x-1)^2+y^2-10$ равны $F'_x=2(x-1)$ и $F'_y=2y$. Значения частных производных в точке $(-2;1)$ равны $F'_x(-2,1)=2(-2-1)=-6$; $F'_y(-2,1)=2\cdot 1=2$. Поэтому уравнение касательной прямой к кривой $(x-1)^2+y^2=10$ в точке $(-2;1)$ имеет вид $-6(x+2)+2(y-1)=0$ или $-3x+y-7=0$.

Ответ 3)

3. Уравнение нормали к кривой $y=x^3+5x^2-3$ в точке $(-1;1)$ имеет вид …

1) $x-10y+11=0$

2) $x-7y+6=0$

3) $x-7y+8=0$

4) $7x+y+6=0$

Решение. Уравнение нормали в заданной точке (x_0, y_0) к данной кривой имеет вид $y=-y'(x_0)(y-y_0)+x_0$. Производная данной функции равна $y'=3x^2+10x$. Значение производной в точке $x_0=-1$ равно $y'(-1)=3(-1)^2+10(-1)=-7.$ Поэтому уравнение нормали к кривой $y=x^3+5x^2-3$ в точке $(-1;1)$ имеет вид $x=-(-7)(y-1)-1$ или $x-7y+8=0.$

Ответ 3)

4. Уравнение касательной плоскости к поверхности $z=x^2-5y^2$ в точке $(1;1;-4)$ имеет вид …

1) $2x+10y-z-16=0$

2) $2x-10y-z+4=0$

3) $2x-10y-z=0$

4) $2x-10y-z+12=0$

Решение. Уравнение касательной плоскости в заданной точке (x_0, y_0) к данной поверхности имеет вид $z-z_0=z'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0,y_0)(y-y_0)..$ Частные производные данной функции двух переменных равны $z'_x=2x$ и $z'_y=-10y.$ Значения частных производных в точке $(1;1)$ равны $z'_x(1,1)=2\cdot 1=2;$ $z'_y(1,1)=-10\cdot 1=-10.$ Поэтому уравнение касательной плоскости к поверхности $z=x^2-5y^2$ в точке

$(1;1;-4)$ имеет вид $z+4=2(x-1)-10(y-1)$ или $2x-10y-z+4=0$.

Ответ 2)

5. Уравнение нормали к поверхности $z=2x+3xy-1$ в точке $(1;-1;-2)$ имеет вид…

1) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1}$

3) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1}$

2) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{-1}$

4) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{1}$

Решение. Уравнение нормали в заданной точке (x_0,y_0) к данной поверхности имеет вид $\frac{x-x_0}{z'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$. Частные производные данной функции двух переменных равны $z'_x=2+3y$ и $z'_y=3x$. Значения частных производных в точке $(1;-1)$ равны $z'_x(1,-1)=2+3\cdot(-1)=2-3=-1$; $z'_y(1,-1)=3\cdot 1=3$. Поэтому уравнение нормали к поверхности $z=2x+3xy-1$ в точке $(1;-1;-2)$ имеет вид $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1}$.

Ответ 1)

6. Радиус кривизны плоской линии $2x+3y-1=0$ равен …

1) $-\frac{2}{3}$

3) ∞

2) -2

4) 0

Решение.

Радиус кривизны плоской линии $2x+3y-1=0$ равен ∞.

Формула для нахождения радиуса кривизны плоской линии имеет вид $R=\frac{1}{k}$, где кривизна k находится по формуле $k=\frac{y''}{\sqrt{\left(1+(y')^2\right)^3}}$. Из уравнения плоской линии находим $y=\frac{1}{3}(1-2x)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x$. Тогда $y'=-\frac{2}{3}; y''=0$. Следовательно радиус кривизны $R=\frac{1}{k}=\frac{1}{0}=\infty$.

