1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Решение задач

Задача 1. Доказать, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a + d)\, x + (ad - bc) = 0.$$

Решение. Следует доказать, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (1)$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix},$$

$$(a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix},$$

$$(ad - вc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученные матрицы в матричное уравнение (1), получим тождество.

Задача 2. Система $\begin{cases} ay = c - bx \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$

имеет единственное решение. Доказать, что $abc \neq 0$ и найти решение.

Решение. Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -\,2abc.$$

Так как система имеет единственное решение, ее определитель $\Delta \neq 0$, т.е. $abc \neq 0$. По формулам Крамера

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Задача 3. Показать, что для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 10^{-10} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

размера (10 x10) $\quad \det(A - \lambda E) = \lambda^{10} - 10^{-10}$.

Решение.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 10^{-10} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 10^{-10} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \end{vmatrix} =$$

$= -\lambda\,(-\lambda)^9 - 10^{-10} \cdot 1 = \lambda^{10} - 10^{-10}$.

Задача 4. Найти определитель матрицы

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Решение. Идея решения задачи заключается в том, чтобы заметить, что матрица M является произведением двух треугольных матриц размера $(n \times n)$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ и } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления определителей этих матриц используем следующее утверждение.

Утверждение. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Получим

$\det A_1 = 1$, $\det A_2 = 1$.

Известна теорема: определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц.

По этой теореме

$\det M = \det(A_1 \cdot A_2) = \det A_1 \cdot \det A_2 = 1$.

Задача 5. Доказать, что след матрицы AB равен следу матрицы BA.

Решение. Следом квадратной матрицы называется сумма элементов, стоящих на главной диагонали.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\kappa} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{n\kappa} \end{pmatrix}, \qquad (n \times \kappa),$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ . & . & . \\ b_{\kappa 1} & \dots & b_{\kappa n} \end{pmatrix}, \qquad (\kappa \times n),$$

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ . & . & . \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (n \times n),$$

$$BA = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1\kappa} \\ . & . & . \\ d_{\kappa 1} & \dots & d_{\kappa\kappa} \end{pmatrix}, \qquad (\kappa \times \kappa).$$

Найдем след матрицы AB:

$c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn} = (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots + a_{1\kappa} b_{\kappa 1}) + (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + \dots + a_{2\kappa} b_{\kappa 2}) + \dots + (a_{n1} b_{1n} + a_{n2} b_{2n} + \dots + a_{n\kappa} b_{\kappa n}) =$

$$= \sum_{i=1}^{\kappa} a_{1i} b_{i1} + \sum_{i=1}^{\kappa} a_{2i} b_{i2} + \dots + \sum_{i=1}^{\kappa} a_{ni} b_{in} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\kappa} a_{ji} b_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\kappa} a_{ji} b_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{ij}.$$

Найдем теперь след матрицы BA:

$d_{11} + d_{22} + \dots + d_{\kappa\kappa} = (b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21} + \dots + b_{1n} a_{n1}) + (b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22} + \dots + b_{2n} a_{n2}) + \dots + (b_{\kappa 1} a_{1\kappa} + b_{\kappa 2} a_{2\kappa} + \dots + b_{\kappa n} a_{n\kappa}) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{1j} a_{j1} + \sum_{j=1}^{n} b_{2j} a_{j2} + \dots + \sum_{j=1}^{n} b_{\kappa j} a_{j\kappa} = \sum_{i=1}^{\kappa}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji}.$$

Итак, $c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn} = d_{11} + d_{22} + \dots + d_{\kappa\kappa}$.

Задача 6. Доказать, что равенство $AB - BA = E$ не выполняется ни для каких матриц A и B с элементами из числового поля.

Решение. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ . & . & . \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Сумма диагональных элементов матрицы AB равна $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$. Точно такая же сумма диагональных элементов у матрицы BA (см. задачу № 2). Следовательно, сумма диагональных элементов матрицы $AB - BA$ равна нулю, и равенство $AB - BA = E$ невозможно.

Задача 7. Показать, что для любой матрицы B матрица $A = BB^T$ является симметрической.

Решение. Произвольная квадратная матрица A называется симметрической, если она равна транспонированной матрице A^T.

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ . & . & . \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

тогда

$$B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{m1} \\ . & . & . \\ b_{1n} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Найдем элемент a_{ij} матрицы A:

$$a_{ij} = b_{i1} b_{j1} + b_{i2} b_{j2} + \dots + b_{in} b_{jn} = \sum_{\kappa=1}^{n} b_{i\kappa} b_{j\kappa}.$$

Найдем a_{ji}:

$$a_{ji} = b_{j1}\, b_{i1} + b_{j2}\, b_{i2} + \ldots + b_{jn}\, b_{in} = \sum_{\kappa=1}^{n} b_{j\kappa} b_{i\kappa}\,.$$

Так как $a_{ij} = a_{ji}$, следовательно, матрица A является симметрической.

