Основные задачи аналитической геометрии

Аналитическая геометрия – раздел математики, в котором изучаются геометрические объекты с помощью алгебраических методов. Основным методом аналитической геометрии является метод координат. Метод координат позволяет каждой точке плоскости поставить в соответствие пару чисел – их координат и каждой точке пространства – тройку чисел. С помощью координат можно учесть все точки плоскости и пространства, что позволяет соединить в единое целое геометрию и анализ.

Аналитическая геометрия решает две основные задачи:

1) Известно уравнение некоторого геометрического места точек в определенной системе координат. Требуется установить каким свойством обладают точки этого геометрического места.
2) Обратная задача: задано некоторое геометрическое место точек, обладающих определенным свойством. Требуется составить уравнение, которому удовлетворяют координаты этого геометрического места точек относительно какой-либо системы координат.

Прежде чем рассматривать примеры задач, рассмотрим способы задания линии на плоскости.

1. Способы задания линии на плоскости.

Уравнение линии в декартовой системе координат

Опр. Уравнение $F(x,y)=0$ называется уравнением линии, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей линии, а координаты любой точки, не принадлежащей линии, уравнению не удовлетворяют.

Из этого определения следует решение простой задачи: выяснить, лежит ли данная точка на заданной линии. Если при подстановке координат точки в уравнение линии получается числовое равенство (тождество), то точка лежит на данной линии; если тождество не получается, то точка линии не принадлежит.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартовая система координат (рис. 1). Для того, чтобы составить уравнение некоторого геометрического места точек (линии L), нужно взять любую точку M (x, y) этого геометрического места и, используя свойства геометрического места точек, получить уравнение F (x, y) = 0.

Точки пересечения двух линий $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ находят из системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Если система (1.1) имеет действительное решение, то линии пересекаются. Число точек пересечения равно числу решений системы. Если действительных решений нет, то линии общих точек не имеют.

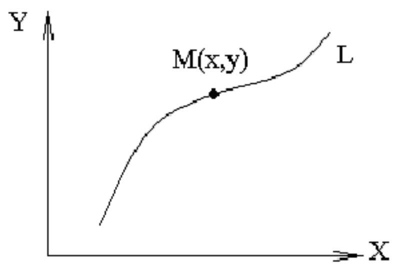


Рис.1

Параметрическое уравнение линии

Будем рассматривать линию L, как след движущейся точки M(x,y) (Рис.2).

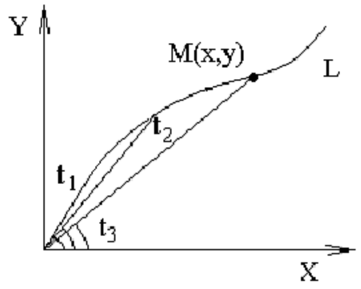


Рис.2

Тогда координаты этой точки можно рассматривать, как функции некоторого аргумента (t):

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (1.2)$$

При изменении t величины x и y будут меняться, следовательно точка будет перемещаться. Уравнения (1.2) называются параметрическими уравнениями линии на плоскости, аргумент t называется параметром. Роль параметра может играть время, угол между осью OX и радиус-вектором точки M(x,y) (Рис.2), длина дуги, отсчитываемой от фиксированной точки линии L и т. д. Существует два способа построения линий, заданных параметрически.

Можно задавать значения параметра t с каким-то шагом и для каждого значения t находить координаты x и y точек на плоскости. Соединяя полученные точки плавной кривой, получаем график функции.

Второй способ состоит в получении непосредственной зависимости между x и y, и он может быть реализован только в том случае, если удается из параметрических уравнений исключить параметр t.

Линия в полярной системе координат

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой **полюсом**, исходящего из этой точки луча OP, называемого **полярной осью**, и масштаба для измерения длин.

Положение любой точки M на плоскости в полярной системе координат задается двумя числами r и φ (полярными координатами), т. е. любой паре чисел r и φ ставится в соответствие точка M на плоскости по следующему закону:

1) Под углом φ к полярной оси проводится луч через полюс, при этом, если угол отсчитывается против часовой стрелки, то он считается положительным (φ>0), если он отсчитывается по часовой стрелке, то φ<0.

2) На полярном луче от полюса откладывается отрезок длины равной модулю r, при этом, если r>0, отрезок откладывается в направлении луча; если r<0, то на его продолжении.

Уравнение линии в полярной системе координат имеет вид:

$$F(r, \varphi) = 0.$$

Переход от полярных координат точки к декартовым, и обратно

Пусть точка M(r,φ) задана в полярной системе координат.

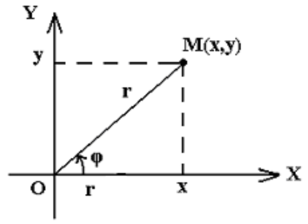


Рис.3

Совместим полярную и декартову системы координат так, чтобы ось полярной системы совпала с осью OX, а полюс с началом координат (Рис.3). Тогда каждой точке M(r,φ) в полярной системе координат будет соответствовать единственная точка M(x,y), координаты которой, как видно из Рис.3, вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad (1.3)$$

Это и есть формулы перехода от полярных координат точки к декартовым. Формулы перехода от декартовых координат точки к полярным следуют из формул (1.3):

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2} + y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2} + y^2} \end{cases} \qquad (1.4)$$

1.1. Примеры решения задач.

В полярной системе координат построить точки

$A(2,0), B(3,\frac{\pi}{4}), C(1,\frac{\pi}{2}), D(-2,0), G(-3,\frac{\pi}{4}), K(1,-\frac{\pi}{2}), L(4,-\pi)$

Рассмотрим примеры решения задач 1-го типа:

Какие линии заданы следующими уравнениями?

1. $y=0$ - ось OX
2. $x=y$ - биссектриса 1-го и 3-го коорд. угла
3. $x^2-y^2=0$, $(x-y)(x+y)=0$ - две прямые
4. $x^2+y^2=R^2$ -окружность с C(0,0)
5. $x^2+y^2=0$ C(0,0)
6. $x^2+y^2+1=0$ - не имеет геометрического образа на пл-ти
7. $\rho = a\cos\varphi$ - ур-ие окружности

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$
ρ	a	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{a}{2}$	0	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a$

2. Прямая линия на плоскости.

Прямая на плоскости в декартовой системе координат

На прямой берем произвольную точку M(x,y) и, используя свойства этой прямой, составляем уравнение, которому должны удовлетворять координаты этой точки. При составлении уравнения используем аппарат векторной алгебры.

Опр. Любой вектор $\vec{n}$ =(A,B), перпендикулярный данной прямой, называется нормальным вектором данной прямой.

Опр. Любой вектор $\vec{S}$ =(m,n), параллельный данной прямой, называется направляющим вектором данной прямой.

Существует два способа задания прямой линии на плоскости.

Способ 1. На прямой задана точка $M_0(x_0,y_0)$ и известен нормальный вектор прямой $\vec{n}$ =(A,B). (Рис.1)

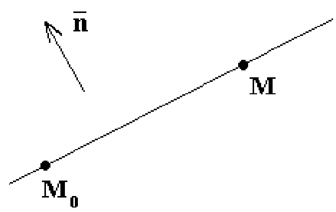


Рис.10

Пусть M(x,y) – произвольная точка прямой. Векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ ортогональны и следовательно их скалярное произведение равно нулю. Уравнение прямой в векторной форме имеет вид: $(\overrightarrow{M_0M},\vec{n}) = 0$ (1).В координатной: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ **(**2**)**

Уравнение (2), записанное в виде: Ax+By+C=0 **(**3**)**, где $C= -Ax_0-By_0$ называется общим уравнением прямой. Заметим, что коэффициенты при x и y в общем уравнении прямой определяют координаты нормального вектора прямой.

Способ 2. На прямой задана точка $M_0(x_0,y_0)$ и известен направляющий вектор прямой $\bar{S} = (m, n)$.

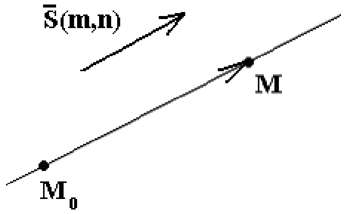


Рис.11

Возьмем на прямой произвольную точку M(x,y). Условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ =$(x-x_0,y-y_0)$ и $\vec{S}$ =(m,n) и будет уравнением прямой:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \quad \textbf{(4)}$$

Уравнение(4) называется каноническим уравнением прямой на плоскости.
Все задачи на составление уравнения прямой на плоскости сводятся к получению и (или) использованию уравнений (2,4).

Рассмотрим некоторые примеры:

а) Составить параметрические уравнения прямой.

Используем уравнение (4). Введем параметр $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=t$. Из каждого равенства выразим x и y: $\begin{cases} x=m\cdot t+x_0 \\ y=n\cdot t+y_0 \end{cases}$ (5) . Полученные уравнения и есть параметрические уравнения прямой на плоскости.

б) Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$.

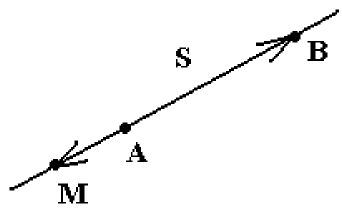


Рис. 12

Вектор $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ - направляющий вектор прямой. На прямой возьмем произвольную точку M (x, y). Векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны, и следовательно их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (6)$$

Это уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

в) Составить уравнение прямой, если известна точка $M_0(x_0,y_0)$ на прямой и угол α между прямой и осью OX?

Возьмем на прямой произвольную точку M(x,y) (Рис.13).

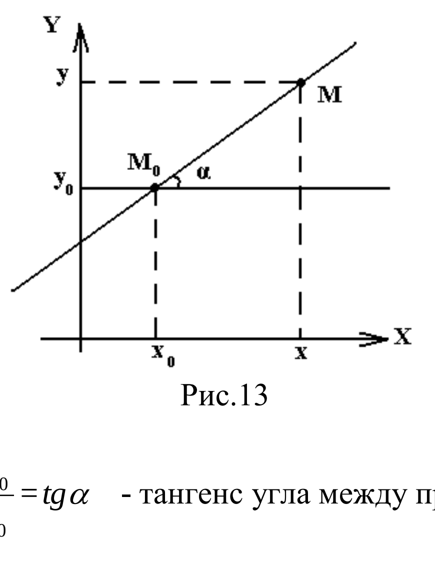


Рис.13

Из рисунка видно, что $\frac{y-y_0}{x-x_0}=tg\alpha$ - тангенс угла между прямой и осью OX.

Обратимся к уравнению прямой (2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, где А и В – координаты нормального вектора прямой. Из уравнения следует, что $\frac{y-y_0}{x-x_0}=-\frac{A}{B}$

$\kappa = tg\alpha = -\frac{A}{B}$ называют угловым коэффициентом прямой. Из уравнения прямой (2) получаем: $y-y_0=k(x-x_0)$ **(7)** – уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку M_0. Уравнение (7) можно преобразовать к виду $y=kx+b$ **(8)**, где $b=y_0-kx_0$. Уравнение (8) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

г) Записать уравнение прямой в отрезках:
Вернемся к уравнению (30 и перенесем свободный член вправо
Ax+By =-C
Разделим обе части уравнения на -C:

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$$

или

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$

Введем обозначения

$$a=-\frac{C}{A}, b=-\frac{C}{B}$$

Получим $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ - уравнение прямой в отрезках, где *а, в* – величины отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях.

<u>Задача.</u> Заданы координаты вершины треугольника A(1,-2),B(3,-1),C(0,1). Составить уравнения:
1) стороны АС
2) высоты ВД
3) медианы ВЕ

1) $\overline{AC}=\overline{S}$ - направляющий вектор

$\overline{AC}=(-1,3)$

M(x,y) $\in$ прямой

$\overline{CM}=(x,y-1)$

$\overline{CM} \parallel \overline{AC} \Rightarrow \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{3}$ - каноническое ур-ие прямой

3x +y -1 =0 – общее ур-ие прямой

2) $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

$$P(x,y)\in \overline{BD} \Rightarrow \overline{BP} \perp \overline{AC} \Rightarrow \left(\overline{BP}, \overline{AC}\right)=0$$

$$\overline{BP}=(x-3, y+1) \Rightarrow \left(x-3\right)(-1)+3(y+1)=0$$

$$3y-x+6=0$$

3) (BE)

$$E=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$E=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$F(x,y)\in BE \Rightarrow \overline{BF} \parallel \overline{BE}$$

$$\overline{BF}=\left(x-3,y+1\right)$$

$$\overline{BE}=(-2\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

$$\frac{x-3}{-\frac{5}{2}}=\frac{y+1}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{x-3}{-5}=\frac{y+1}{1}\Rightarrow x+5y+2=0$$

Построение прямой

Для построения прямой нужно из ур-ния прямой найти две точки и через них провести прямую.

1) $Ax+By+C=0$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

2) $Ax+By=0$

3) $Ax+C=0$

Взаимное расположение прямых на плоскости

а) Если прямые параллельны, то их нормальные или направляющие вектора коллинеарны:

$$\vec{n}_1=\left(A_1,B_1\right)\parallel\overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2)\ :\ \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\qquad \mathbf{(}8\mathbf{)}$$

$$\overrightarrow{S_1}=(m_1,n_1)\parallel\ \overrightarrow{S_2}=(m_2,n_2)\ :\ \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}\qquad (9)$$

а угловые коэффициенты равны: $k_1=k_2$ **(**10**)**

б) Если прямые перпендикулярны, то будут ортогональны их нормальные или направляющие векторы, т. е. будут выполняться равенства:

$A_1A_2+B_1B_2=0$ **(**11**)**

$m_1m_2+n_1n_2=0$ **(**12**)**

Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением:

$$k_1=-\frac{1}{k_2}\qquad \mathbf{(}13\mathbf{)}$$

в) Если прямые пересекаются, то угол между ними будет равен углу между направляющими или нормальными векторами:

$$\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=\frac{(n_1;n_2)}{|\overrightarrow{n_1}\|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\qquad \mathbf{(}14\mathbf{)}$$

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами k_1 и k_2, то угол между ними находится по формуле: $tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$ **(**15**)** , причем поворот на угол α происходит против часовой стрелки от прямой с угловым коэффициентом k_2 к прямой с угловым коэффициентом k_1. Эта формула очевидно следует из тригонометрической формулы:

$$tg\left(\alpha - \beta\right) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Пересечение прямых

Точка пересечения прямых есть точка обоих прямых. Она, следовательно, должна удовлетворять системе :

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Расстояние от точки до прямой

Пусть дана точка $M_1(x_1,y_1)$ и прямая Ax+By+C=0. Найдем расстояние от точки M_1 до прямой. Возьмем на прямой т.$M_0(x_0, y_0)$. Векторы $\overline{N}(A,B)$ и $\overline{M_0M_1}$ коллинеарны, рассмотрим их скалярное произведение и учтем, что $\left|\overline{M_0M_1}\right| = d$ расстояние от т.M_1 до прямой.

$$\left(\overline{N}, \overline{M_0M_1}\right) = \left|\overline{N}\right|\left|\overline{M_0M_1}\right|\cos 0^0 = \left|\overline{N}\right| d \Rightarrow$$

$$d = \pm\frac{\left(\overline{N}, \overline{M_0M_1}\right)}{\left|\overline{N}\right|} = \pm\frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

т.к. т. $M_0 \in$ прямой, то ее координаты удовлетворяют ур-ию прямой $Ax_0 + By_0 + C = 0$.
$Ax_1 + By_1 - Ax_0 - By_0 = Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0 + C) + C = Ax_1 + By_1 + C$. Следовательно

$$\mathrm{d} = \frac{\left|\mathrm{Ax_1 + By_1 + C}\right|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}} \quad (16)$$

Заметим, что числитель получается подстановкой координат точки M_1 в ур-ие прямой.

<u>Пример</u>. Убедиться, что данные прямые параллельны и найти расстояние между ними:

$$6x - 8y + 1 = 0, \overline{N_1} = (6, -8)$$
$$3x - 4y + 5 = 0, \overline{N_2} = (3, -4)$$

т.к. координаты нормальных векторов пропорциональны $\frac{6}{3} = \frac{-8}{-4} = 2$, то прямые параллельны. Возьмем любую т. на одной прямой $M_1(0, \frac{1}{8}) \in L_1$ и найдем расстояние от этой точки до другой прямой по формуле (16):

$$d = \frac{\left|3*0 - 4*\frac{1}{8} + 5\right|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4\frac{1}{2}}{5} = 0.9\,.$$

3. Плоскость в пространстве.

Существуют два способа однозначного определения плоскости в пространстве.

Способ 1. Пусть в некоторой системе координат задана точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и вектор $\bar{n}$(A,B,C). Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\bar{n}$.

Решение. Пусть M(x,y) – произвольная точка плоскости (Рис.19).

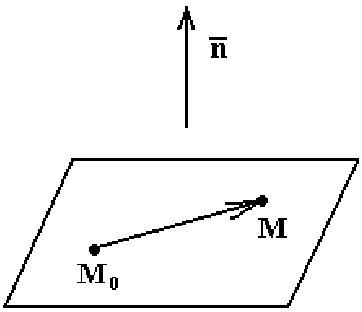


Рис. 19

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ =(x-x_0; y-y_0; z-z_0) перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т.е. ($\vec{n}$, $\overrightarrow{M_0M}$)=0. Запишем это уравнение в координатной форме:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ **(**17**)**

(17)– уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}$ (A,B,C).

