Латинские буквы и их названия

$A\ a$	а	$N\ n$	эн
$B\ b$	бэ	$O\ o$	о
$C\ c$	цэ	$P\ p$	пэ
$D\ d$	дэ	$Q\ q$	ку
$E\ e$	э	$R\ r$	эр
$F\ f$	эф	$S\ s$	эс
$G\ g$	же	$T\ t$	тэ
$H\ h$	аш (ха)	$U\ u$	у
$I\ i$	и	$V\ v$	вэ
$J\ j$	йот (жи)	$W\ w$	дубль-вэ
$K\ k$	ка	$X\ x$	икс
$L\ l$	эль	$Y\ y$	игрек
$M\ m$	эм	$Z\ z$	зэт

Греческие буквы и их названия

$\mathrm{A}\ \alpha$	альфа	$\mathrm{N}\ \nu$	ню
$\mathrm{B}\ \beta$	бэта	$\Xi\ \xi$	кси
$\Gamma\ \gamma$	гамма	$\mathrm{O}\ \mathrm{o}$	омикрон
$\Delta\ \delta$	дельта	$\Pi\ \pi$	пи
$\mathrm{E}\ \varepsilon$	эпсилон	$\mathrm{P}\ \rho$	ро
$\mathrm{Z}\ \zeta$	дзета	$\Sigma\ \sigma$	сигма
$\mathrm{H}\ \eta$	эта	$\mathrm{T}\ \tau$	тау
$\Theta\ \vartheta$	тета	$\Upsilon\ \upsilon$	ипсилон
$\mathrm{I}\ \iota$	йота	$\Phi\ \varphi$	фи
$\mathrm{K}\ \varkappa$	каппа	$\mathrm{X}\ \chi$	хи
$\Lambda\ \lambda$	ламбда	$\Psi\ \psi$	пси
$\mathrm{M}\ \mu$	мю	$\Omega\ \omega$	омега

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Множество. Числовые множества.

Понятие множества принадлежит к числу первичных, не определяемых через более простые.

Под *множеством* понимается совокупность (набор) некоторых объектов. Объекты, которые образуют множество, называются *элементами* или *точками* этого множества. Примерами множеств являются: множество натуральных чисел, множество коммерческих банков и т.п.

Множества обычно обозначаются большими буквами латинского алфавита A,B,X,…Элементы множества обычно обозначаются малыми буквами: $a \in A$ и читается «а принадлежит множеству А». Запись $a \notin A$ означает, что а не является элементом множества А. Элементы множества выписываются подряд и заключаются в фигурные скобки A = {a,b,c}.

Если X – некоторое множество, а P – какое-то свойство, то запись $\{x \in X\text{: } P\}$ обозначает совокупность элементов множества X, обладающих свойством P.

Числовые множества – множества, элементами которых являются числа.

В курсе математики приняты следующие стандартные обозначения:

N = {1, 2, 3…} - множество *натуральных* чисел,

Z = {…,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}- множество целых чисел,

Q - множество *рациональных* чисел, совокупность целых и дробных чисел (отношение двух целых или бесконечная периодическая дробь).

множество иррациональных чисел (бесконечная непериодическая дробь).

Примеры иррациональных чисел: $e \approx 2.72$ - основание натурального логарифма,

$\pi \approx 3.14$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$….

R – множество *действительных* чисел, совокупность рациональных и иррациональных чисел (бесконечная непериодическая дробь).

Действительные числа изображаются точками координатной прямой (числовой оси) Ox.

Рис. 1.1. Числовая ось

Между множеством действительных чисел R и точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому часто вместо «число x» говорят «точка x».

Множество действительных чисел дополняют двумя элементами, обозначаемыми $-\infty$ и $+\infty$ и называемыми *минус бесконечность* и *плюс бесконечность*. Множество R, дополненное элементами $-\infty$ и $+\infty$, называется *расширенным множеством действительных чисел* (расширенной числовой прямой).

Бесконечности $-\infty$ и $+\infty$ называются еще бесконечно удаленными точками.

Предполагается, что для бесконечно удаленных точек справедливы следующие правила:

$$x \pm \infty = \infty;$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0;$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \ \textit{если} \ \ x > 0;$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty, \ \textit{если} \ \ x < 0.$$

Полезно представлять, что $-\infty$ на числовой оси находится левее всех чисел, а $+\infty$ – правее всех чисел.

Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа x называется само число x, если x неотрицательно, и число – x, если x отрицательно:

$$|x| = \begin{cases} x, \textit{ если } x \geq 0, \\ -x, \textit{ если } x < 0. \end{cases}$$

Интервал (a – ε, a + ε), т.е. множество точек, таких, что

$$|x - a| < \varepsilon,$$

где ε > 0, называется ε – окрестностью точки a.

Неравенства между действительными числами на координатной прямой получают простое истолкование. Если $x_1 > x_2$, то точка с координатой x_1 лежит правее точки с координатой x_2. Расстояние между точками M_1 и M_2 координатной прямой равно абсолютной величине разности их координат x_2 и x_1: $M_1M_2 = |x_2 - x_1|$.

Простейшие числовые множества называются числовыми промежутками. Пусть a и $в$ действительные числа и $a < в$. Тогда

$[a,b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ – замкнутый промежуток (отрезок или сегмент),

$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$ – открытый промежуток (интервал),

$(a,b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$ – открытый слева промежуток,

$[a,b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$ – открытый справа промежуток,

$[a,+\infty) = \{x \in R : a \leq x < +\infty\}$ – бесконечный промежуток (числовой луч),

$(-\infty, b] = \{x \in R : -\infty < x \le b\}$ – бесконечный промежуток (числовой луч),

$(a, +\infty) = \{x \in R : a < x < +\infty\}$ – бесконечный промежуток (открытый числовой луч),

$(-\infty, b) = \{x \in R : -\infty < x < b\}$ – бесконечный промежуток (открытый числовой луч).

Элементы логики.

При записи математических утверждений широко используется *специальная символика* (логические символы). Использование логических символов не только облегчает запись, но и способствует усвоению материала.

1. $\forall$ - знак общности. Запись $\forall x$ означает «для любого x», «для каждого x».Ǝ

2. Ǝ - знак существования. Запись Ǝ x означает «существует x».

3. Пусть А и В некоторые высказывания. Составное выражение «если А, то В» принято обозначать $A \Rightarrow B$. Эта запись означает, что А является достаточным условием для В, а В необходимым для А. Если же А $\Rightarrow$ В и $B \Rightarrow A$, тогда А является необходимым и достаточным условием для В и наоборот. В этом случае принято обозначение $A \Leftrightarrow B$, которое можно прочесть еще и так: «А имеет место тогда и только тогда, когда имеет место В»

4. Запись $\overset{def}{=}$ читается «равенство, справедливое по определению»

Опр. Множество X называется ограниченным сверху, если существует число M такое, что для $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \le M$. Число M называется верхней границей множества X.

Опр. Множество X называется ограниченным снизу, если существует число m такое, что для $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \ge m$. Число m называется нижней границей множества X.

Опр. Множество, ограниченное и сверху и снизу называется ограниченным.

Пример. Множество N = {1,2,3…} натуральных чисел ограничено снизу ($\inf N = 1 \in N$), но не ограничено сверху.

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Когда мы наблюдаем какой-нибудь процесс или явление, то видим, что одни величины сохраняют свои значения, другие же принимают различные значения.

Переменной величиной называется такая величина, которая при выполнении некоторого комплекса условий, может принимать различные значения.