Задача 8. Найти A^{2001}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Представим матрицу A в виде $A = E + B$, где E – единичная матрица. Тогда

$$B = A - E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^4 = B^5 = \ldots = 0.$$

По формуле бинома Ньютона получим

$$A^{2001} = (E + B)^{2001} = E^{2001} + 2001\, B + \frac{2001 \cdot 2000}{2}\, B^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4002 & 2001 \\ -2001 & 0 & 0 \\ -4002 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ 2001000 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4002 & 2001 \\ -2001 & 4002001 & -2001000 \\ -4002 & 8004000 & -4001999 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Доказать, что если

$$ab + bc + ca = 0, \qquad (2)$$

то

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

Решение. Умножим (2) на a, b, c:

$abc = - a^2b - a^2c,$

$abc = - ab^2 - b^2c,$

$abc = - bc^2 - ac^2.$

Вычислим

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3\, abc - a^3 - b^3 - c^3 = - a^2b - a^2c - ab^2 - b^2c -$$

$$- bc^2 - ac^2 - a^3 - b^3 - c^3 = -[a^2 (b + c) + a^3 + (a + c)\, b^2 + b^3 +$$

$$+ (a + b)\, c^2 + c^3] = -[a^2 (b + c + a) + b^2 (a + c + b) +$$

$$+ c^2 (a + b + c)] = - (a + b + c)\, (a^2 + b^2 + c^2).$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = (a + b + c)^2\, (a^2 + b^2 + c^2)^2 =$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)\, (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Учитывая равенство (2), получим

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

Задача 10. Доказать, что определитель n-го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n \\ . & . & . & . & . & . \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

равен n !

Решение. Добавляя к последней строке первую и раскладывая определитель по элементам последней строки, получим

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n-1 \\ . & . & . & . & . & . \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & n-1 \end{vmatrix} =$$

$= n\,\Delta_{n-1}$.

Определитель Δ_{n-1} – это определитель $(n-1)$ –го порядка того же типа, что и данный определитель Δ_n. Так как $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, то после $(n-2)$ - кратного применения указанной операции, получим

$$\Delta_n = n\,\Delta_{n-1} = n\,(n-1)\,\Delta_{n-2} = \dots = n\,(n-1)\,(n-2)\cdot\ldots\,3\cdot 2 = n!$$

1.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}.$$

2. Доказать, что квадратный трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ с комплексными коэффициентами тогда и только тогда будет полным квадратом, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$.

3. Пусть α, β, γ – корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

Ответ: 0.

4. Подсчитать определитель

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \dots & \kappa_n \\ \kappa_1^2 & \kappa_2^2 & \kappa_3^2 & \dots & \kappa_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ \kappa_1^{n-1} & \kappa_2^{n-1} & \kappa_3^{n-1} & \dots & \kappa_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

где $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ – любые числа.

Ответ: $V_n = (\kappa_2-\kappa_1)\,(\kappa_3-\kappa_1)\ldots(\kappa_n-\kappa_1)\,(\kappa_3-\kappa_2)\ldots(\kappa_n-\kappa_2)\ldots\,(\kappa_n-\kappa_{n-1})$.

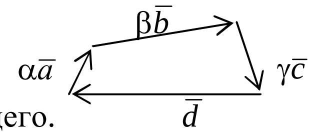
5. Доказать, что если у квадратной матрицы A порядка $(n \times n)$ все элементы, лежащие на главной диагонали, равны нулю, то ее можно представить в виде $A = BC - CB$, где B, C – квадратные матрицы порядка $(n \times n)$.

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Решение задач

Задача 1. Заданы векторы
$\overline{a} = \{1, 5, 3\}$,
$\overline{b} = \{6, -4, -2\}$,
$\overline{c} = \{0, -5, 7\}$,
$\overline{d} = \{-20, 27, -35\}$.
Подобрать числа α, β, γ так, чтобы векторы $\alpha\overline{a}$, $\beta\overline{b}$, $\gamma\overline{c}$, $\overline{d}$ образовывали замкнутую ломаную линию.

Решение. Поместим начало каждого следующего вектора $\alpha\overline{a}$, $\beta\overline{b}$, $\gamma\overline{c}$, $\overline{d}$ в конец предыдущего.