Уравнение (1) можно привести к виду:

$Ax+By+Cz+D=0$ **(**18**)**, где $D= -(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

Уравнение (18) называется общим уравнением плоскости. Коэффициенты при x, y, z в этом уравнении – координаты нормального вектора плоскости.

Опр. Любой вектор, перпендикулярный плоскости, называется ее нормальным вектором.

Способ 2. Пусть в некоторой системе координат дана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{S_1}$ ($m_1;n_1;p_1$) и $\overrightarrow{S_2}$ ($m_2;n_2;p_2$). Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через точку M параллельно векторам $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{S_2}$.

Решение. Возьмем на плоскости произвольную точку M(x,y,z) (Рис. 20).

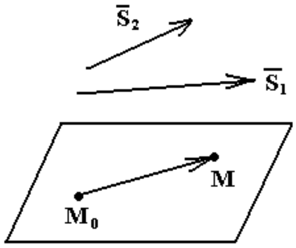


Рис. 20

По условию задачи вектор $\overrightarrow{M_0M}$ =(x-x_0; y-y_0; z-z_0) и векторы $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{S_2}$ компланарны.

Условие компланарности и является уравнением искомой плоскости: ($\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{S_1}$, $\overrightarrow{S_2}$)=0 или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель и приводя подобные, получим уравнение вида:
Ax+By+Cz=0.
Все задачи на составление уравнения плоскости решаются либо первым либо вторым способом.

Задача. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$?

Через три точки на плоскости можно провести два некомпланарных вектора, например:
$\vec{S_1} = \overrightarrow{M_1M_2}$ $=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$
и
$\vec{S_2} = \overrightarrow{M_1M_3}$ $=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$. (Рис.21).

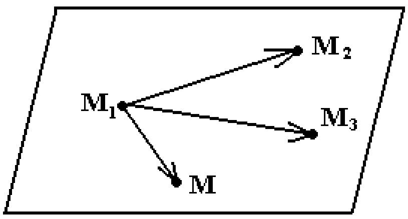


Рис. 21

Любая из трех точек может быть использована в качестве точки M_0, пусть это будет точка M_1. Т. о. Плоскость задана вторым способом. Пусть M(x,y,z) – произвольная точка плоскости. Векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ – компланарны. Следовательно, смешанное произведение векторов равно нулю:
$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})=0$.
Или, переходя к координатам векторов, будем иметь:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Задача. Даны три точки $M_1(2,-1,1), M_2(3,0,1), M_3(1,0,2)$.

Составить ур-ие плоскости, проходящей через т.M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_2M_3}$

$\overline{M_2M_3}$ нормальный вектор плоскости.

$\overline{M_1M} \perp \overline{M_2M_3}$

$\overline{M_1M} = (x-2, y+1, z-1)$

$\overline{M_2M_3} = (-2,0,1)$

$\left(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_3}\right) = 0$ - векторное ур-ие плоскости.

$-2(x-2)+z-1=0 \Rightarrow 2x-z-3=0$.

2) Составить ур-ие плоскости, проходящей через 3 данные точки

$\overline{M_1M_2} = (1,1,0)$

$\overline{M_1M_3} = (-1,1,1)$

$\overline{M_1M} = (x-2, y+1, z-1)$

Векторы $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}, \overline{M_1M}$ компланарны, следовательно $\left(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right) = 0$

Построение плоскости

Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Пусть даны две плоскости:

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ **(1)**

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ **(2)**

φ- угол между этими плоскостями, равный углу между нормальными векторами этих плоскостей $\vec{n_1}$ (A_1,B_1,C_1) и $\vec{n_2}$ (A_2,B_2,C_2) и может быть найден средствами векторной алгебры:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n_1}, \vec{n_2})}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Если плоскости **(1)** и **(2)** перпендикулярны, то cosφ=0, т.е.

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ - условие перпендикулярности плоскостей.

Если плоскости **(1)** и **(2)** параллельны, то $\vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$ => $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ - условие параллельности плоскостей.

Расстояние от точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до плоскости Ax+By+Cz+D=0

Расстояние (d) находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Примеры решения задач.

1. Построить плоскости:
   1) 3x+6y-4z=12
   2) x+y-2=0
   3) x-y=0
   4) x-3=0
   5) x-y+z=0

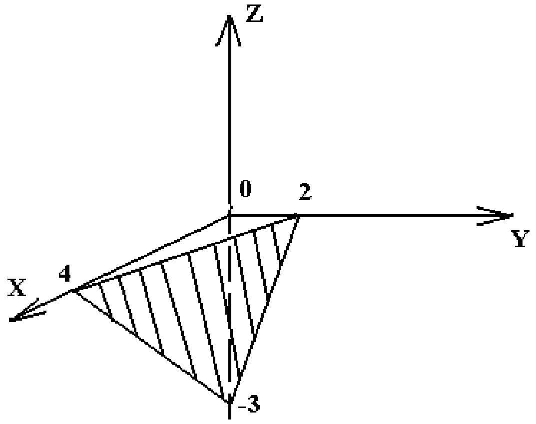


Рис. 22

2)

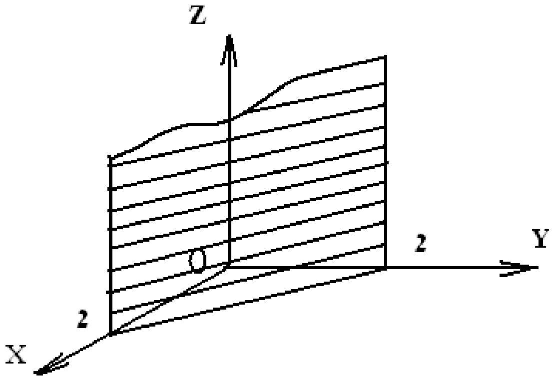


Рис.23

3)

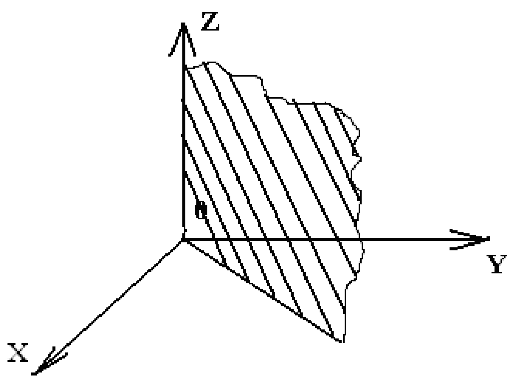


Рис.24

4)

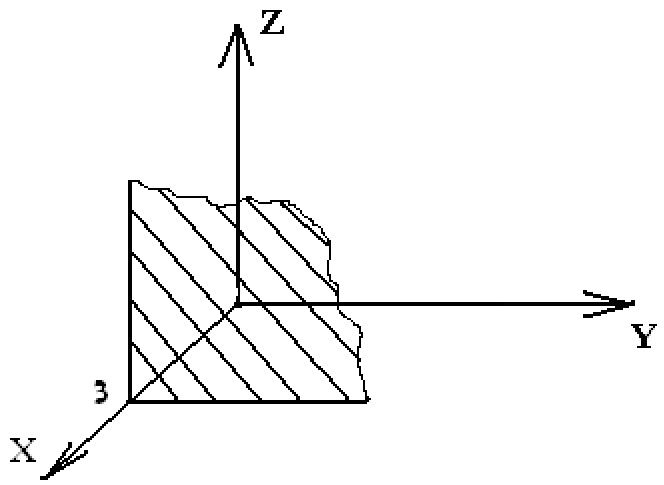


Рис.25

Плоскость $x-y+z=0$ проходит через начало координат и оставляет следы $x=y$ и $y=z$ в координатных плоскостях соответственно XOY и YOZ.(Рис. 26)

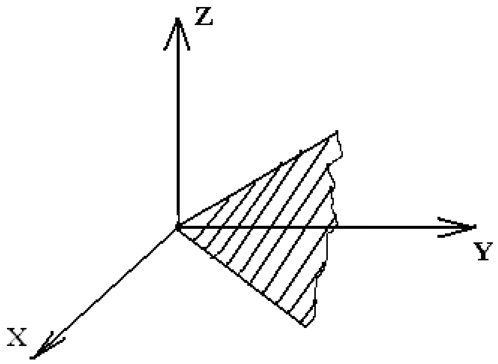


Рис.26

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2,3\text{-}1)$, $M_2(1,5,3)$ и перпендикулярной плоскости $3x-y+3z+15=0$.