Постоянной величиной называется такая величина, которая при выполнении некоторого комплекса условий, сохраняет одно и то же значение.

Переменные величины обычно обозначаются последними буквами латинского алфавита (x, y, z, u, v, w), а постоянные – первыми (a, b, c).

Изучая какое-нибудь явление, мы обычно имеем дело с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что каждым значениям одних величин соответствуют значения других.

Во всех этих примерах общим является то, что каждому числовому значению одной величины сопоставляется определенное числовое значение другой.

Дадим теперь определение понятия функции, являющегося центральным понятием математического анализа, причем вначале ограничимся случаем двух переменных величин.

Пусть заданы два множества Х и У.

Опр. Правило f, сопоставляющее каждому числу $x \in X$ единственное число $y \in Y$, называется *функцией*, заданной на множестве X и принимающей значения на множестве Y.

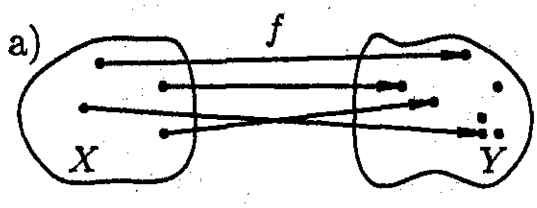
Итак, задание функции предполагает задание трех объектов:

1) множества X,

2) множества $У$ и

3) правила f, закона соответствия между элементами x и y этих множеств.

О функции говорят, что она действует из X в Y и пишут: f: $X \to Y$.



Иногда функцией называют также уравнение $y = f(x)$, т.е. формулу, где y выражено через x с помощью правила f. В уравнении $y = f(x)$ переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом*, а y – *зависимой переменной*. О величинах x и y говорят, что они связаны функциональной зависимостью.

Множество всех значений независимой переменной, для которых определена функция (т.е. при которых функция $y = f(x)$ вообще имеет смысл), называется *областью определения* или областью существования функции и обозначается $D(f)$.

$$y = \frac{5}{x-3}, \quad D(f):\ x \neq 3.$$

Множество всех значений функции называют областью значений функции $y = f(x)$ и обозначается $E(f)$.

Способы задания функции

Различают три способа задания функции: 1) аналитический, 2) табличный и 3) графический.

Аналитический способ. Если функция выражена при помощи формулы, то говорят, что она задана *аналитически*.

При аналитическом способе задания функция может быть задана *явно*, когда дано выражение $y = f(x)$:

$$y = \frac{1}{x};$$

неявно, когда x и y связаны между собой уравнением вида $F(x, y) = 0$:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0;$$

параметрически, когда x и y выражены через третью переменную величину t, называемую параметром:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi .$$

Аналитический способ удобен для выполнения математических действий над функцией. К недостаткам аналитического способа задания следует отнести то, что он не очень нагляден.

Табличный способ. Этот способ является наиболее простым. В одном столбце записывают значения аргумента x, а во втором - значения $f(x)$.

Такой способ задания функции часто применяется в тех случаях, когда область определения состоит из конечного числа значений. Широко используются таблицы значений различных функций: в таблицах тригонометрических функций, логарифмов и т.п. В виде таблиц записываются результаты экспериментального исследования каких-либо процессов и явлений.

Пример 2. Рост числа научных изданий. Рост числа научных изданий y, начиная с 1750 г. С интервалом в 50 лет, в зависимости от года x, выглядит (округленно) следующим образом:

x	1750 г.	1800 г.	1850 г.	1900 г.	1950 г.
y	10	100	1 000	10 000	100 000

К недостаткам табличного способа можно отнести то, что представление о функциональной зависимости здесь не является полным, так как невозможно поместить в таблице все значения аргумента.

Графический способ. Аналитический и табличный способы задания функции страдают отсутствием наглядности. Графический способ не имеет такого недостатка. *Графическим способом* называется такой способ задания функции *y = f(x)*, при котором соответствие между аргументом *x* и функцией *y* устанавливается с помощью графика.

Опр. Рассмотрим на плоскости прямоугольную систему координат. Графиком функции y = f(x) называют множество точек M(x, f(x)) плоскости, т.е. множество точек, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Основные понятия, связанные с функцией

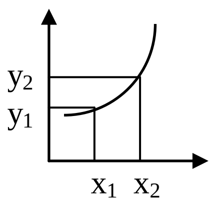
Под основными свойствами функции будем понимать:

1) область определения функции *D*(*f*);
2) область изменения функции *E*(*f*);
3) монотонность;
4) ограниченность;
5) четность, нечетность;
6) периодичность.

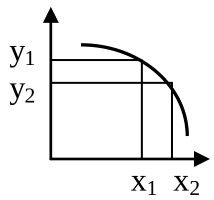
Первые два свойства мы уже рассмотрели, рассмотрим остальные свойства.

Опр. Функция y = f(x) называется на множестве X

1) возрастающей, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции: если из $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \forall x_1, x_2 \subset X$



1) убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции: если из $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \forall x_1, x_2 \subset X$

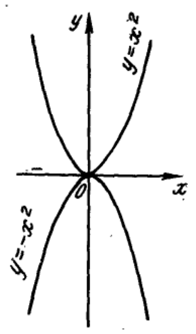


Возрастающие и убывающие функции называются также строго монотонными.

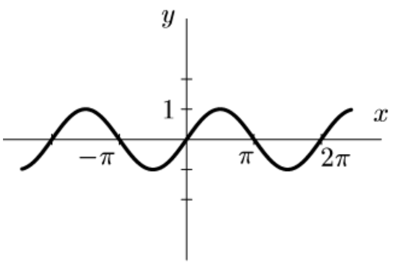
Опр. Функция y = f(x) называется на множестве X

1) ограниченной сверху, если существует такое число M, что для всех $x \subset X$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$. График функции ниже прямой y = M

2) ограниченной снизу, если существует такое число m, что для всех $x \subset X$ выполняется неравенство $f(x) \geq m$. График функции выше прямой y = m



3) ограниченной, если она ограничена сверху и снизу, т.е. существуют такие числа m и M, что для всех $x \subset X$ выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$. График функции между прямыми y = m и y = M.



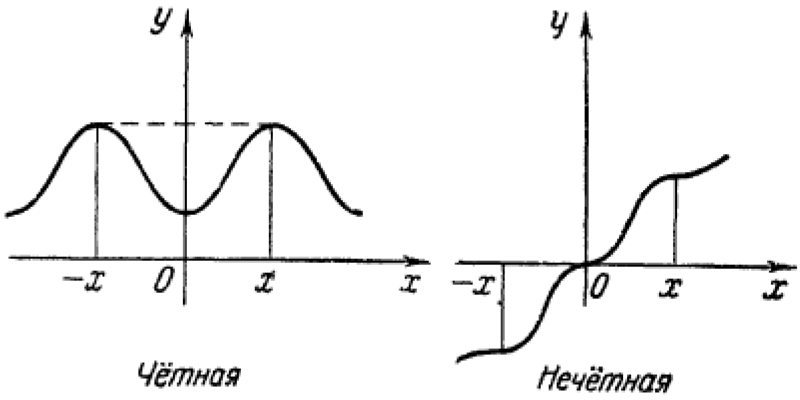
Опр. Функция y = f(x) называется на множестве X

1) четной, если для $\forall\, x \subset X \quad f(-x) = f(x)$

2) нечетной, если для $\forall\, x \subset X \quad f(-x) = -f(x)$

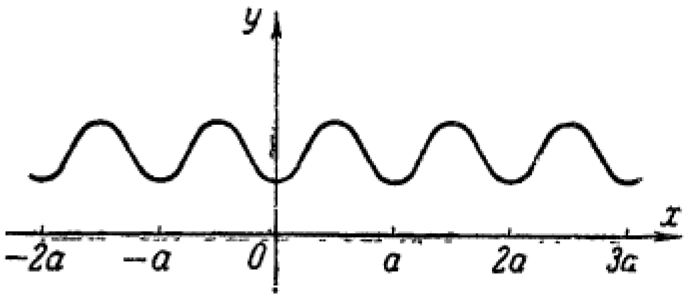
Предполагается, что область определения четных и нечетных функций симметрична относительно начала координат.