Предположим, что эти векторы образовали замкнутую ломаную линию. Тогда

$$\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} + \overline{d} = 0.$$

Запишем это равенство в координатной форме:

$$\begin{cases} \alpha + 6\beta - 20 = 0 \\ 5\alpha - 4\beta - 5\gamma + 27 = 0 \\ 3\alpha - 2\beta + 7\gamma - 35 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 6\beta = 20 \\ 5\alpha - 4\beta - 5\gamma = -27 \\ 3\alpha - 2\beta + 7\gamma = 35 \end{cases}.$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 5 & -4 & -5 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -338,$$

$$\Delta\alpha = \begin{vmatrix} 20 & 6 & 0 \\ -27 & -4 & -5 \\ 35 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -676,$$

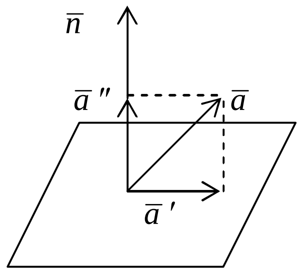
$$\Delta\beta = \begin{vmatrix} 1 & 20 & 0 \\ 5 & -27 & -5 \\ 3 & 35 & 7 \end{vmatrix} = 1014,$$

$$\Delta\gamma = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 20 \\ 5 & -4 & -27 \\ 3 & -2 & 35 \end{vmatrix} = -1690.$$

По формулам Крамера α = 2, β = 3, γ = 5.

Задача 2. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\overline{a} = \{0, 4,3\}$ на плоскость $2x - y + 2z + 1 = 0$.

Решение.



Ортогональной проекцией вектора $\overline{a}$ на данную плоскость является вектор $\overline{a}\,'$, показанный на рисунке.

Идея решения задачи заключается в том, чтобы увидеть, что вектор $\overline{a}\,'$ можно найти как разность вектора $\overline{a}$ и вектора $\overline{a}\,''$, являющегося ортогональной проекцией $\overline{a}$ на вектор нормали $\overline{n} = \{2, -1, 2\}$ к плоскости.

Найдем $\text{пр}_{\overline{n}}\,\overline{a}$:

$$\text{пр}_{\bar n}\,\bar a = \frac{(\bar a, \bar n)}{|\bar n|} = \frac{2}{3}.$$

Ортом вектора $\bar n$ является вектор $\bar n^{\circ} = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

Так как $\bar a''$ отличается от $\bar n$ лишь длиной, то

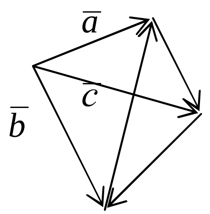
$$\bar a'' = \text{пр}_{\bar n}\,\bar a \cdot \bar n^{\circ} = \left\{\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right\}.$$

Итак,

$$\bar a' = \bar a - \bar a'' = \left\{-\frac{4}{9}, \frac{38}{9}, \frac{23}{9}\right\}.$$

Задача 3. Из одной точки проведены три некомпланарных вектора $\bar a, \bar b, \bar c$. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору $[\bar a, \bar b] + [\bar b, \bar c] + [\bar c, \bar a]$.

Решение.



Векторы $\bar a - \bar b$, $\bar b - \bar c$, $\bar c - \bar a$ лежат в плоскости, проходящей через концы векторов $\bar a, \bar b, \bar c$. Следовательно,

$(\bar a - \bar b, \bar b - \bar c, \bar c - \bar a) =$

$([\bar a - \bar b, \bar b - \bar c], \bar c - \bar a) =$

$= ([\bar a, \bar b] + [\bar c, \bar a] + [\bar b, \bar c], \bar c - \bar a) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar d = [\bar a, \bar b] + [\bar c, \bar a] + [\bar b, \bar c] \perp \bar c - \bar a$.

Аналогично можно показать, что $\bar d \perp (\bar a, \bar b)$ и $\bar d \perp (\bar b - \bar c)$.

Таким образом, вектор $\bar d$ перпендикулярен плоскости, проходящей через концы векторов $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$.

Задача 4. Доказать неравенство:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}.$$

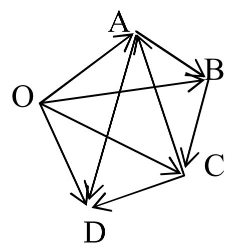
Решение. Введем векторы $\bar e = (\bar a, \bar b, \bar c)$, $\bar e_1 = (\bar a_1, \bar b_1, \bar c_1)$ и $\bar e_2 = (\bar a_2, \bar b_2, \bar c_2)$ в декартовой системе координат. Тогда $D = ([\bar e, \bar e_1], \bar e_2)$, а правая часть неравенства равна произведению модулей этих же векторов $|\bar e|\,|\bar e_1|\,|\bar e_2|$.

Из геометрического смысла смешанного произведения следует, что $([\bar e, \bar e_1], \bar e_2) \le |\bar e|\,|\bar e_1|\,|\bar e_2|$.