Ответ 3)

7. Если R – радиус окружности $x^2+y^2+2x-8=0$, то ее кривизна $\frac{1}{R}$ всюду равна …

1) 3
2) 1/9
3) 1/3
4) 1/8

Решение. Так как кривизна кривой находится по формуле $k=\frac{1}{R}$, где R – радиус кривизны. Уравнение окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ Радиус окружности совпадает с радиусом кривизны. Найдём радиус окружности $x^2+y^2+2x-8=0$, применяя формулу выделения полного квадрата $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$. Получаем $(x+1)^2+y^2=9$, т.е. R=3. Тогда кривизна равна $k=\frac{1}{3}$

Ответ 3)

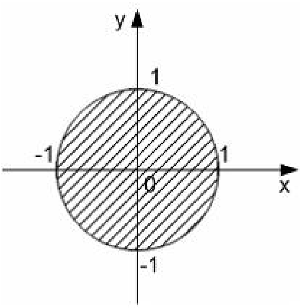
8. Кривизна кривой $y = y(x)$ равна $-\dfrac{1}{3}$, тогда радиус кривизны равен …

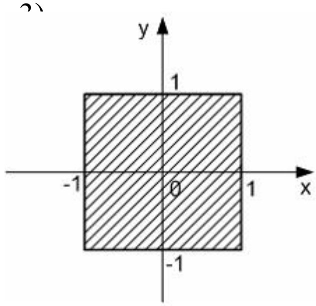
1) -3 3) 3
2) $-1/3$ 4) 9

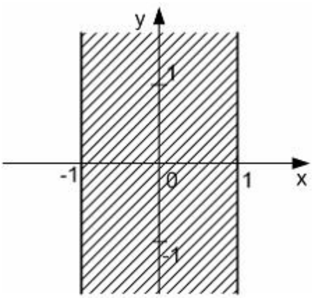
Решение. Так как радиус кривизны находится по формуле $R = \dfrac{1}{k}$, где k кривизна кривой, то радиус кривизны кривой $y = y(x)$ равен $R = \dfrac{1}{-1/3} = -3.$

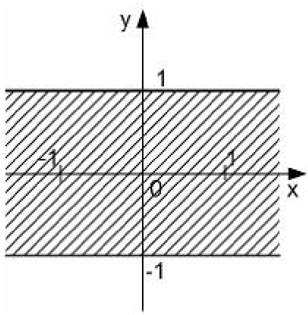
Ответ 1)

9. Пересечением множеств $A = \{(x, y) : x \in R, -1 \le y \le 1\}$ и $B = \{(x, y) : -1 \le y \le 1, y \in R\}$, является множество, изображенное на рисунке…

1) 

2) 

3) 

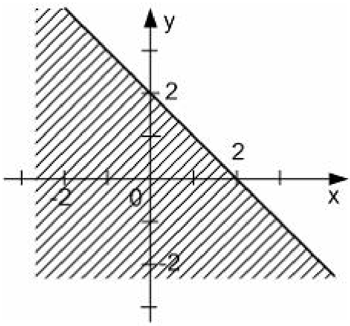
4) 

Решение. Пересечением множеств $A = \{(x, y) : x \in R, -1 \le y \le 1\}$ и $B = \{(x, y) : y \in R, -1 \le x \le 1\}$, является множество, изображенное на рисунке 2). Множество A задаёт полосу, заключённую между прямыми $y = -1;\ y = 1$. Множество B задаёт полосу, заключённую между прямыми $x = -1;\ x = 1$. Пересечение множеств $A \cap B = \{(x, y) : -1 \le x \le 1; -1 \le y \le 1\}$ задаёт пересечение полос – квадрат, ограниченный прямыми $x = -1;\ x = 1;\ y = -1;\ y = 1$, параллельными координатным осям.

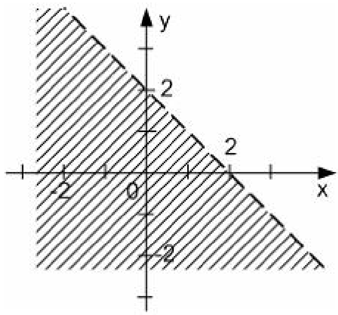
Ответ 2)

10. Область, соответствующая неравенству $y < x + 2$, изображена на рисунке …

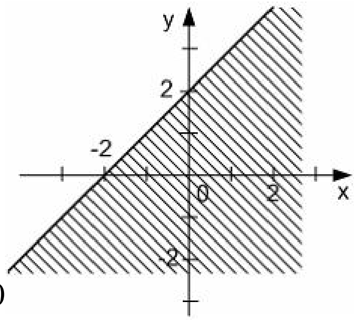
1)