Из определения следует, что график четной функции симметричен относительно оси ОУ, нечетной – относительно начала координат.



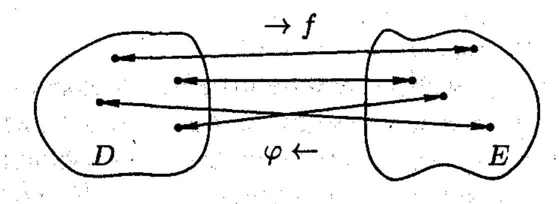
Опр. Функция y = f(x) называется периодической, если $\exists$ число T > 0 такое, что f(x+T) = f(x) для $\forall x \subset X$.

Наименьшее из всех T, удовлетворяющих этому условию, называется периодом функции.

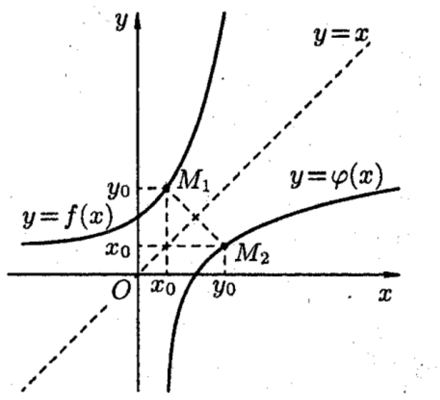


Опр. (Обратной функции)

Пусть функция y = f(x) монотонна в своей области определения X и имеет область изменения У = { f(x) } . Тогда каждому значению $x \subset X$ соответствует единственное значение $y \subset У$ и наоборот. В этом случае можно построить новую функцию , определенную на множестве У такую, что каждому
$y \subset У$ ставится в соответствие $x \subset X$, удовлетворяющее уравнению y = f(x). Эта новая функция называется обратной по отношению к функции y = f(x).



Для нахождения функции, обратной данной y = f(x), надо выразить x через y: x=φ(y), а затем записать полученную функцию в общепринятой форме $y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов(прямой y=x)



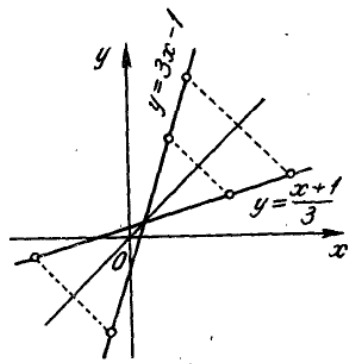
Задача. Найти функцию, обратную функции $y = 3x - 1$.

Решение. Находим из данного уравнения x в зависимости от y:

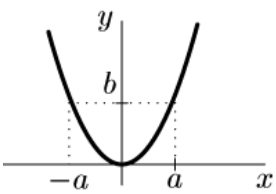
$$x = \frac{y+1}{3}.$$

Заменяя в этом равенстве x на y, а y на x, получаем окончательно

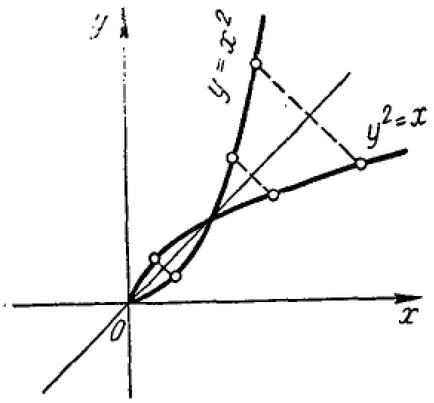
$$y = \frac{x+1}{3}.$$



Пример. Найти обратную функцию для функции y=x^2 на промежутке (0, $+\infty$,].



$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$



Основные элементарные функции

К *основным элементарным функциям* относят пять классов функций:

1) степенные $y = x^\alpha$ (α — действительное число);

2) показательные $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$;

3) логарифмические $y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$;

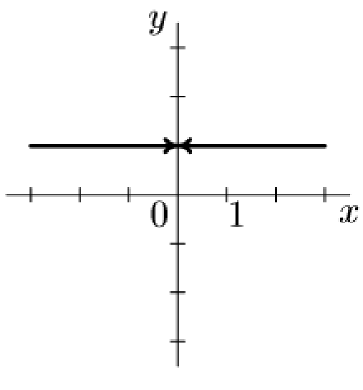
4) тригонометрические: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

5) обратные тригонометрические: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

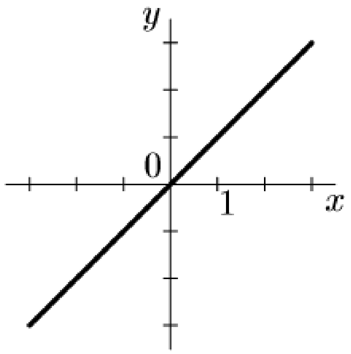
Приведем в качестве справочного материала их свойства и графики.

1) степенные функции

1. $y = x^0$:

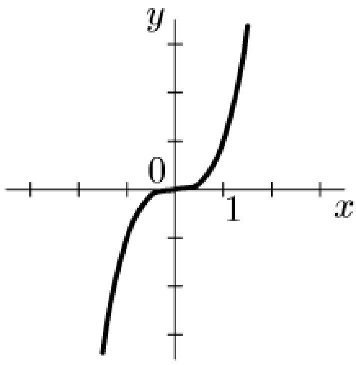


1) $D(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
2) $E(f) = \{1\}$;
3) четная: $(-x)^0 = x^0$;
4) постоянна на $(-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
5) ограниченная;
6) непериодическая.



2. $y = x$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) нечетная: $(-x)^1 = -x^1$;
4) возрастает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.