Задача 5. Доказать, что если *A, B, C, D* – произвольные точки пространства, то $(\overline{AB}, \overline{CD}) + (\overline{BC}, \overline{AD}) + (\overline{CA}, \overline{BD}) = 0$.

Решение. Выразим данные векторы через радиус-векторы точек *A, B, C,D.*

Получим



$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$

$\overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC}$

$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB}$

$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA}$

$\overline{CA} = \overline{OA} - \overline{OC}$

$\overline{BD} = \overline{OD} - \overline{OB}$.

Имеем

$(\overline{AB}, \overline{CD}) + (\overline{BC}, \overline{AD}) + (\overline{CA}, \overline{BD}) =$

$(\overline{OB} - \overline{OA}, \overline{OD} - \overline{OC}) + (\overline{OC} - \overline{OB}, \overline{OD} - \overline{OA}) +$

$+ (\overline{OA} - \overline{OC}, \overline{OD} - \overline{OB}) =$

$= (\overline{OB},\overline{OD}) - (\overline{OA},\overline{OD}) - (\overline{OB},\overline{OC}) + (\overline{OA},\overline{OC}) +$
$+ (\overline{OC},\overline{OD}) - (\overline{OB},\overline{OD}) - (\overline{OC},\overline{OA}) + (\overline{OB},\overline{OA}) +$
$+ (\overline{OA},\overline{OD}) - (\overline{OC},\overline{OD}) - (\overline{OA},\overline{OB}) + (\overline{OC},\overline{OB}) = 0.$

Задача 6. Показать, что координаты вектора $\bar{r}$ относительно произвольного базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ определяются равенствами:

$$\lambda_1 = \frac{(\bar{r}, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}, \quad \lambda_2 = \frac{(\bar{r}, \bar{e}_3, \bar{e}_1)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}, \quad \lambda_3 = \frac{(\bar{r}, \bar{e}_1, \bar{e}_2)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}.$$

Решение.

Пусть данные векторы в некотором исходном базисе имеют координаты:

$\bar{r} = \{r_1, r_2, r_3\}$,
$\bar{e}_1 = \{e_1', e_1'', e_1'''\}$,
$\bar{e}_2 = \{e_2', e_2'', e_2'''\}$,
$\bar{e}_3 = \{e_3', e_3'', e_3'''\}$.

Тогда разложение вектора $\bar{r} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3$ по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ в координатной форме будет иметь вид:

$$\begin{cases} r_1 = \lambda_1 e_1' + \lambda_2 e_2' + \lambda_3 e_3' \\ r_2 = \lambda_1 e_1'' + \lambda_2 e_2'' + \lambda_3 e_3'' \\ r_3 = \lambda_1 e_1''' + \lambda_2 e_2''' + \lambda_3 e_3''' \end{cases}.$$

Решим эту систему методом Крамера. Поскольку определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} e_1' & e_2' & e_3' \\ e_1'' & e_2'' & e_3'' \\ e_1''' & e_2''' & e_3''' \end{vmatrix} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \neq 0,$$

т.к. $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - базис,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} r_1 & e_2' & e_3' \\ r_2 & e_2'' & e_3'' \\ r_3 & e_2''' & e_3''' \end{vmatrix} = (\bar{r}, \bar{e}_2, \bar{e}_3),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e_1' & r_1 & e_3' \\ e_1'' & r_2 & e_3'' \\ e_1''' & r_3 & e_3''' \end{vmatrix} = (\bar{e}_1, \bar{r}, \bar{e}_3) = (\bar{r}, \bar{e}_3, \bar{e}_1),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} e_1' & e_2' & r_1 \\ e_1'' & e_2'' & r_2 \\ e_1''' & e_2''' & r_3 \end{vmatrix} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{r}) = (\bar{r}, \bar{e}_1, \bar{e}_2).$$

По формулам Крамера

$$\lambda_1 = \frac{(\bar{r}, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}, \quad \lambda_2 = \frac{(\bar{r}, \bar{e}_3, \bar{e}_1)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}, \quad \lambda_3 = \frac{(\bar{r}, \bar{e}_1, \bar{e}_2)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}.$$

Задача 7. Какую поверхность описывает конец вектора $\bar{r}$, если $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{r}) = p$, где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ – взаимно перпендикулярные единичные векторы, p – данное число?

Решение. Пусть $\bar{r} = \{x, y, z\}$. Введем обозначение $[\bar{e}_1, \bar{e}_2] = \bar{k}$. Тогда $\bar{k} \perp \bar{e}_1, \bar{k} \perp \bar{e}_2, |\bar{k}| = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1.$ Координаты вектора $\bar{k} = \{k_1, k_2, k_3\}$ выражаются через координаты данных векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$.