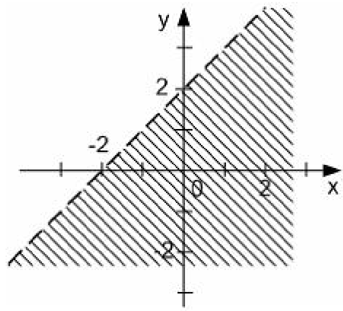
2)



3)



4)



Решение. Область, соответствующая неравенству $y < x + 2$, изображена на рисунке 4). Поскольку прямая $y = x + 2$ проходит через точки (0; −2) и (−2; 0), как на рисунке 4). Кроме того, неравенство $y < x + 2$ – строгое. Следовательно, точки прямой не удовлетворяют равенству $y = x + 2$ и значит прямая должна изображаться пунктирной линией. Прямая делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точки O(0;0) удовлетворяют неравенству $y < x + 2$, так как $0 < 0 + 2$. Поэтому неравенству $y < x + 2$ соответствует полуплоскость, в которой лежит точка O(0;0), т.е. заштрихованная полуплоскость на рисунке 4).

Ответ 4)

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Разностью $C = A \setminus B$ множеств $A = \{1,2,3,5,7\}$ и $B = \{3,5,7,9,10\}$ является множество…

1) $C = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$
2) $C = \{1, 2\}$
3) $C = \{3, 5, 7\}$
4) $C = \{9, 10\}$

Решение. Разностью множеств $A = \{1,2,3,5,7\}$ и $B = \{3,5,7,9,10\}$ является множество $C = A \setminus B$ тех элементов множества *A*, которые не являются элементами множества *B*. Т.к. множество *B* не содержит элементов 1 и 2, то $C = A \setminus B = \{1,2\}$.

Ответ 2)

2. Пересечением множеств $A = \{1,3,5,7\}$ и $B = \{3,5,9,10\}$ является множество…

1) $C = \{1, 7, 9, 10\}$ 3) $C = \{3, 5\}$

2) $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ 4) $C = \{1, 3, 5, 7\}$

Решение. Пересечением множеств A и B является множество $C = A \cap B$ тех элементов, которые содержатся и в A и в B. Это множество $C = \{3,5\}$.

Ответ 3)

3. Объединением множеств $A = \{0,1,3,8\}$ и $B = \{3,7,1\}$ является множество…

1) $C = A \cup B = \{0, 1, 3, 7, 8\}$ 2) $C = \{0,7,8\}$

2) $C = \{1, 3\}$ 4) $C = \{7\}$

Решение. Объединением множеств $A = \{0,1,3,8\}$ и $B = \{3,7,1\}$ является множество $C = \{0,1,3,7,8\}$.

Объединением множеств A и B является множество $C = A \cup B$ тех элементов, которые содержатся в A или содержатся в B. Элементы 0,1,3,8 содержатся в A, а элементы 3,7,1 содержатся в B, поэтому $C = A \cup B = \{0,1,3,7,8\}$.

Ответ 3)

4. Образом множества $(0,1)$ при отображении $y = \text{ctg}(\pi x)$ является…

1) $(-\infty, +\infty)$ 3) $(-\infty, 0)$

2) $\left(-\infty, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 4) $(0, +\infty)$

Решение. При отображении $y = ctg(\pi x)$ точка x=0 отображается в $\lim_{x\to 0} ctg(\pi x) = ctg 0 = +\infty$, а точка x=1 отображается в $\lim_{x\to 1} ctg(\pi x) = ctg\pi = -\infty$, и т.к. функция $y = ctg(\pi x)$ монотонна на (0,1), то образом множества (0,1) является множество $R = (-\infty, +\infty)$ – числовая прямая, множество действительных (вещественных) чисел.

Ответ 1)

5. Образом отрезка $[1,4]$ при отображении $y = \dfrac{2}{x}$ является множество…

1) $[1,4]$ 3) $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

2) $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 4) $\left[\dfrac{1}{4},2\right]$

Решение. Т.к. при отображении $y = \dfrac{2}{x}$ точка x = 1 отображается в $y(1) = \dfrac{2}{1} = 2$, а точка x = 4 отображается в $y(4) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ и функция $y = \dfrac{2}{x}$ монотонна на отрезке $[1,4]$, то образом отрезка $[1,4]$ является множество $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$.