3. $y = x^n$,
n — нечетное натуральное число $\geqslant 3$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) нечетная: $(-x)^n = -x^n$;
4) возрастает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

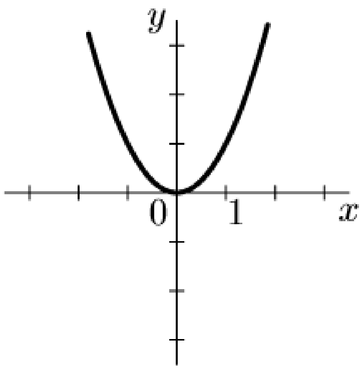
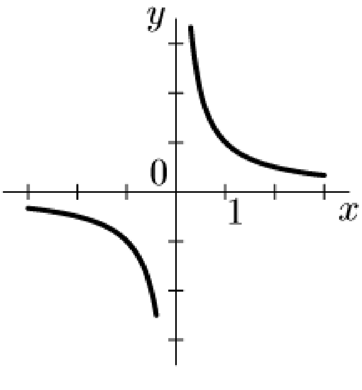


Рис. 2.4

4. $y = x^n$,
n — четное натуральное число:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = [0,\ +\infty)$;
3) четная: $(-x)^n = x^n$;
4) убывает на $(-\infty,\ 0)$,
возрастает на $[0,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

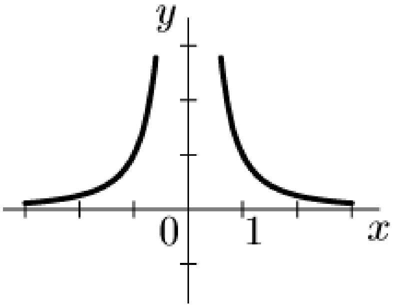


5. $y = x^{-n}$,
n — нечетное натуральное число:

1) $D(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
3) нечетная: $(-x)^{-n} = -x^{-n}$;
4) убывает на $(-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

6. $y = x^{-n}$,
n — четное натуральное число:

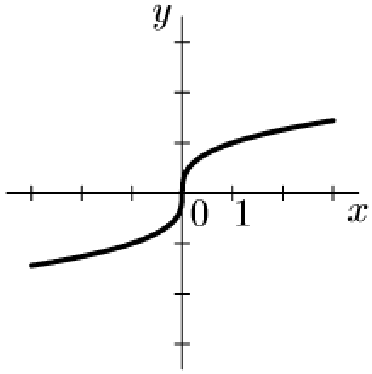
1) $D(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;



2) $E(f) = [0,\ +\infty)$;

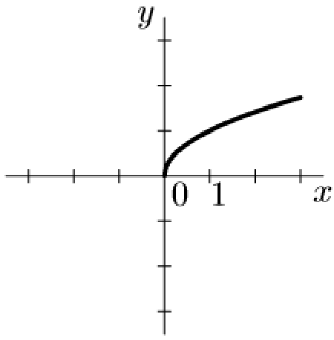
3) четная: $(-x)^{-n} = x^{-n}$;
4) возрастает на $(-\infty,\ 0)$,
убывает на $(0,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

7. $y = \sqrt[n]{x}$,
n — нечетное натуральное число:



1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) нечетная: $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$;
4) возрастает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

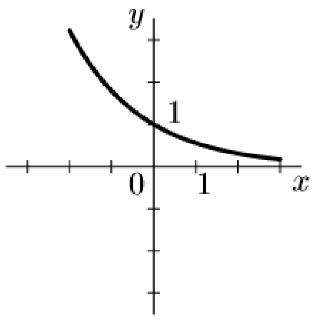
8. $y = \sqrt[n]{x}$,
n — четное натуральное число:



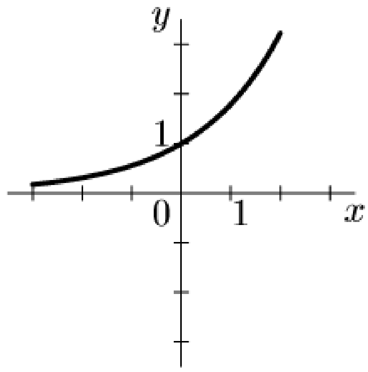
1) $D(f) = [0,\ +\infty)$;
2) $E(f) = [0,\ +\infty)$;
3) общего вида;
4) возрастает на $[0,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

2) показательные функции

1. $y = a^x, \qquad 0 < a < 1$:



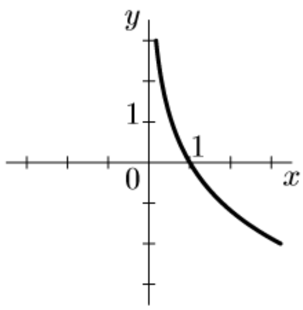
1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (0,\ +\infty)$;
3) общего вида;
4) убывает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.



2. $y = a^x, \qquad a > 1$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (0,\ +\infty)$;
3) общего вида;
4) возрастает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

3) логарифмические функции

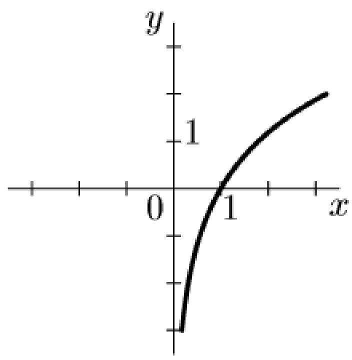


1. $y = \log_a x, \qquad 0 < a < 1$:

1) $D(f) = (0,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) общего вида;

убывает на $(0,\ +\infty)$;

5) неограниченная;
6) непериодическая.



1. $y = \log_a x, \qquad a > 1$:

1) $D(f) = (0,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) общего вида;

4) возрастает на $[0,\ +\infty)$;

5) неограниченная;
6) непериодическая.

4) тригонометрические функции

1. $y = \sin x$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = [-1,\ 1]$;
3) нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$;
4) возрастает на
$[-\pi/2 + 2\pi n,\ \pi/2 + 2\pi n]$,
убывает на
$[\pi/2 + 2\pi n,\ 3\pi/2 + 2\pi n]$,
$n \in \mathbb{Z}$;
5) ограниченная: $|\sin x| \leqslant 1$;
6) периодическая:
$\sin(x + T) = \sin x,\ \ T = 2\pi$.

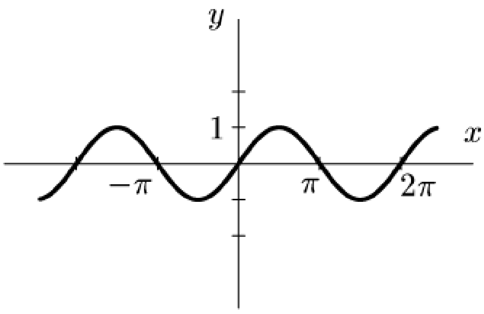


Рис. 2.13

2. $y = \cos x$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = [-1,\ 1]$;
3) четная: $\cos(-x) = \cos x$;
4) убывает на
$[2\pi n,\ \pi + 2\pi n]$,

Возрастает на [$-\pi+2\pi n$, $2\pi n$],

5) ограниченная: $|\cos x| \leqslant 1$;
6) периодическая:
$\cos(x + T) = \cos x,\ \ T = 2\pi$.

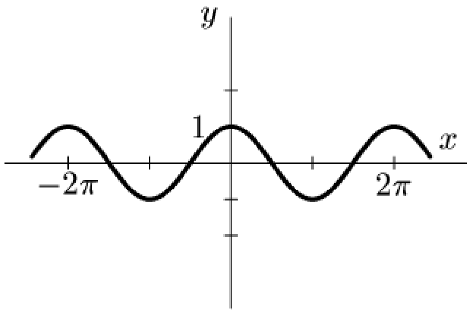


Рис. 2.14

3. $y = \operatorname{tg} x$:

1) $D(f) =$
$= (-\pi/2 + \pi n,\ \pi/2 + \pi n)$,
$n \in \mathbb{Z}$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$;
4) возрастает на
$(-\pi/2 + \pi n,\ \pi/2 + \pi n)$,
$n \in \mathbb{Z}$;
5) неограниченная;
6) периодическая:
$\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x,\ T = \pi$.