Решение. Векторы $\overrightarrow{M_1M}(x-2, y-3, z+1), \overrightarrow{M_1M_2}(-1,2,4)$ и нормальный вектор $\vec{n}(3,-1,3)$ компланарны. Поэтому $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{n})=0$. Из этого условия получаем уравнение искомой плоскости

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0, \text{ или } 2x+3y-z-14=0.$$

7. Найти угол между плоскостями
$x-2y+2z-8=0, x+2z-6=0.$

<u>Решение.</u> Угол φ между плоскостями равен углу между их нормальными векторами $\overrightarrow{n_1}(1,-2,2)$ и $\overrightarrow{n_2}(1,0,2)$ и находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|},$$

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 - 2\cdot 0 + 2\cdot 2}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{1+4}} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

8. Заданы плоскости

$3x - 4y - 5z + 20 = 0$

$6x - 8y - 10z + 1 = 0$

Убедиться, что плоскости параллельны и найти расстояние между ними.

Решение. $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = 2$ - плоскости параллельны

Выберем на первой плоскости произвольную точку, координаты которой удовлетворяли бы уравнению плоскости, например $M_1(0,0,4)$. Найдем расстояние от точки до второй плоскости по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$d = \frac{|-39|}{\sqrt{36+64+100}} = \frac{39}{\sqrt{200}}.$$

4. Прямая линия в пространстве.

Прямую в пространстве можно задавать двумя способами:

1 способ.

На прямой задана точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и известен направляющий вектор прямой $\vec{S}(m;n;p)$.

Опр. Любой вектор, параллельный данной прямой называется направляющим вектором этой прямой.

Составим уравнение прямой.

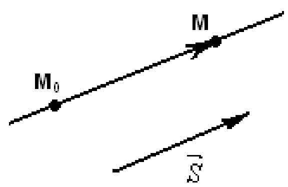


Рис.31

Возьмем на прямой произвольную точку M(x,y,z) (Рис.31). По условию векторы $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и $\vec{S}$ коллинеарны, следовательно их координаты пропорциональны : $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ (17).

Уравнения (17) называются каноническими уравнениями прямой в пространстве.

2 Способ.

Прямая может быть задана, как линия пересечения двух плоскостей в пространстве. Систему из двух непараллельных плоскостей

(18) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ называют общим уравнением прямой в пространстве.

Переход от общих уравнений прямой к каноническим

Пусть прямая задана общими уравнениями (18). Чтобы записать канонические уравнения этой прямой, нужно знать ее направляющий вектор $\vec{S}$ и какую-нибудь точку M_0, принадлежащую прямой (п. 4.1.2). В качестве вектора $\vec{S}$ можно взять векторное произведение нормальных векторов пересекающихся плоскостей $\vec{n} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n} = (A_2, B_2, C_2)$.

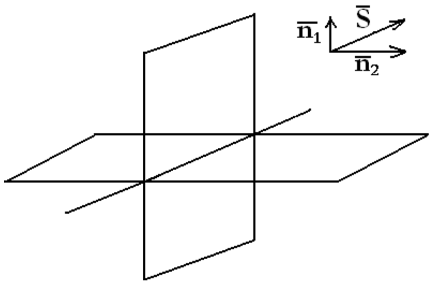


Рис. 32

Вектор $\vec{S}$ по определению перпендикулярен обоим векторам $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ (Рис.32), а следовательно, параллелен прямой (Рис.32) $\vec{S} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right]$. Для нахождения точки M_0 на прямой, надо решить систему (18) и взять любое ее решение.

Переход от канонических уравнений прямой к общим

Пусть прямая задана каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Чтобы перейти к общему уравнению прямой достаточно записать канонические уравнения в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} \\ \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} \end{cases}$$

Здесь прямая определена с помощью уравнений двух плоскостей, из которых первая параллельна оси OZ и вторая – оси OX.

Переход от канонических уравнений прямой к параметрическим

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Пример. 1. Найти уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$.
Решение:

Пример 2. Записать канонические и параметрические ур-ия прямой:

Решение. Для решения задачи нужно найти произвольную фиксированную точку, принадлежащую прямой и направляющий вектор, параллельный прямой, В качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overline{S}$, перпендикулярный к нормальным векторам обеих плоскостей, т.е.

$$\begin{cases} x+10y-2z-13=0, \overline{N_1}=(1,10,-2) \\ x+6y-z-9=0, \overline{N_2}=(1,6,-1) \end{cases}$$

$$z=0\begin{cases} x+10y-13=0 \\ x+6y-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y=4, y=1 \\ x=9-6y=3 \end{cases} \Rightarrow M_0(3,1,0)$$

$$\overline{S}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 10 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}=2\overline{i}-\overline{j}-4\overline{k}$$

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-4}$$

Чтобы перейти к параметрическим уравнениям, приравняем каждое из отношений в последнем уравнении к параметру t и выразим соответственно x, y и z.

$$\frac{x-3}{2}=t, \quad \frac{y-1}{-1}=t, \quad \frac{z}{-4}=t$$

Отсюда: $\begin{cases} x=2t+3 \\ y=-t+1 \\ z=-4t. \end{cases}$

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до прямой в пространстве

Пусть прямая задана уравнением:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

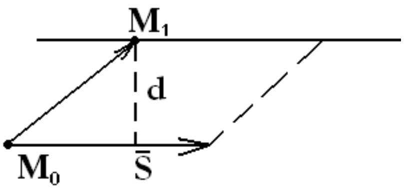


Рис. 33

Построим параллелограмм на векторах $\vec{S}=(m,n,p)$ и $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$ (Рис.33). Его высота d и есть искомое расстояние.

Площадь параллелограмма равна $|\overline{S}|\cdot d=\left|\left[\overline{S},\overline{M_0M_1}\right]\right|$ =>

$$d = \frac{\left|\left[\bar{S}, \overline{M_0M_1}\right]\right|}{\left|\bar{S}\right|}$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть заданы две прямые в пространстве:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad (1)$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \quad (2)$$

1) Если прямые **параллельны**, их направляющие векторы $\overrightarrow{S_1} = (m_1, n_1, p_1)$ и $\overrightarrow{S_2} = (m_2, n_2, p_2)$ колинеарны:

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ - условие параллельности прямых в пространстве.

2) Если $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{S_2}$ не колинеарны, то прямые **пересекаются** или **скрещиваются**. Прямые пересекаются, если они лежат в одной плоскости. При этом векторы $\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны:

$$(\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{M_1M_2})=0, \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

Здесь $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Если прямые принадлежат одной плоскости, то они либо параллельны, либо пересекаются

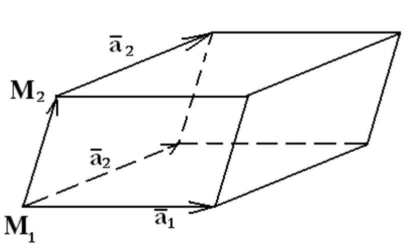
Угол α между пересекающимися прямыми находится по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{(\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2})}{\left|\overrightarrow{S_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1{}^2 + n_1{}^2 + p_1{}^2} \cdot \sqrt{m_2{}^2 + n_2{}^2 + p_2{}^2}};$$

⇨ условие перпендикулярности прямых в пространстве:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

Если прямые скрещиваются, то представляет интерес задача нахождения кратчайшего расстояния между ними. Для этого нужно найти расстояние между параллельными плоскостями, проведенными через прямые (1) и (2).Для этого построим параллелепипед на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}$ и найдем высоту этого параллелепипеда. Причем основание этого параллелепипеда построено на векторах $\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}$.



$$S_o = \left|\left[\bar{S}_1, \bar{S}_2\right]\right|$$

$$V = \left|\left(\overline{M_1M_2}, \bar{S}_1, \bar{S}_2\right)\right|$$

$$H = \frac{V}{S_0}$$

Задача Выяснить взаимное положение прямых в пространстве.

Даны прямые

$\frac{x-1}{2} = y = z+3, M_1(1,0,-3), \bar{S}_1 = (2,1,1)$ и

$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = z, M_2(-1,1,0), \bar{S}_2 = (3,2,1)$.

Решение. Векторы $\bar{S}_1, \bar{S}_2$ - векторы неколлинеарны, следовательно, прямые пересекаются или скрещиваются. Если прямые лежат в одной плоскости (пересекаются), то векторы $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \overline{M_1M_2}$ - компланарны, т.е. их смешанное произведение равно нулю, $(\bar{S}_1, \bar{S}_2, \overline{M_1M_2})=0$.

$\left(\overline{M_1M_2}, \bar{S}_1, \bar{S}_2\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, следовательно прямые скрещиваются.

Скрещивающиеся прямые не пересекаются и их всегда можно расположить в параллельных плоскостях. Построим параллелепипед на векторах $\bar{S}_1, \bar{S}_2$,и $\overline{M_1M_2}$ (Рис. 38), где $\bar{S}_1, \bar{S}_2$, - направляющие векторы данных прямых, а M_1и M_2– это фиксированные точки, принадлежащие соответственно первой и второй прямой. Тогда искомое расстояние равно высоте параллелепипеда.