Смешанное произведение

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{r}) = (\bar{k}, \bar{r}) = k_1 x + k_2 y + k_3 z$$

по условию равно числу p, поэтому

$$k_1x + k_2y + k_3z = p.$$

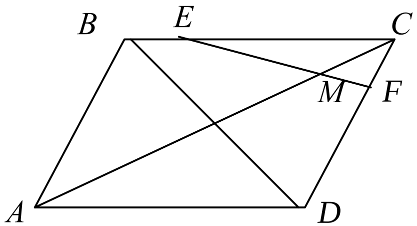
Это равенство задает плоскость. В частности, если направление вектора $\overline{e}_1$ совпадает с направлением оси *OX*, а направление вектора $\overline{e}_2$ – с направлением оси *OУ*, то $\overline{e}_1 = \{1,\ 0,\ 0\}$, $\overline{e}_2 = \{0,\ 1,\ 0\}$. В этом случае

$$(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{r}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = p \Rightarrow z = p.$$

Последнее равенство задает плоскость, параллельную плоскости *XOУ*.

Задача 8. В параллелограмме *ABCD* со сторонами $AD = 5$, $AB = 4$ проведен отрезок *EF*, соединяющий точку *E* стороны *BC* с точкой *F* стороны *CD*. Точки *E* и *F* выбраны так, что $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{CF}{EF} = \dfrac{1}{5}$. Известно, что точка *M*, точка пересечения диагонали *AC* с отрезком *EF*, делит этот отрезок в отношении $\dfrac{MF}{ME} = \dfrac{1}{4}$. Найти диагонали параллелограмма.

Решение. Пусть $\overline{CB} = \overline{p}$, $\overline{CD} = \overline{q}$ и $\overline{CF} = x\overline{q}$.



По условию

$$\overline{CM} = \frac{1}{5}\overline{CE} + \frac{4}{5}\overline{CF} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\overline{p} + \frac{4}{5}x\overline{q} = \frac{2}{15}\overline{p} + \frac{4}{5}x\overline{q}.$$

Так как $\overline{CM}$ и $\overline{CA}$ коллинеарны, то $\overline{CM} = k\overline{CA}$. Но $\overline{CA} = \overline{p} + \overline{q}$, откуда

$$\frac{2}{15}\overline{p} + \frac{4}{5}x\overline{q} = k\overline{p} + k\overline{q}.$$

Приравнивая коэффициенты при $\overline{p}$ и $\overline{q}$, получаем $\dfrac{2}{15} = k$, $\dfrac{4}{5}x = k$, откуда $x = \dfrac{1}{6}$. Следовательно, $\left|\overline{CF}\right| = x\left|\overline{q}\right| = \dfrac{1}{6} \cdot 4 = \dfrac{2}{3}$. По условию $\left|\overline{EF}\right| = 5\left|\overline{CF}\right| = \dfrac{10}{3}$.

Обозначим $\angle BCD = \varphi$. Из треугольника *ECF* по теореме косинусов находим $\cos\varphi = \dfrac{1}{10}$. Зная $\cos\varphi$, по теореме же косинусов находим диагонали $AC = \sqrt{45}$ и $BD = \sqrt{37}$.

2.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Три вектора удовлетворяют условию

$$\left[\overline{OA}, \overline{OB}\right] + \left[\overline{OB}, \overline{OC}\right] + \left[\overline{OC}, \overline{OA}\right] = 0.$$

Доказать:

1) $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ компланарны,
2) точки *A, B, C* лежат на одной прямой.

2. Доказать справедливость равенства $\left[\overline{a}, \left[\overline{b}, \overline{c}\right]\right] = \overline{b}\,(\overline{a}, \overline{c}) - \overline{c}\,(\overline{a}, \overline{b})$.

3. Доказать тождество Лагранжа $\left(\left[\overline{a}, \overline{b}\right], \left[\overline{a}, \overline{b}\right]\right) = \left|\overline{a}\right|^2 \cdot \left|\overline{b}\right|^2 - (\overline{a}, \overline{b})^2$.

4. Сумма длин нескольких векторов плоскости равна 4. Докажите, что из этих векторов можно выбрать некоторое число (может быть один) так, что длина суммы выбранных векторов будет больше 1.

3. ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Решение задач

Задача 1. Доказать, что у астроиды

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (a > 0)$$

длина отрезка касательной, заключенного между осями координат, есть величина постоянная.