Ответ 2)

6. Образом отрезка $[0,1]$ при отображении $y = (k-n)\cdot x + n$, где k,n – постоянные, является множество…

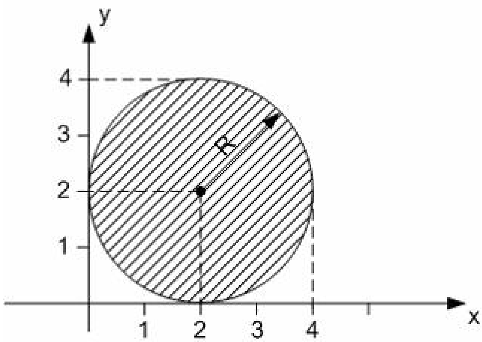
1) (k,n) 3) $[n,k]$

2) $[-k,n]$ 4) (n,k)

Решение. При отображении $y=(k-n)\cdot x+n$, где k,n – постоянные, точка x=0 отображается в $y(0)=(k-n)\cdot 0+n=n$, а точка x=1 отображается в $y(1)=(k-n)\cdot 1+n=k$ и т.к. функция $y=(k-n)\cdot x+n$ монотонна на отрезке $[0,1]$, то образом отрезка $[0,1]$ является множество $[n,k]$ при условии, что $n<k$.

Ответ 3)

7. Мера плоского множества, изображенного на рисунке, равна…

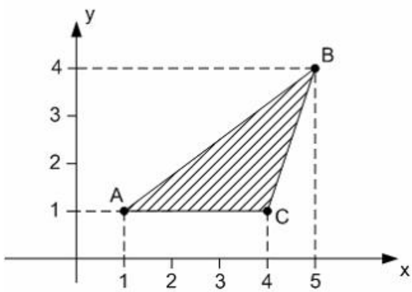


1) 8π 2) 2π
3) 16π 4) 4π

Решение. На рисунке изображён круг с радиусом $R=2$. Мера этого плоского множества есть площадь круга, равная $\pi R^2=4\pi$.

Ответ 4)

8. Мера плоского множества, изображенного на рисунке, равна…



1) 9 2) 20
3) 12 4) 4,5

Решение. На рисунке изображён треугольник с высотой $h=3$ и основанием $a=3$. Мера этого плоского множества есть площадь треугольника, равная

$\frac{1}{2}h \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4{,}5.$

Ответ 4)

9. Множество упорядоченных групп из n действительных чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ с расстоянием $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$ образует метрическое пространство…

1) R^1
2) R^n
3) $C_{[a,b]}$
4) $C_{2[a,b]}$

Решение. Т.к. каждая группа состоит из n действительных чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, то множество упорядоченных групп образует метрическое пространство R^n

Ответ 2)

10. Множество действительных чисел с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$ образует метрическое пространство…

1) $C_{[a,b]}$
2) R^1
3) l_2
4) R^3

Решение. Т.к. каждое действительное число можно изобразить точкой на оси, то множество действительных чисел образует метрическое пространство R^1.

Ответ 2)

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

1. Значение $\sqrt[3]{65}$ с использованием приближенной формулы $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ с точностью до 0,01 равно …

1) 4,13 3) 4,09
2) 4,08 4) 4,02

Решение. Так как из-под кубического корня выносится 64, то

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64+1} = \sqrt[3]{64\left(1+\frac{1}{64}\right)} = 4 \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{64}}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Пусть $x_0 = 1$, $\Delta x = \frac{1}{64}$. Тогда

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3} \cdot x^{1/3} = \frac{1}{3}\, x^{-2/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

$$f(x_0) = f(1) = \sqrt[3]{1} = 1,$$

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{3}.$$

Так как $x_0 + \Delta x = 1 + \frac{1}{64}$, то

$$f(x_0 + \Delta x) = \sqrt[3]{1+\frac{1}{64}} \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{64}$$

$$\sqrt[3]{65} \approx 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{64}\right) = 4 + \frac{1}{3 \cdot 16} = 4 + \frac{1}{48} = \frac{193}{48} \approx 4{,}02.$$