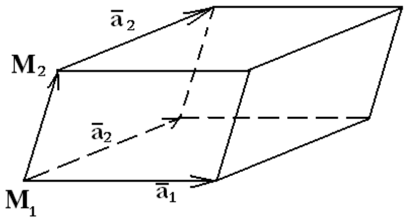


Рис. 38

Найдем

$\left[\overline{S_1}, \overline{S_2}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}.$

$S_{осн} = \left\|\left[\overline{S_1}, \overline{S_2}\right]\right\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

Отсюда

$d = \frac{V}{S} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Задача. Доказать, что прямые пересекаются. Найти точку их пересечения.

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ и $\frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+6}{1}$.

$$\left(\overline{M_1M_2}, \bar{S}_1, \bar{S}_2\right) = \begin{vmatrix} -2 & -9 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -2t \end{cases}$$

$$\frac{1+2t+1}{1} = \frac{-2-t+11}{2} = \frac{-2t+6}{1}$$

$t = 1$

$x = 3, y = -3, z = -2$

5. Прямая и плоскость в пространстве.

Угол между прямой и плоскостью

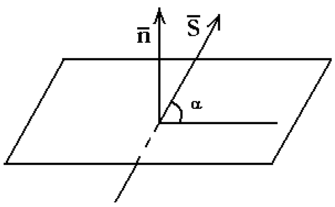


Рис. 40

Пусть прямая $\frac{x-x_0}{n} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ пересекаются под углом α (Рис. 40). Совместим начало направляющего вектора прямой $\bar{S} = (m, n, p)$ и нормального вектора плоскости $\bar{n} = (A, B, C)$ с точкой пересечения прямой и плоскости (Рис.40) и найдем угол α по формуле:

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha = \frac{(\bar{n}, \bar{S})}{|\bar{n}| \cdot |\bar{S}|}$ или в координатной форме:

$$\sin\alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};$$

условие перпендикулярности прямой и плоскости

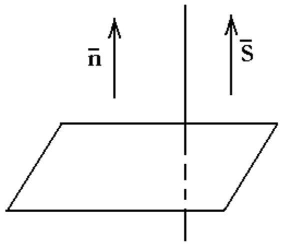


Рис. 41

Из рисунка 41 ясно, что в этом случае направляющий вектор прямой $\overline{S} = (m, n, p)$ колинеарен нормальному вектору плоскости $\overline{n} = (A, B, C)$, следовательно, условие перпендикулярности имеет вид:

$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

условие параллельности прямой и плоскости

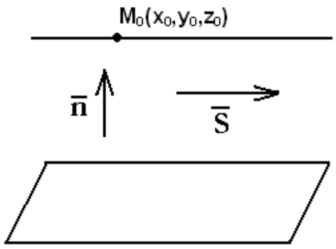


Рис. 42

Из Рис. 42 видно, что в этом случае векторы $\overline{n}$ и $\overline{S}$ перпендикулярны, условие перпендикулярности векторов и есть условие параллельности прямой и плоскости:
$(\overline{S}, \overline{n}) = 0$ или в координатной форме: $Am + Bn + Cp = 0$.
Если при этом координаты точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ удовлетворяют уравнению плоскости, то прямая принадлежит этой плоскости.

Примеры решения задач.

Задача Найти точку пересечения прямой $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{1}$ с плоскостью $3x + 5y + z = 21$

Решение. Координаты точки пересечения прямой с плоскостью находятся из совместного решения уравнений прямой и плоскости, т.е. из системы:

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \\ x + 2y + 3z = 25 \end{cases}$$

Запишем уравнения прямой в параметрической форме
$x = 3t - 2, y = 5t, z = t + 2.$ Подставим эти выражения в уравнение плоскости
$3(3t-2) + 5*5t + t + 2 = 21.$ Отсюда $t =$, а из параметрических уравнений прямой получим координаты точки пересечения $x = \frac{1}{7}, y = \frac{25}{7}, z = \frac{19}{7}$.

Задача. Составить уравнений прямой, проходящей через точку $M_0(1,2,-6)$ перпендикулярно плоскости $5x - 4y + 3z = 1$.

Решение.

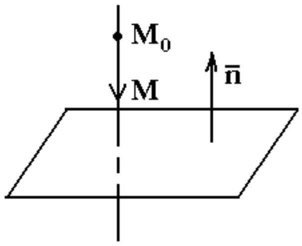


Рис. 43

Возьмем на прямой произвольную точку M(x,y,z).(Рис. 43)
Векторы $\overline{M_0M} = (x-1, y-2, z+6)$ и $\overline{n} = (5, -4, 3)$ параллельны. Здесь $\overline{n}$ - нормальный вектор плоскости. По условию параллельности векторов $\overline{M_0M}$ и $\overline{n}$

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+6}{3}.$$

Получены канонические уравнения искомой прямой.

Задача Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5,2,-6)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{-3}$.

Решение.

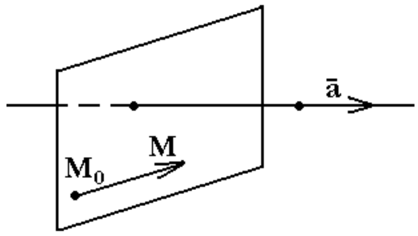


Рис. 44

Выберем на плоскости произвольную точку M(x,y,z).(Рис. 44) Тогда вектор $\overline{M_0M}\left(x-5, y-2, z+6\right)$, лежащий в искомой плоскости, перпендикулярен к направляющему вектору $\overline{a} = (-1, 4, -3)$ данной прямой. Отсюда

$\left(\overline{a}, \overline{M_0M}\right) = 0$,

$-1(x-5) + 4(y-2) - 3(z+6) = 0$,

$-x + 4y - 6z - 21 = 0.$

Получено уравнение искомой плоскости.

Задача. Найти проекцию точки A(4,-3,1) на прямую $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

Решение.

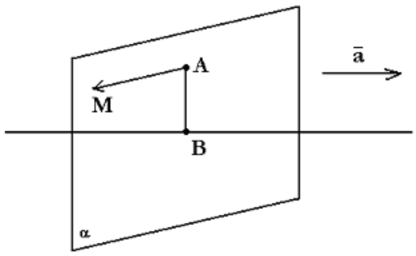


Рис. 45

Проекцию точки А на прямую можно рассматривать как точку пересечения данной прямой с проектирующей плоскостью (α), содержащей точку А и перпендикулярной к данной прямой.(Рис. 45) Запишем уравнение проектирующей плоскости, выбрав на ней текущую точку M(x,y,z) и, используя условие ортогональности векторов $\overline{AM}(x-1, y-2, z-1)$ и $\bar{a}(3;-1;2)$, где $\bar{a}$ - направляющий вектор данной прямой. Векторной уравнение плоскости (α) имеет вид: $(\bar{a}, \overline{AM}) = 0$. Раскрывая скалярное произведение, получим общее уравнение проектирующей плоскости:
$3(x-1)-1(y-2)+2(z-1)=0$ или $3x-y+2z-3=0$.
Далее найдем точку $B(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2)$ как точку пересечения прямой с плоскостью (см. задачу 3). Это и будет проекция точки А на прямую.

Задача Найти проекцию точки А(4,-3,1) на плоскость $x+2y-z-3=0$

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

$$\begin{cases} x=t+4 \\ y=2t-3 \\ z=-t+1 \\ x+2y-z-3=0 \end{cases}$$

$t=1, P(5,-1,0)$

6. Кривые второго порядка.

Определение. **Кривой второго порядка** называется линия, определяемая в декартовой системе координат на плоскости уравнением второй степени:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{6.1}$$

где коэффициенты A, B, C не равны нулю одновременно.

Существуют всего три типа линий второго порядка:

1. эллипс (и его частный вид – окружность),
2. гипербола,
3. парабола,

либо их вырожденные варианты. Случаи вырождения кривых второго порядка в прямую, пару прямых, точку или «мнимую» линию мы рассматривать не будем.

Определить тип кривой можно сразу по коэффициентам квадратичной формы $Ax^2+2Bxy+Cy^2$:

если $AC-B^2>0$ – эллиптический,

если $AC-B^2<0$ – гиперболический,

если $AC-B^2=0$ – параболический тип.

Для построения кривой необходимо сначала упростить уравнение (1), привести его к каноническому виду. Рассмотрим свойства и канонические уравнения перечисленных кривых.

Окружность

Определение. **Окружность** есть геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки – центра на данное расстояние – радиус.

Окружность определена, если заданы её центр и радиус.