Решение. Найдем уравнение касательной. Для этого продифференцируем обе части уравнения астроиды:

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0 \Rightarrow y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

Уравнение касательной будет иметь вид

$$y - y_0 = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}\,(x - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - y_0 = -y_0^{\frac{1}{3}}x_0^{-\frac{1}{3}}x + y_0^{\frac{1}{3}}x_0^{-\frac{1}{3}}x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + y_0^{\frac{1}{3}} \cdot x_0^{-\frac{1}{3}}x = y_0 + y_0^{\frac{1}{3}} \cdot x_0^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + y_0^{\frac{1}{3}} \cdot x_0^{-\frac{1}{3}}x = y_0 + y_0^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + y_0^{\frac{1}{3}} \cdot x_0^{-\frac{1}{3}}x = y_0^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x_0^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y}{y_0^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}} = 1.$$

Получили уравнение касательной в отрезках.

Отсюда длина отрезка касательной, заключенного между осями координат, равна

$$\sqrt{\left(x_0^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(y_0^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^2} = a.$$

Задача 2. Доказать, что длина отрезка, соединяющего центр эллипса с произвольной его точкой, заключена между большой и малой полуосями этого эллипса.

Решение. Пусть дан эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

причем $a \le b$. Тогда

$$\frac{x^2}{a^2} \ \ge\ \frac{y^2}{b^2},\ \frac{y^2}{b^2} \ \le\ \frac{y^2}{a^2},$$

откуда для точки эллипса (x, y) выполняется:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, \quad 1 \le \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2},$$

$$a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2,\ a \le \sqrt{x^2 + y^2} \le b,$$

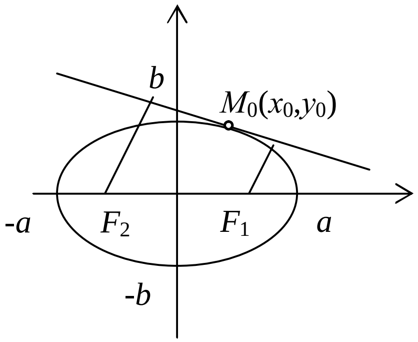
что и требовалось доказать.

Задача 3. Доказать, что произведение расстояний от фокусов до любой касательной к эллипсу есть величина постоянная, равная квадрату малой оси.

Решение. Пусть дан эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Найдем уравнение касательной. Для этого продифференцируем обе части уравнения эллипса:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0, \qquad y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$



Уравнение касательной запишется в виде:

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1.$$

Так как фокусы имеют координаты F_1 $(c,\ 0)$, F_2 $(-c,\ 0)$, то расстояние от F_1 до касательной равно

$$\rho_1=\frac{\left|x_0 b^2 c - a^2 b^2\right|}{\sqrt{{x_0}^2 b^4 + y_0^2 a^4}},$$

а расстояние от F_2 до касательной равно

$$\rho_2=\frac{\left|x_0 b^2 c + a^2 b^2\right|}{\sqrt{{x_0}^2 b^4 + y_0^2 a^4}}.$$

Тогда

$$\rho_1\rho_2=\frac{\left|{x_0}^2 b^4 c^2 - a^4 b^4\right|}{\sqrt{{x_0}^2 b^4 + y_0^2 a^4}}.$$

Из уравнения эллипса следует

$$y_0^2 a^2 = a^2 b^2 - x_0^2 b^2,$$

поэтому произведение расстояний $\rho_1\rho_2$ оказывается равным

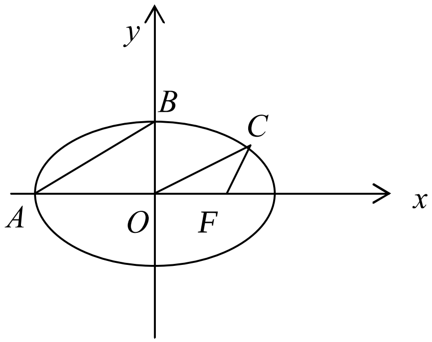
$$\rho_1\rho_2=\frac{\left|{x_0}^2 b^4 c^2 - a^4 b^4\right|}{{x_0}^2 b^4 + a^2(a^2b^2 - x_0^2 b^2)} = \frac{\left|{x_0}^2 b^4 c^2 - a^4 b^4\right|}{{x_0}^2 b^2(b^2 - a^2) - a^4 b^2} =$$

$$= \frac{\left|{x_0}^2 b^4 c^2 - a^4 b^4\right|}{-{x_0}^2 b^2 c^2 - a^4 b^2} = \frac{b^4\left|{x_0}^2 c^2 - a^4\right|}{-b^2({x_0}^2 c^2 - a^4)} =$$

$$= \frac{-b^4\left|{x_0}^2 c^2 - a^4\right|}{-b^2({x_0}^2 c^2 - a^4)} = b^2.$$

Здесь модуль раскрыли со знаком « - », т.к. $x_0^2 c^2 < a^4$.