Ответ 4)

2. Форма записи рациональной дроби $\frac{3}{14}$ в виде бесконечной десятичной дроби имеет вид …

1) $0{,}2(142857)$ 3) $0{,}2(14285)$

2) $0{,}21428(0)$ 4) $0{,}2(142856)$

Решение.

$$
\begin{array}{l|l}
30 & \quad 14 \\ \cline{2-2}
\underline{28} & 0{,}2\mathbf{142857}14\ldots \\
\;\;20 & \\
\;\underline{14} & \\
\quad\;60 & \\
\quad\;\underline{56} & \\
\qquad40 & \\
\qquad\underline{28} & \\
\qquad120 & \\
\qquad\underline{112} & \\
\qquad\quad\;80 & \\
\qquad\quad\;\underline{70} & \\
\qquad\quad\;100 & \\
\qquad\quad\;\underline{\;\;98} & \\
\qquad\qquad\;20 & \\
\qquad\qquad\;\underline{14} & \\
\qquad\qquad\quad60 & \\
\qquad\qquad\quad\underline{56} & \\
\qquad\qquad\qquad40 &
\end{array}
$$

Так как далее цифры 142857 повторяются, то $\frac{3}{14} = 0{,}2(142857)$.

Ответ 1)

3. Действительный корень уравнения $e^x + e^{-x} = 0$ принадлежит интервалу …

1) уравнение не имеет действительных корней 3) $(1, +\infty)$

2) $(0,1)$ 4) $(-\infty, -1)$

Решение. Поскольку $e^x > 0$ и $e^{-x} > 0$, то $e^x + e^{-x} > 0$, значит уравнение $e^x + e^{-x} = 0$ не имеет действительных корней.

Ответ 1)

4. Меньший положительный корень уравнения $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ принадлежит интервалу …

1) (1, 2) 3) (2, 3)

2) (3, 4) 4) (0, 1)

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Так как $f(0) = 1 > 0$ и $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0$, следовательно, функция $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ меняет знак на интервале (0, 1). Значит, наименьший положительный корень лежит на интервале (0, 1).

Ответ 4)

5. Положительный корень уравнения $e^x + x^2 - 2 = 0$ принадлежит интервалу …

1) (2, 3) 3) (1, 2)

2) (0, 1) 4) (3, 4)

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x + x^2 - 2$. Так как $f(0) = 1 + 0 - 2 = -1 < 0$, $f(1) = e + 1 - 2 = e - 1 > 0$, $f(2) = e^2 + 4 - 2 = e^2 + 2 > 0$, $f(3) = e^3 + 9 - 2 = e^3 + 7 > 0$, $f(4) = e^4 + 16 - 2 = e^4 + 14 > 0$, то очевидно, что функция меняет знак на интервале (0; 1). Значит, положительный корень уравнения $e^x + x^2 - 2 = 0$ принадлежит интервалу (0; 1).

Ответ 2)

6. Значение интеграла $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до 0,01 равно …

1) 1

2) 0,90

3) 0,94

4) 0,98

Решение. Используем ряд Маклорена для функции $y = \sin x$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots.$$

Тогда $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots.$

Так как сходящийся степенной ряд можно интегрировать почленно, то

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x^2}{3!}\,dx + \int_0^1 \frac{x^4}{5!}\,dx - \ldots =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{1}{3!}\int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{5!}\int_0^1 x^4 dx - \ldots = 1 - \frac{1}{3!}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \frac{1}{5!}\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 - \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} - \ldots.$$

Таким образом, вычислить значение интеграла $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до 0,01 означает вычислить сумму ряда $1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} - \ldots$ с точностью до 0,01, то есть оставить в сумме ряда столько первых членов, чтобы первый из отброшенных членов по модулю оказался меньше, чем 0,01.