Каноническое уравнение окружности с центром в точке $C(x_0;y_0)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Полагая $x_0=0, y_0=0$, получим *уравнение окружности с центром в начале координат:*

$$x^2+y^2=R^2.$$

Эллипс

Определение. **Эллипсом** называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (её принято обозначать $2a$).

Для того, чтобы получить ур-ие эллипса в простом виде ось OX направим через фокусы, а начало координат поместим в середине отрезка, соединяющего фокусы. Пусть M(x,y) – любая точка эллипса. По определению эллипса

$$\left|\overline{F_1M}\right|+\left|\overline{F_2M}\right|=2a$$

Обозначим расстояние между фокусами через $2c$. Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$.

Длина первого вектора $\left|\overline{F_1M}\right|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

и второго $\left|\overline{F_2M}\right|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, т.о.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

Возведем в квадрат $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ и получим

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

Еще раз возведем его в квадрат и получим

$$x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

По свойству сторон треугольника $2a>2c\Rightarrow a^2-c^2>0$

Обозначим a^2-c^2 через b^2 и разделим обе части последнего равенства на $a^2\left(a^2-c^2\right)$ и получим

Каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат и полуосями a и b

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Эллипс имеет форму, изображенную на рис. 47. Точка $O(0;0)$ называется центром эллипса, точки $A_1(a;0), A_2(-a;0), B_1(0;b), B_2(0;-b)$ называются вершинами эллипса, $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ – фокусами эллипса. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно большой и малой осями эллипса, а числа a и b

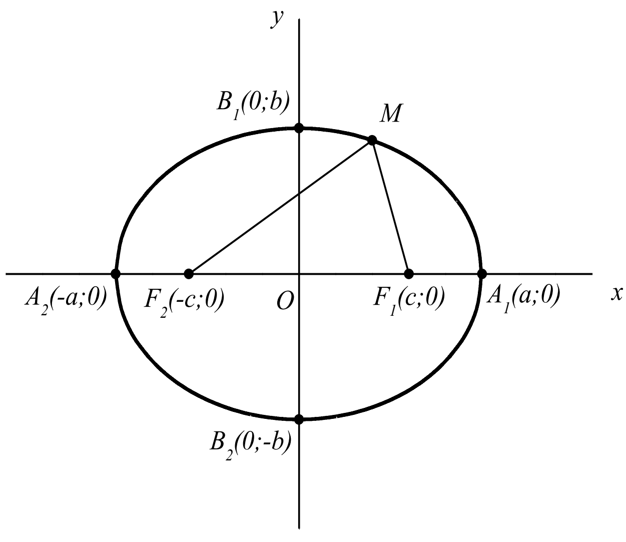


Рис. 47.

соответственно большой и малой полуосями эллипса. Длина отрезка F_1F_2, равная $2c$, называется фокусным расстоянием, а c – полуфокусным расстоянием. Величины a и b связаны соотношением $b^2 = a^2 - c^2$.

Если $a < b$, то уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ определяет эллипс, большая ось которого $2b$ лежит на оси Oy, а малая $2a$ – на оси Ox, фокусы такого эллипса находятся на оси Oy в точках $F_1(0;c)$ и $F_2(0;-c)$, а $c^2 = b^2 - a^2$.

Каноническое уравнение эллипса со смещенным центром имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

центр эллипса находится в точке с координатами $(x_0; y_0)$ рис. 48.

Чтобы построить эллипс по его уравнению $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, надо:

1. найти a и b,
2. на оси Ox в обе стороны от начала координат отложить отрезки длины a,
3. на оси Oy в обе стороны от начала координат отложить отрезки длины b,
4. через концы всех четырех отрезков провести прямые, параллельные осям координат (получили основной прямоугольник эллипса),
5. в полученный прямоугольник вписать эллипс. (Если требуется более точный чертеж, можно найти из уравнения еще несколько точек эллипса.)

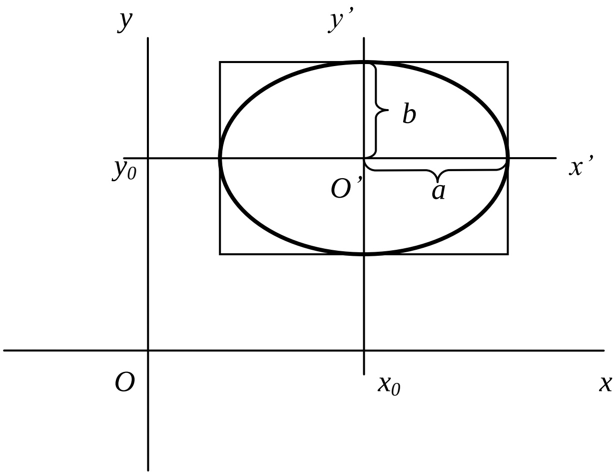


Рис. 48.

Для построения эллипса, заданного уравнением $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$, необходимо сначала нанести положение центра $O'(x_0; y_0)$ на координатную плоскость, провести через центр эллипса оси симметрии $O'x'$ и $O'y'$, построить основной прямоугольник с центром в точке $O'(x_0; y_0)$ со сторонами $2a$ и $2b$, вписать в него эллипс (рис. 48).

Определение. Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и характеризует форму (степень сжатия) эллипса.

Для эллипса $0 < \varepsilon < 1$, так как $0 < c < a$. С учетом $b^2 = a^2 - c^2$ можно записать

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Чем больше эксцентриситет, тем больше эллипс отличается от окружности (более «сплющен»).

Определение. Директрисами эллипса называются прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, где a – большая полуось (рис. 49).

Свойство директрис состоит в следующем. Если r – расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\dfrac{r}{d}$ есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$.

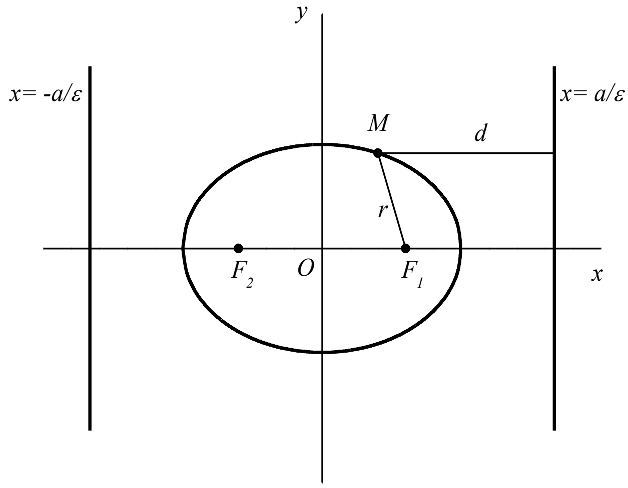


Рис. 49.

Гипербола

Определение. **Гиперболой** называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами, взятая по абсолютной величине, постоянна. Абсолютную величину этой разности принято обозначать $2a$.

Каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат и полуосями действительной a и мнимой b записывается в виде:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гипербола имеет форму, изображенную на рис. 50. Точка $O(0;0)$ называется центром гиперболы, точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ называются вершинами гиперболы, $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ – фокусами гиперболы. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно действительной и мнимой осями гиперболы. Числа a и b называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы. Длина отрезка F_1F_2, равная $2c$, называется фокусным расстоянием, а c – полуфокусным расстоянием. Величины a и b связаны соотношением $c^2 = a^2 + b^2$. Гипербола – кривая, симметричная относительно начала координат и координатных осей. В отличие от эллипса гипербола незамкнутая кривая, имеющая ***асимптоты*** – прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются, не пересекая их и не касаясь. Уравнения асимптот

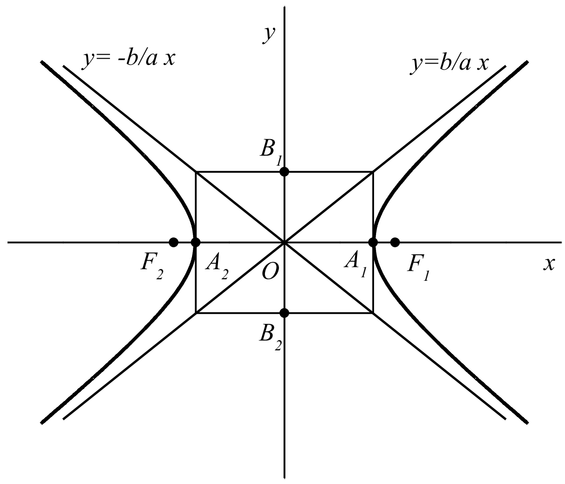


Рис. 50.

$$y = \frac{b}{a}x \text{ и } y = -\frac{b}{a}x.$$

Каноническое уравнение гиперболы со смещенным центром:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Центр гиперболы находится в точке с координатами $(x_0;y_0)$.

Рассмотрим другие варианты уравнений гиперболы. Уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

является каноническим уравнением гиперболы с центром в начале координат и полуосями – действительной b и мнимой a. Т.е. в этом случае вершины гиперболы $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ находятся на оси Oy.