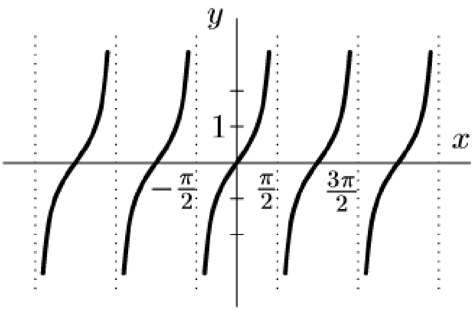


Рис. 2.15

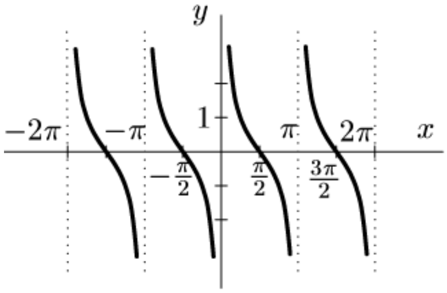
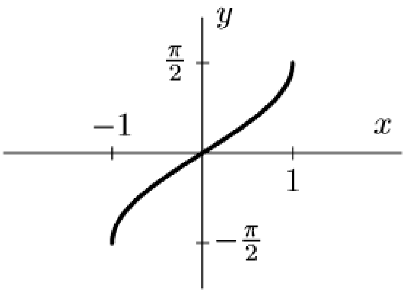


Рис. 2.16

3. $y = \operatorname{ctg} x$:

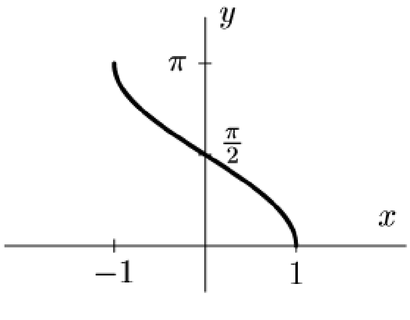
1) $D(f)= (\pi n,\ \pi + \pi n),\quad n \in \mathbb{Z}$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) нечетная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$;
4) убывает на $(\pi n,\ \pi + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}$;
5) неограниченная;
6) периодическая: $\operatorname{ctg}(x + T) = \operatorname{ctg} x,\ T = \pi$.

5) обратные тригонометрические функции



1. $y = \arcsin x$:

1) $D(f) = [-1,\ 1]$;
2) $E(f) = [-\pi/2,\ +\pi/2]$;
3) нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;
4) возрастает на $[-1,\ 1]$;
5) ограниченная: $|\arcsin x| \leqslant \pi/2$;
6) непериодическая.

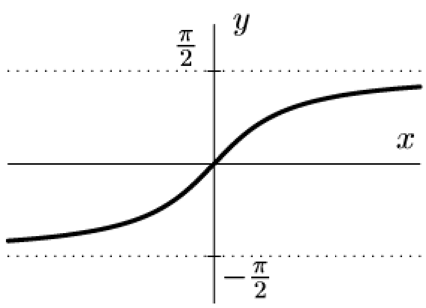


2. $y = \arccos x$:

1) $D(f) = [-1,\ 1]$;
2) $E(f) = [0,\ \pi]$;
3) общего вида: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;
4) убывает на $[-1,\ 1]$;
5) ограниченная: $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$;
6) непериодическая.

3. $y = \operatorname{arctg} x$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\pi/2,\ \pi/2)$;
3) нечетная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;
4) возрастает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) ограниченная: $|\operatorname{arctg} x| < \pi/2$;
6) непериодическая.



4. $y = \operatorname{arcctg} x$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (0,\ \pi)$;
3) общего вида:
$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$
4) убывает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) ограниченная: $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$;
6) непериодическая.

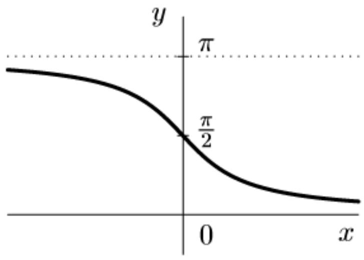
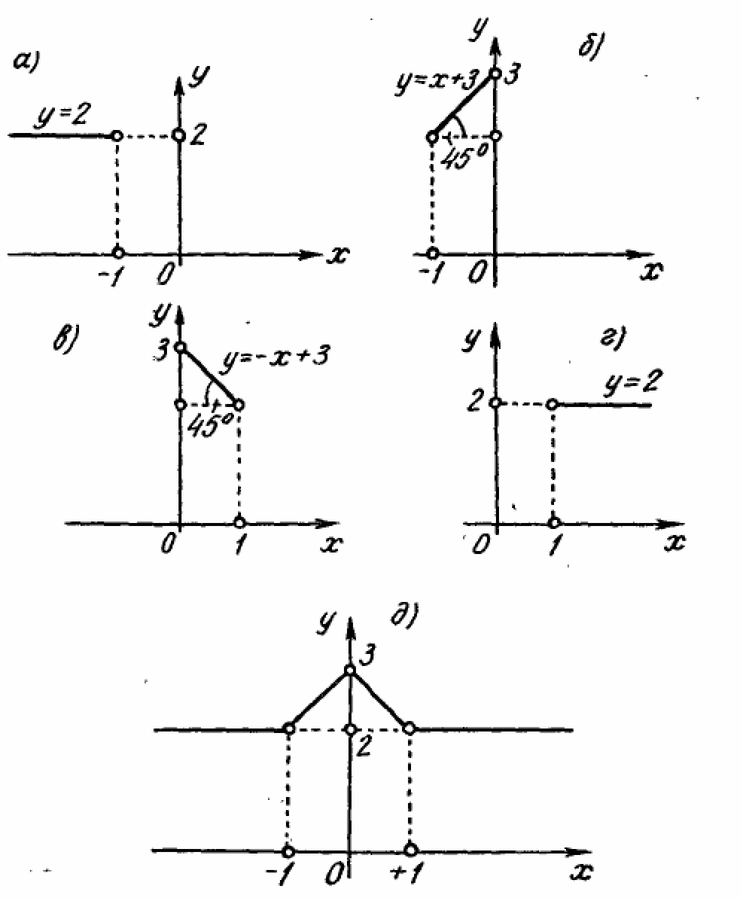


Рис. 2.20

Пример. Функция задана следующими неравенствами:

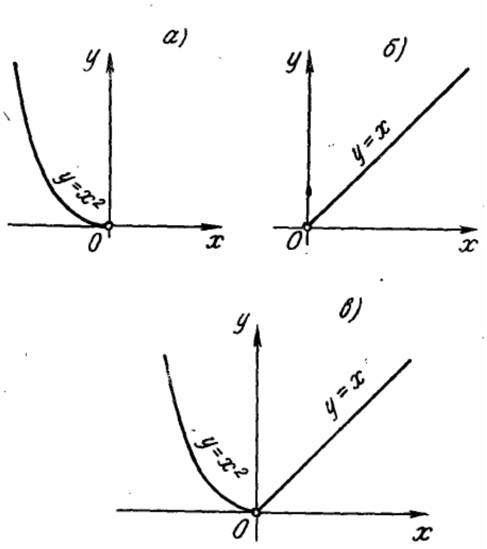
$$y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x+3, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x+3, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Построить график функции.



Пример. Функция задана следующими неравенствами:

$$y = x^2, \quad \text{если } x \leqslant 0;$$
$$y = x, \quad \text{если } x \geqslant 0.$$



<u>Опр</u>. <u>(сложной функции)</u>

Пусть функция $z = g(x)$ определена на множестве X, а функция $y = f(z)$ определена на множестве Z, причем $\{g(x)\} \subset Z$. Тем самым каждому $x \subset X$ ставится в соответствие значение $z \subset Z$, а этому z, в свою очередь, ставится в соответствие значение y. Таким образом каждому $x \subset X$ ставится в соответствие y и поэтому y будет функцией от x. Такая функция называется *сложной* функцией и обозначается

$$y=f(g(x))$$

Аргументом такой функции является функция $g(x)$, и таким образом сложная функция – это функция от функции. Сложную функцию называют также суперпозицией функций $z = g(x)$ и $y = f(z)$.