Так как первый член ряда 1>0,01,

второй член ряда $\frac{1}{3!\cdot 3} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3} = \frac{1}{18} > 0{,}01$,

третий член ряда $\frac{1}{5!\cdot 5} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 5} = \frac{1}{600} < 0{,}01$, то отбросим все члены ряда, начиная с третьего. Таким образом

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \frac{1}{1!\cdot 1} - \frac{1}{3!\cdot 3} = 1 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3} = 1 - \frac{1}{18} \approx 0{,}94.$$

Ответ 3)

Замечание. Ряд Маклорена для функции $y = \cos x$ имеет вид

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots .$$

7.

x	1	3
y	-7	5

Интерполяционный многочлен Лагранжа $f(x)$, удовлетворяющий заданной таблице значений, имеет вид …

1) $-x+8$
3) $6x-13$
2) $6x-12$
4) $-x-8$

Решение. Подставляем значения x и y из таблицы в каждое уравнение:

1) $y = -x+8$
3) $y = 6x-13$
2) $y = 6x-12$
4) $y = -x-8$.

Если равенство выполняется для каждой пары значений x и y из таблицы, то это равенство и будет являться многочленом Лагранжа.

1)Уравнение $y = -x+8$ при $x = 1, y = -7$ имеет вид: $-7 = -1+8$, то есть $-7 = 7$ - не верно.

2)Уравнение $y = 6x-12$ при $x = 1, y = -7$ имеет вид: $-7 = 6\cdot 1-12$, то есть $-7 = -6$ - не верно.

3)Уравнение $y = 6x-13$ при $x = 1, y = -7$ имеет вид: $-7 = 6\cdot 1-13$, то есть $-7 = -7$ - верно.

Это же уравнение при $x = 3, y = 5$ имеет вид: $5 = 6\cdot 3-13$, то есть $5 = 5$ - верно.

Таким образом, функция $y = 6x - 13$ является интерполяционным многочленом Лагранжа.
4)Уравнение $y = -x - 8$ при $x = 1, y = -7$ имеет вид: $-7 = -1 - 8$, то есть $-7 = -9$ - не верно.
Ответ 3)

8. Дано дифференциальное уравнение $y' = y^2 - x$ при $y(0) = 1$. Тогда первые три члена разложения его решения в степенной ряд имеют вид …

1) $1 + 2x + \frac{x^3}{3}$

2) $1 + x + x^2$

3) $1 + x + \frac{x^2}{3}$

4) $1 + x + \frac{x^2}{2}$

Решение. Для заданного дифференциального уравнения $y' = y^2 - x$, можно найти
$y'' = (y^2 - x)' = 2y \cdot y' - 1$.
Значения производных в точке $x = 0$ равны:
$y'(0) = \left(y(0)\right)^2 - 0 = 1^2 - 0 = 1$
$y'' = 2y(0) \cdot y'(0) - 1 = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$.
Поэтому первые три члена разложения

$$y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!}\, x^2$$

решения дифференциального уравнения в степенной ряд имеют вид

$$1 + \frac{1}{1!}\, x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Ответ 4)

Приложение 1.

Основные формулы дифференцирования

1. $\left(u(x)+v(x)\right)' = u'(x)+v'(x)$.

2. $\left(Cu(x)\right)' = Cu'(x)$, где $C = const$.

3. $\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)v'(x)$.

4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Таблица производных

1. $C' = 0$, где $C = const$.

2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$,

   $x' = 1$,

   $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$,

   $\left(e^x\right)' = e^x$.

4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$,

   $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

5. $\left(\sin x\right)' = \cos x$.

6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.

7. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

8. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

11. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$,

12. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$,

13. $(shx)' = chx$,

14. $(chx)' = shx$,

15. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$,

16. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$.

Приложение 2.

Таблица интегралов

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$;
5. $\int e^x dx = e^x + C$;
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

8. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$;

9. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a \neq 0$;

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $a > 0$;

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, $a \neq 0$;

12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x + C$;

13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}x + C$.

Список рекомендуемой литературы

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 307 с.
2. Беклемишев Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – СПб.: Лань, 2008. – 496 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для втузов. – М.: Интеграл–Пресс. Т. 1. – 2008. – 415 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для втузов. – М.: Интеграл–Пресс. Т. 2. – 2008. – 544 с.
5. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.
6. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс: Учебник. – СПб.: Лань, 2008. – 960 с.

7. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – СПб.: Лань, 2009, 460 с.

8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: ПРФЕССИЯ, 2006. – 432 с.

9. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: ОНИКС, 2008. – 816 с.

Содержание