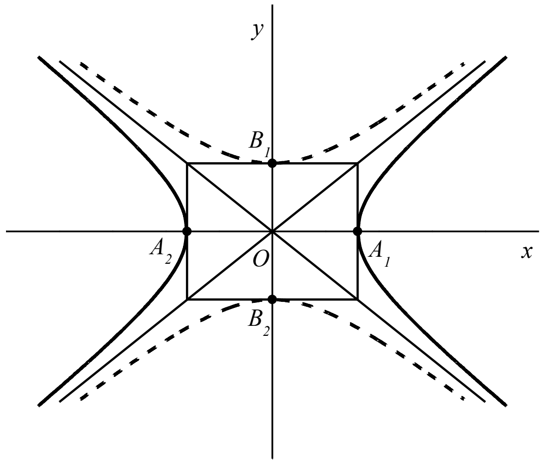


Рис. 51.

Гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ имеют общие асимптоты (рис. 51). Такие гиперболы называются ***сопряженными***. На рис. 51 гипербола $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ изображена пунктирной линией. Уравнение $-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ определяет гиперболу с центром в точке с координатами $(x_0;y_0)$ и полуосями – действительной b и мнимой a.

Определить какая ось действительная, а какая мнимая, легко по уравнению гиперболы, знак «+» перед квадратом переменной указывает на действительную ось, знак «–» указывает на мнимую ось.

Если в уравнении гиперболы $a=b$, гипербола называется равнобочной или равносторонней.

Чтобы построить гиперболу по её уравнению $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ или $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, надо:

1. найти a и b,
2. на оси Ox в обе стороны от начала координат отложить отрезки длины a,
3. на оси Oy в обе стороны от начала координат отложить отрезки длины b,
4. построить основной прямоугольник, проведя через концы всех четырех отрезков прямые, параллельные осям координат,
5. построить асимптоты гиперболы, для этого в полученном основном прямоугольнике провести прямые, содержащие диагонали прямоугольника,
6. отметить вершины гиперболы – точки пересечения основного прямоугольника с действительной осью гиперболы,
7. построить гиперболу. (Если требуется более точный чертеж, можно найти из уравнения еще несколько точек гиперболы)

Для построения гиперболы, заданной уравнением $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ или $-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, необходимо сначала нанести положение центра $O'(x_0;y_0)$ на координатную плоскость, провести через центр оси симметрии $O'x'$ и $O'y'$. Построить основной прямоугольник с центром в точке $O'(x_0;y_0)$ и сторонами $2a$ и $2b$, провести диагонали прямоугольника, отметить вершины гиперболы на действительной оси и провести кривую (рис. 52).

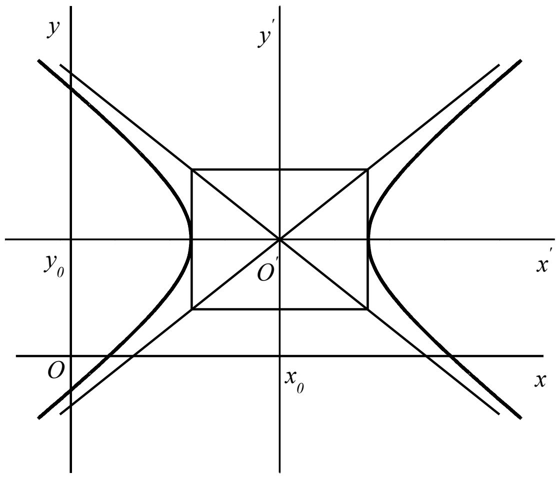


Рис. 52.

Определение. Эксцентриситетом гиперболы, так же как и эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к величине действительной оси:

$$\varepsilon=\frac{c}{a},$$

здесь c – полуфокусное расстояние, a – действительная полуось.

Для гиперболы $\varepsilon>1$, так как $c>a$. С учетом $c^2=a^2+b^2$ можно записать

$$\varepsilon=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем меньше отношение $\frac{b}{a}$, и тем больше вытянут её основной прямоугольник.

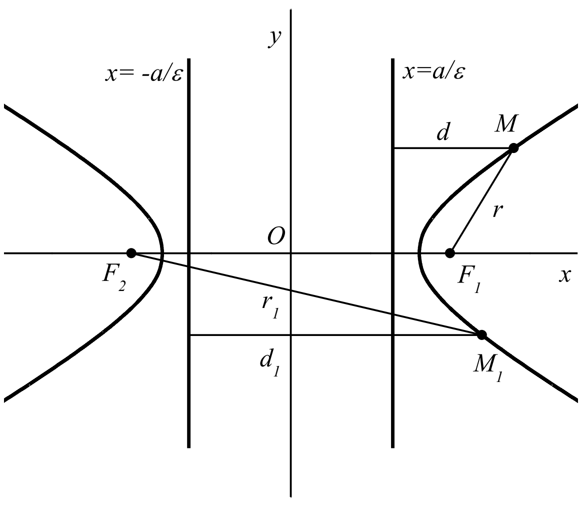


Рис. 53.

Определение. Директрисами гиперболы называются прямые $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, где a – действительная полуось (рис. 53). Директрисы гиперболы имеют то же свойство, что и директрисы эллипса. Если r – расстояние от произвольной точки гиперболы до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы $\frac{r}{d}=\varepsilon$.

Парабола

Определение. **Параболой** называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

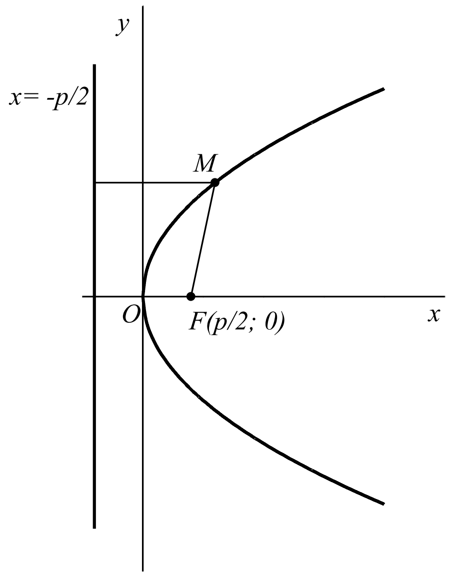


Рис. 54.

Расстояние от фокуса до директрисы называется параметром параболы и обозначается через p $(p>0)$. *Каноническое уравнение параболы симметричной относительно оси Ox с вершиной в начале координат:*

$$y^2 = 2px.$$

Т.к. $p>0$, $x \geq 0$ ветви параболы направлены вправо (рис. 54). Директриса параболы определяется уравнением $x = -\dfrac{p}{2}$, фокус находится в точке $F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$. Параметр p характеризует ширину параболы.

Рассмотрим другие варианты уравнений параболы, и особенности расположения кривых на координатной плоскости. Парабола

$$y^2 = -2px$$

также симметрична относительно оси Ox, вершина её находится в начале координат, но ветви ($p>0$, $x \leq 0$) направлены влево (рис. 55).

Уравнения

$$x^2 = \pm 2py$$

задают параболу симметричную относительно оси Oy с вершиной в начале координат. Знак «плюс» соответствует параболе с ветвями, направленными вверх. Знак «минус» соответствует параболе с ветвями, направленными вниз (рис. 55).

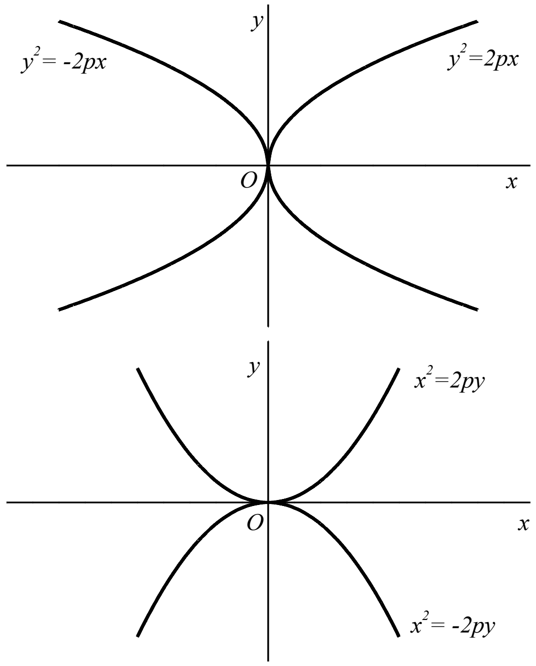


Рис. 55.

Уравнения $(y-y_0)^2 = \pm 2p(x-x_0)$ и $(x-x_0)^2 = \pm 2p(y-y_0)$ *определяют параболы со смещенной вершиной.* Вершина находится в точке с координатами $(x_0;y_0)$. Ось симметрии параллельна той координатной оси, координата которой входит в уравнение в первой степени, знак указывает направление ветвей параболы (вправо или влево, вверх или вниз).