Заметим, что в определении сложной функции важно, что множество значений функции $z = g(x)$ входит в область определения функции $y = f(z)$.

Аналогично можно ввести суперпозицию трех и большего числа функций.

Пример1. Функция $y=\sin^2 \ln(x)$ является суперпозицией функций $y=u^2$, $u=\sin v$, $v=\ln x$ на множестве X=$(0,+\infty)$.

Пример 2. Функция $z=\sin x - 2$ и $y=\sqrt{z}$ не определяют сложной функции, так как множество значений функции $z=\sin x - 2$ не принадлежит области определения функции $y=\sqrt{z}$.

Из основных элементарных функций новые функции могут быть получены двумя способами при помощи:

а) алгебраических действий;

б) операций образования сложной функции.

Опр. Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются *элементарными*.

Функция $y = x^2 + \sin x$ является элементарной, так как она получена из суммы элементарных функций.

Функция $y = 3^x - x \cdot \ln x$ - элементарная.

Функция $y = \sin x^6$ - элементарная.

Предел функции

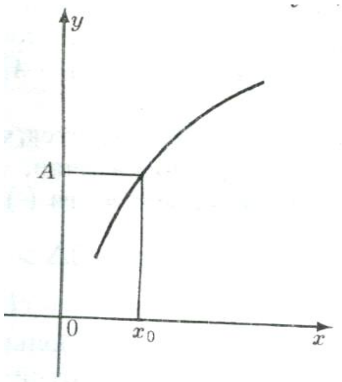
Понятие предела функции

Одной из основных задач математического анализа является изучение поведения функции в достаточно малой окрестности т.x_0 или при $x \to \infty$. В связи с этим возникло понятие предела функции при $x \to x_0$ и $x \to \infty$.

В зависимости от поведения функции $y = f(x)$ геометрически возможны следующие ситуации, дадим для каждой из них определение предела функции с использованием логических символов.

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Определение означает, что для x достаточно близких к x_0 значения функции $f(x)$ отличаются от A сколь угодно мало (рис.1).

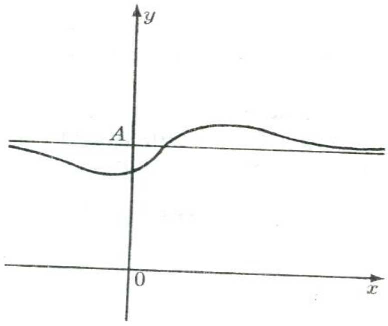


$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Рис.1

2. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

Определение означает, что для x достаточно больших, значения функции $f(x)$ отличаются от A сколь угодно мало (рис.2).

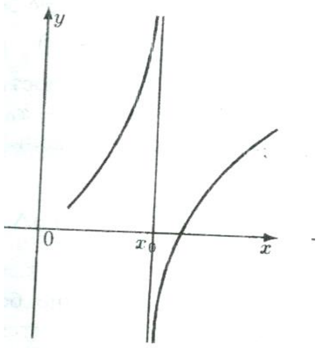


$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$

Рис.2

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Определение означает, что для x достаточно близких к x_0 значения функции $f(x)$ становится сколь угодно большими (рис.3).

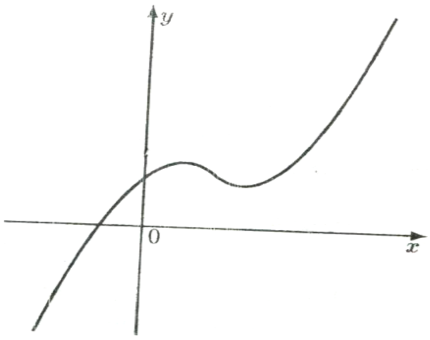


$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$

Рис.3

4. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Рис.2



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Рис.4

Определение означает, что для x достаточно больших значения функции $f(x)$ становится сколь угодно большими (рис.4).

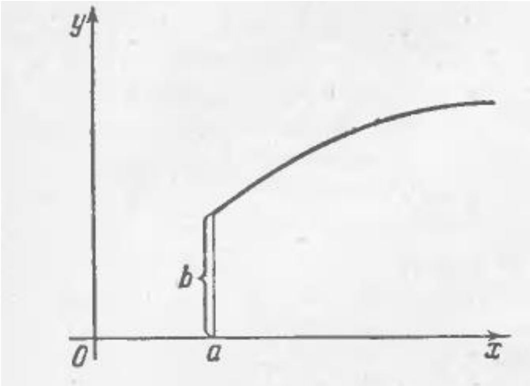
Односторонние пределы функции

В тех случаях, когда возникает необходимость в изучении поведения функции $y = f(x)$ или только в левосторонней $\left(x < x_0\right)$ или только в правосторонней $\left(x > x_0\right)$ полуокрестностях т. x_0 используются односторонние пределы функции.

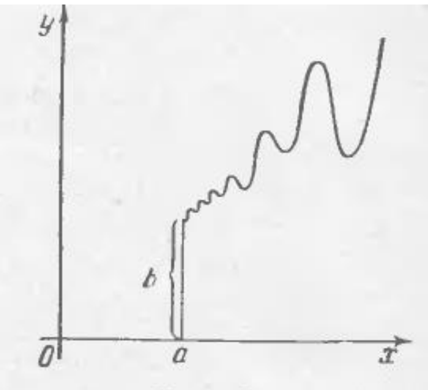
$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ - предел слева.

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ - предел справа.

Из определения предела следует, что $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A\right)$.

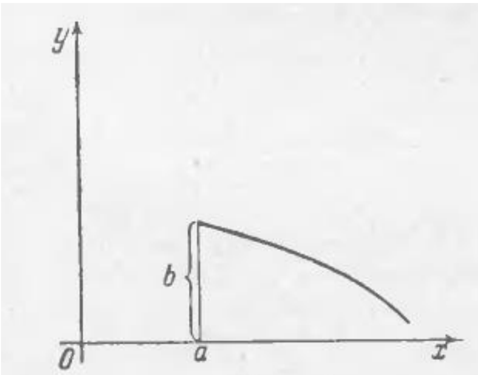


Черт. 1.

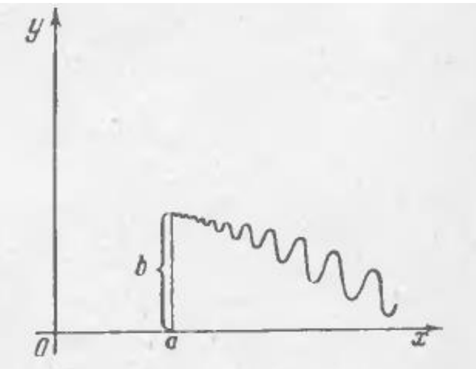


Черт. 2.