Задача 4. Через фокус F $(c,\ 0)$ эллипса проведен перпендикуляр к его большой оси. Определить, при каком значении эксцентриситета эллипса отрезки AB и OC будут параллельны.



Решение. Пусть данный эллипс имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Указанные точки имеют координаты: $A(-a,\ 0)$, B $(0,\ b)$, C $(c,\ y)$. Найдем вторую координату точки C. Если $x = c$, то $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2} \Rightarrow\ y=\frac{b}{a}\ \sqrt{a^2-c^2}$.

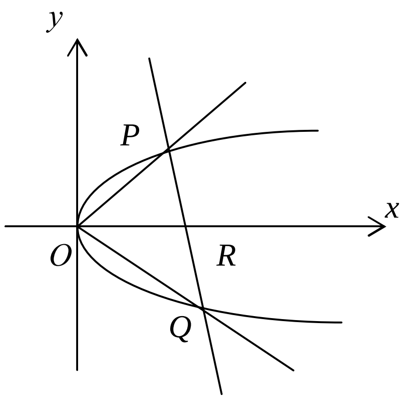
Итак, точка C имеет координаты $\left(c, \frac{b}{a}\ \sqrt{a^2-c^2}\right)$, тогда $\overline{OC}=\left\{c, \frac{b}{a}\ \sqrt{a^2-c^2}\right\}$. Если векторы $\overline{OC}$ и $\overline{AB}=\{a,b\}$ параллельны, то

$$\frac{c}{a}=\frac{b\sqrt{a^2-c^2}}{ab} \Rightarrow\ c=\sqrt{a^2-c^2} \Rightarrow$$

$$c^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow c^2=\frac{a^2}{2} \Rightarrow c=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 5. Прямой угол вращается около своей вершины, совпадающей с вершиной параболы. Доказать, что при этом движении прямая, соединяющая точки пересечения сторон угла с параболой, тоже вращается около некоторой точки, лежащей на оси параболы.



Решение. Пусть дана парабола $y^2 = 2px$.

Рассмотрим две произвольные ортогональные прямые, проходящие через начало координат (вершину параболы). Пусть k – угловой коэффициент одной прямой, тогда $-\dfrac{1}{k}$ - угловой коэффициент второй.

Прямые будут иметь уравнения

$$y = kx, \qquad y = -\frac{1}{k}x.$$

Точками пересечения прямых с параболой являются точки $P\left(\dfrac{2p}{k^2}, \dfrac{2p}{k}\right)$ и $Q\left(2pk^2, -2pk\right)$.

Найдем уравнение прямой PQ:

$$\frac{x - 2pk^2}{\dfrac{2p}{k^2} - 2pk^2} = \frac{y + 2pk}{\dfrac{2p}{k} + 2pk} \Rightarrow kx + y(k^2 - 1) - 2pk = 0.$$

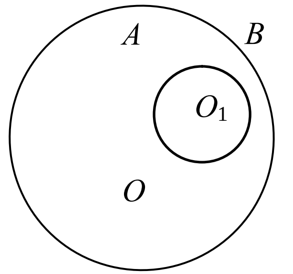
Положение этой прямой на плоскости зависит от k, т.е. от положения угла POQ. Эта прямая пересекает ось параболы $y = 0$ в точке R $(2p, 0)$, которая не меняется при изменении k. Следовательно, при вращении угла POQ вокруг точки O прямая PQ вращается вокруг точки R.

Задача 6. Найти кривую, образованную центрами окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через данную точку.

Решение. Пусть даны точка A и окружность l радиуса r с центром в точке O. Возможны 3 случая.

1) Пусть $A \in l$. Другая окружность касается l и проходит через точку A тогда и только тогда, когда она касается l в точке A. Центром такой окружности может быть любая точка прямой OA, кроме точек O и A.

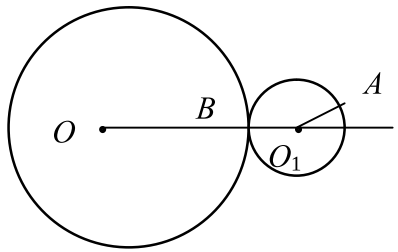
2) Пусть A лежит внутри l. Пусть O_1 – центр окружности, проходящей через точку A.



Радиус этой окружности равен длине O_1A. Эта окружность касается l тогда и только тогда, когда $O_1O + O_1A = O_1O + O_1B = r$.

Множество таких точек O_1 есть эллипс с фокусами в точках O и A.

3) Пусть A лежит вне окружности l. Тогда точка O_1 удовлетворяет равенству $O_1O - O_1A = O_1O - O_1B = r$. Множество таких точек O_1 – это гипербола с фокусами O и A.