Чтобы построить параболу необходимо:

1. определить координаты вершины,
2. определить ось симметрии,
3. определить направление ветвей,
4. для более точного построения графика из уравнения параболы найти несколько точек кривой. Иногда для уточнения графика бывает удобно использовать параметр p (рис. 56).

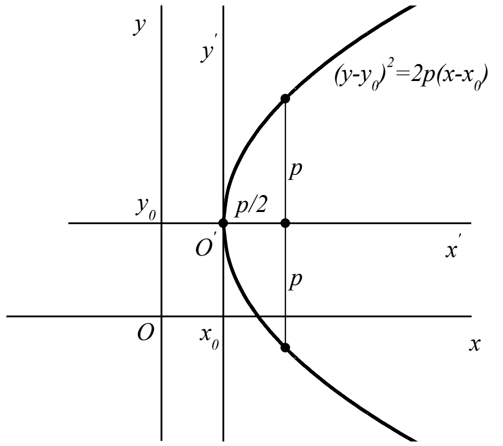


Рис. 56.

Примеры решения задач.

1. Привести к каноническому виду уравнение $2x^2+2y^2+5x-2y-6=0$.

Решение. Сгруппируем члены уравнения, содержащие x и содержащие y, вынесем за скобки постоянные множители при x^2 и y^2:

$$2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)+2\left(y^2-y\right)-6=0.$$

Выражения в скобках дополним до полного квадрата, имея в виду формулу $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$$2\left(x^2+2\cdot\frac{5}{4}x+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}\right)+2\left(y^2-2\cdot\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-6=0,$$

$$2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-2\cdot\frac{25}{16}+2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{4}-6=0,$$

$$2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{77}{8}=0,$$

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{77}{16}.$$

Уравнение $\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{77}{16}$ есть каноническое уравнение окружности с центром в точке с координатами $\left(-\frac{5}{4};\frac{1}{2}\right)$ и радиусом $\frac{\sqrt{77}}{4}$.

2. Построить кривую $x=2+\frac{\sqrt{1-4y^2}}{2}$.

Решение. Проведем несложные преобразования:

$$2(x-2)=\sqrt{1-4y^2}\,,\qquad 4(x-2)^2=1-4y^2,\qquad (x-2)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

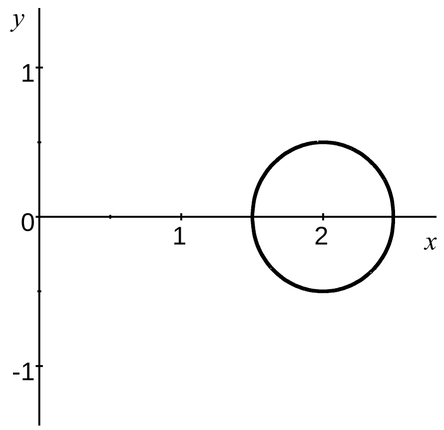


Рис. 57.

.

Уравнение определяет окружность с центром в точке $C(2;0)$ и радиусом $R=\dfrac{1}{2}$ (рис. 57.).

3. Построить кривую, заданную уравнением $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.

Решение. Сгруппируем члены уравнения, содержащие x и содержащие y, вынесем за скобки постоянные множители при x^2 и y^2, а выражения в скобках дополним до полного квадрата:

$$4(x^2-10x+25-25)+9(y^2+4y+4-4)+100=0,$$

$$4(x-5)^2-100+9(y+2)^2-36+100=0,$$

$$4(x-5)^2+9(y+2)^2=36,$$

$$\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1.$$

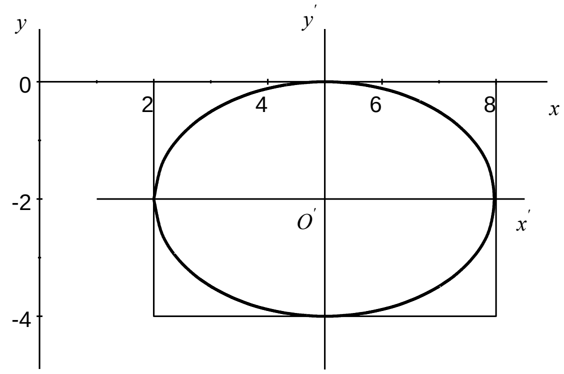


Рис. 58.

Получили уравнение эллипса с центром в точке $O'(5;-2)$ и полуосями $a=3$ и $b=2$ (рис. 58).

5. Построить линию, заданную уравнением

$$9x^2-16y^2-54x-64y-127=0.$$

Решение.

Сгруппируем члены уравнения, содержащие x и содержащие y, вынесем за скобки постоянные множители при x^2 и y^2, а выражения в скобках дополним до полного квадрата:

$$9(x^2-6x+9-9)-16(y^2+4y+4-4)-127=0$$

,

$$9(x-3)^2-81-16(y+2)^2+64-127=0,$$

$$9(x-3)^2-16(y+2)=144,$$

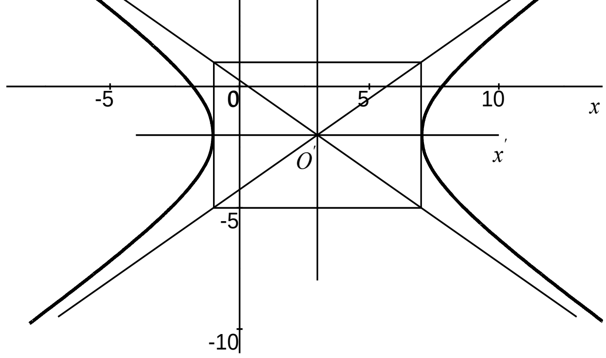


Рис. 59.

$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$. Получили уравнение гиперболы с центром в точке $O'(3;-2)$ и полуосями $a=4$ и $b=3$ (рис.59).

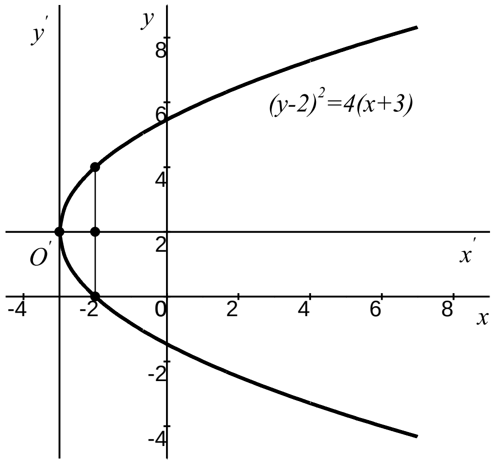


Рис. 60.

7. Построить линию, заданную уравнением $y=2+2\sqrt{x+3}$.

Решение.

Преобразуем исходное уравнение $y-2=2\sqrt{x+3}$, $(y-2)^2=4(x+3)$. Вершина параболы находится в точке $O'(-3;2)$. В данном уравнении переменная x входит в уравнение в первой степени, т. е. ось симметрии параллельна Ox. Ветви параболы направлены вправо. Параметр $p=2$. Построение параболы приведено на рисунке 60.

8. Построить кривую, заданную уравнением $x^2-6x+6y+3=0$.

Решение. Сгруппируем члены уравнения, содержащие x, выражение в скобках дополним до полного квадрата: $(x^2-6x+9-9)+6y+3=0$,

$(x-3)^2+6y-6=0$,

$(x-3)^2=-6(y+1)$ получили уравнение параболы с вершиной в точке $O'(3;-1)$, ось симметрии, которой параллельна оси Oy, а ветви направлены вниз. Параметр $p=3$, точка пересечения с осью Oy. $(0;-2{,}5)$,(рис.61).

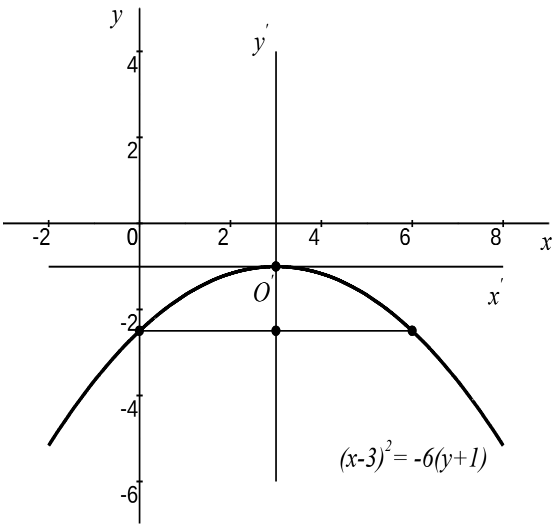


Рис.61.