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b,\ \ x > a,\ f(x) > b$

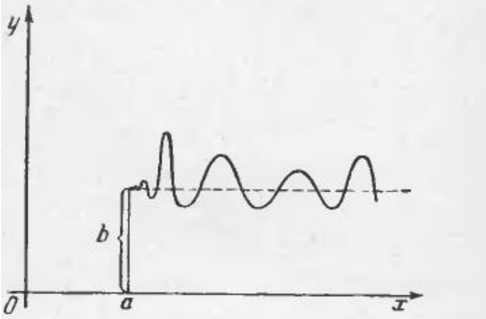


Черт. 3.



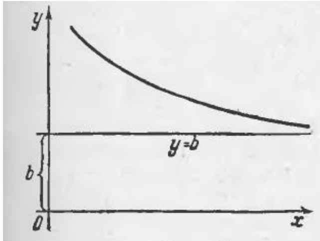
Черт. 4.

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b,\ \ x > a,\ f(x) < b$.

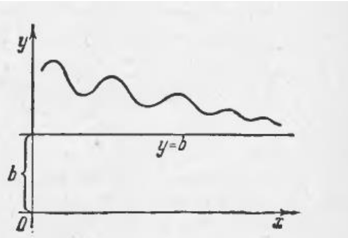


Черт. 5.

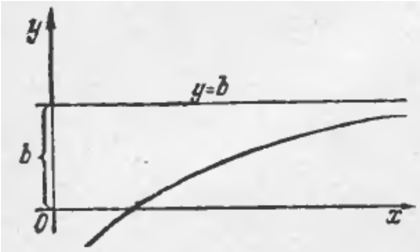
$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$



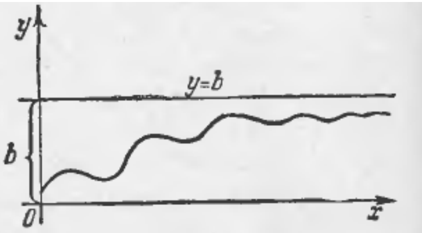
Черт. 1′.



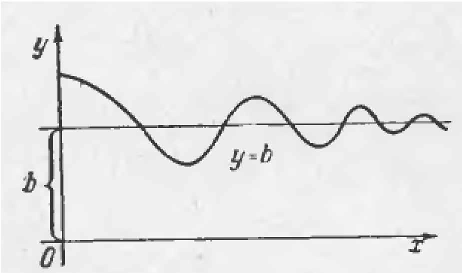
Черт. 2′.



Черт. 3′.

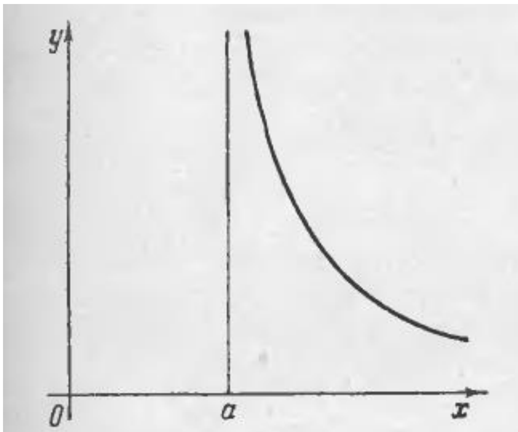


Черт. 4′.

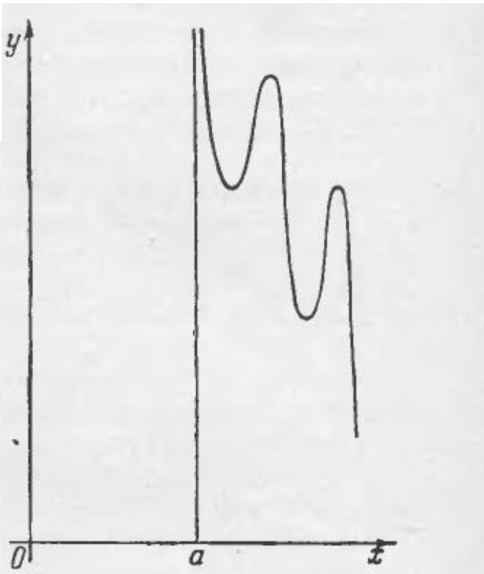


Черт. 5′.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$



Черт. 6.



Черт. 7.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

Бесконечно малые величины и их свойства

Опр. Ф-ция $\alpha(x)$ называется б.м. при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Подчеркнем, что понятие б.м., как и понятие предела . локальные понятия. например, ф-ция $y=\dfrac{x-2}{x-3}$ б.м. при $x \to 2$ и б.б при $x \to 3$.

Свойства бесконечно малых величин

1. Б.м. при $x \to x_0$ величина ограничена в некоторой проколотой окрестности т.x_0.

2. Сумма конечного числа б.м. при $x \to x_0$ величин $\alpha(x), \beta(x)$ есть величина б.м. $\gamma(x)$ при $x \to x_0$:

$\alpha(x)+\beta(x)=\gamma(x)$

3. Произведение конечного числа б.м. при $x \to x_0$ величин $\alpha(x), \beta(x)$ есть величина б.м. $\gamma(x)$ при $x \to x_0$:

$\alpha(x)\cdot\beta(x)=\gamma(x)$

4. Произведение б.м. $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ величины на ф-цию $f(x)$,ограниченную в некоторой окрестности т.x_0 или на константу С есть величина б.м при $x \to x_0$:

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0, |f(x)|\le M$,то $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot f(x)=0$.

Например $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$ т.к. $\lim\limits_{x\to 0}x=0, -1\le\sin\dfrac{1}{x}\le 1$, хотя $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существует.

5. Для того, чтобы $\alpha(x)$ было б.м. при $x \to x_0$ необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ была б.б. при $x \to x_0$.

Замечание. Отношение двух б.м. величин $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x \to x_0$ образует неопределенное выражение вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Бесконечно большие величины и их свойства

Опр. Ф-ция $A(x)$ называется б.б. при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}A(x)=\infty$

Свойства бесконечно больших величин

1. Сумма б.б. при $x \to x_0$ величин $A(x), B(x)$ одного знака есть величина б.б. $C(x)$ при $x \to x_0$:

$A(x)+B(x)=C(x)$

2. Произведение б.б. при $x \to x_0$ величин $A(x), B(x)$ есть величина б.б. $C(x)$ при $x \to x_0$:

$A(x) \cdot B(x) = C(x)$

4. Произведение б.б. $A(x)$ при $x \to x_0$ величины на ф-цию $f(x)$,ограниченную в некоторой окрестности т.x_0 или на константу С есть величина б.б при $x \to x_0$:

Если $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) = \infty, \left| f(x) \right| \le M$,то $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) \cdot f(x) = \infty$.

5. Для того, чтобы $A(x)$ было б.б. при $x \to x_0$ необходимо и достаточно, чтобы $\frac{1}{A(x)}$ была б.м. при $x \to x_0$.

Замечание. Отношение двух б.б. величин $\frac{A(x)}{B(x)}$ при $x \to x_0$ образует неопределенное выражение вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$.

Теоремы о пределе функции

Теорема 1. (основная теорема о пределах)

а) Прямая теорема. Если ф-ция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ имеет пределом число А, то в окрестности этой т. ее можно представить в виде суммы постоянного числа А, равного пределу ф-ции и б.м. величины α(х),т.е.

если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$.

Теорема 2. (о единственности предела).

Если $\exists$ предел ф-ции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, то этот предел единственный.

Теорема 3. Если ф-ция $y = f(x)$ имеет в т. x_0 конечный предел, то она ограничена в некоторой $\dot{O}(x_0)$.

выполняться условие $f(x) < B$.