Задача 7. Отрезок постоянной длины l скользит своими концами по двум взаимно ортогональным прямым. На отрезке или на его продолжении взята точка M, которая делит отрезок в отношении λ. Найти траекторию, которую описывает точка M.

Решение. Данные взаимно ортогональные прямые примем за координатные оси. Пусть в некоторый произвольный момент времени концы скользящего отрезка AB имеют координаты A $(\alpha, 0)$ и B $(0, \beta)$. Если (x, y) – координаты произвольной точки M искомой траектории, то

$$x = \frac{\alpha}{1+\lambda}, \quad y = \frac{\lambda\beta}{1+\lambda}, \quad l^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Исключая α и β из этих соотношений, получаем

$$l^2 = (1+\lambda)^2 \cdot x^2 + \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^2} \cdot y^2$$

или

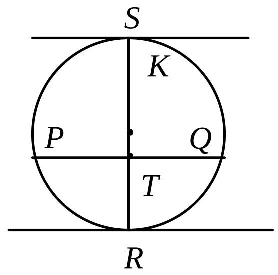
$$\frac{x^2}{\frac{l^2}{(1+\lambda)^2}} + \frac{y^2}{\frac{\lambda^2 l^2}{(1+\lambda)^2}} = 1.$$

Задача 8. Диаметр AB делит окружность на две полуокружности. На одной полуокружности n точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ выбраны так, что точка P_1 лежит между A и P_2, точка P_2 лежит между P_1 и P_3, …, точка P_n лежит между P_{n-1} и B.

Как следует выбрать точку C на другой полуокружности, чтобы сумма площадей треугольников CP_1P_2, CP_2P_3, $CP_3P_4, \ldots, CP_{n-1}P_n$ была наибольшей ?

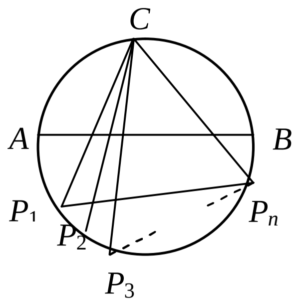
Решение. Докажем сначала лемму.

Лемма. Точка окружности K, наиболее удаленная от хорды PQ, лежит на прямой, проходящей через середину хорды перпендикулярно к ней.



Доказательство. Пусть RS – диаметр, перпендикулярный хорде PQ, и T – точка пересечения PQ и RS. Тогда центр окружности лежит на RS и прямые, перпендикулярные RS и проходящие через точки R и S, совпадают с касательными к окружности K. Эти касательные параллельны хорде PQ, а окружность K заключена между ними. Следовательно, расстояние от любой точки окружности K до хорды PQ не превышает длину наибольшего из отрезков RT и ST. Лемма доказана.

Теперь приступим к решению задачи.



Сумма площадей треугольников CP_1P_2, CP_2P_3, $CP_3P_4, \ldots, CP_{n-1}P_n$ равна сумме площадей многоугольника $P_1P_2 \ldots P_n$ и треугольника CP_1P_n. Площадь многоугольника $P_1P_2 \ldots P_n$ не зависит от выбора точки C. Треугольник CP_1P_n имеет наибольшую площадь, когда точка C находится на наибольшем расстоянии от прямой P_1P_n. Следовательно, по доказанной лемме точку C следует выбрать так, чтобы она совпадала с точкой пересечения перпендикуляра, восстановленного из середины хорды P_1P_n, с полуокружностью, не содержащей точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

3.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Написать уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке, ближайшей к точке $M_0\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $y - 1 = 2(x - 1)$.

2. Доказать, что произведение расстояний от фокусов до любой касательной к гиперболе есть величина постоянная, равная квадрату малой оси.

3. На плоскости даны точки A и B. Найти уравнение геометрического места точек, отстоящих от A на расстоянии вдвое большем, чем от B.

Ответ: $(x - 2c)^2 + y^2 = 4c^2$, где c – расстояние от начала координат до точки B.

4. Найти уравнение геометрического места оснований перпендикуляров, опущенных из вершины параболы $y^2 = -4ax$ на касательные к этой параболе.

Ответ: $xy^2 + x^3 - ay^2 = 0$.

5. Доказать, что если плоская фигура имеет две и только две оси симметрии, то эти оси взаимно перпендикулярны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1975.
2. Постников М.М. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1973.
3. Садовничий В.А. Задачи студенческих олимпиад по математике / Садовничий В.А., Подколозин А.С. – М.: Наука, 1978.
4. Страшевич С. Польские математические олимпиады / Страшевич С, Бровкин Е. – М.: Мир, 1978.