Теорема 6. (о пределе суммы, произведение и частного)

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, тогда и ф-ции $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ также имеют конечные пределы при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = A + B$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = A \cdot B$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, B \ne 0$$

Теорема 7. (о предельном переходе под знаком неравенства)

Если ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ в $\dot{O}(x_0)$ удовлетворяют неравенству $f(x) < g(x)$, то можно перейти к пределу в этом неравенстве причем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Замечание. К пределу можно переходить под знаком любой элементарной ф-ции в области ее определения, например:

$$\lim_{x \to x_0} \ln f(x) = \ln \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} f(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \sin f(x) = \sin \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$$

Понятие непрерывности функции в точке

Подчеркнем еще раз, что в определении предела ф-ции не требуется, чтобы она была определена в т.x_0 .

Опр1. Пусть ф-ция $y = f(x)$ определена в т.x_0 и некоторой ее окрестности. Функция $f(x)$ называется непрерывной в т.x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Опр. 2 (на языке приращений):

Функция $f(x)$ называется непрерывной в т.x_0, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует б.м приращение ф-ции Δy.

Пример. Исходя из определения убедиться, что ф-ция $y = x^3 + 2x$ непрерывна на $x \in R$.

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \left(x + \Delta x\right)^3 + 2(x + \Delta x) - x^3 - 2x = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2\Delta x$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \Rightarrow$ функция непрерывна на $x \in R$.

Теоремы о непрерывных функциях

Рассмотрим несколько основных теорем о непрерывных ф-циях, облегчающих исследование ф-ций на непрерывность. Заметим, что все теоремы доказываются на основании определения непрерывности ф-ции и теорем о пределах.

Теорема 1. Если ф-ция $y = f(x)$ непрерывна в т.x_0,то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 2. (о непрерывности суммы, произведения и частного)

Если ф-ции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в т.x_0,тогда их сумма, произведение и частное тоже непрерывны в т.x_0 $\left(g(x_0) \neq 0\right)$.

Теорема 3. (о непрерывности сложной ф-ции)

Пусть ф-ции $y = f(z)$ и $z = g(x)$ определяют сложную ф-цию $y = f(g(x))$ в т.x_0 и $O(x_0)$. Если ф-ция $z = g(x)$ непрерывна в т.x_0 и ф-ция $y = f(z)$ непрерывна в т. z_0, причем $z_0 = g(x_0)$, тогда сложная ф-ция непрерывна в т.x_0.

Теорема 4. Каждая из простейших элементарных ф-ций непрерывна в любой т. своей области определения.

Непрерывность каждой элементарной ф-ции доказывается отдельно либо на основании определения непрерывности, либо с использованием теорем о непрерывных ф-циях. Докажем непрерывность ф-ции

1. $y = \sin x$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\underbrace{\sin\frac{\Delta x}{2}}_{б.м.}\underbrace{\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}_{огран.} = 0$$

Использование непрерывности при нахождении пределов

1.Если ф-ция $y = f(x)$ непрерывна в т.x_0, тогда согласно определению непрерывности

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

это значит, что для нахождения предела $f(x)$ при $x \to x_0$ достаточно вычислить значение ф-ции в т.x_0. Именно так и поступают при нахождении предела элементарной ф-ции, если x_0 принадлежит области определения ф-ции:

$$\lim_{x \to 2}\lg\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \lg\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lg 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} arctge^x = arctge^0 = \frac{\pi}{4}$$

2. При вычислении пределов широко используются теоремы о пределах и свойства б.м. и б.б. величин.

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывна в т.x_0, то

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=f(x_0)+g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=f(x_0)\cdot g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)},\, g(x_0)\neq 0$$

$$\lim_{x\to 1}\left(tg\frac{\pi x}{4}+\cos\pi x\right)=tg\frac{\pi}{4}+\cos\pi 1-1=0$$

$$\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cdot\arccos x=e^0\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

Но, к сожалению, эти теоремы и свойства не всегда применимы. для примера рассмотрим функцию

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}.$$

Предел этой функции легко находится по теореме о пределе частного, например, при $x\to 2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}=\frac{4-8+3}{4-1}=-\frac{1}{3}.$$

Но эта теорема не применима при $x\to 1$ (в этом случае числитель и знаменатель стремятся к 0) и при $x\to\infty$ (в этом случае числитель и знаменатель стремятся к бесконечности). В первом случае говорят о неопределенном выражении вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, во втором о неопределенном выражении вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

3. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=C(C\neq 0), \lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\infty$.

Найдем пределы:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\alpha(x)}=\left(\frac{C}{0}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{u(x)}=\left(\frac{C}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{u(x)}=\left(\frac{0}{\infty}\right)=\left(0\cdot\frac{1}{\infty}\right)=\left(0\cdot 0\right)=0$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{\alpha(x)}=\left(\frac{\infty}{0}\right)=\left(\infty\cdot\frac{1}{0}\right)=\left(\infty\cdot\infty\right)=\infty$$

$$\left(\frac{C}{0}\right)=\infty,\left(\frac{C}{\infty}\right)=0,\left(\frac{0}{\infty}\right)=0,\left(\frac{\infty}{0}\right)=\infty$$

4. Перечислим неопределенные выражения, которые нужно раскрывать с помощью специальных приемов

$$\left(\frac{0}{0}\right),\left(\frac{\infty}{\infty}\right),(\infty-\infty),(0\cdot\infty),\left(0^0\right),\left(\infty^0\right),\left(1^\infty\right).$$

Решение задач

Приступая к решению задач на вычисление пределов, посмотрим предельные значения простейших элементарных функций.

1. Степенные ф-ции:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty, n\in N$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, n-\textit{четное} \\ -\infty, n-\textit{нечетное} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty, \alpha>0 \\ 0, \alpha<0 \end{cases}$$

2. Показательная ф-ция

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, a>1 \\ 0, 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, a>1 \\ +\infty, 0<a<1 \end{cases}$$

3. Логарифмическая ф-ция

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, a>1 \\ -\infty, 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0+0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, a>1 \\ +\infty, 0<a<1 \end{cases}$$

4. Тригонометрические ф-ции:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} tgx = +\infty$$

$$\lim_{x\to0-0} ctgx = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} tgx = -\infty$$

$$\lim_{x\to0+0} tgx = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \begin{cases} \sin x \\ \cos x \\ tgx \\ ctgx \end{cases} \text{ не существует}$$

5. Обратные тригонометрические ф-ции

$$\lim_{x\to+\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} arcctgx = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} arcctgx = \pi$$

Примеры нахождения пределов в случае отсутствия неопределенности

1. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}=\left(\frac{0}{6}\right)=0$

2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}=\left(\frac{2}{0}\right)=\infty$

3. $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{-\infty}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0+0}\ln x\cdot\frac{1}{x}=\left(-\infty\cdot\infty\right)=-\infty$

4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3-x}{tg\frac{\pi x}{2}}=\left(\frac{2}{\infty}\right)=0$

5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{tg\frac{\pi x}{2}}=\left(\frac{0}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to1}(1-x)\cdot\frac{1}{tg\frac{\pi x}{2}}=(0\cdot0)=0$

6. $\lim\limits_{x\to0}\underset{б.м.}{x}\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi}{x}}_{огранич.}=0$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\underset{б.б.}{\sqrt{x}}\cdot\underbrace{arctgx}_{\frac{\pi}{2}}=\infty$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\underset{б.б.}{x}\cdot\underbrace{(2+\sin x)}_{\substack{огранич.\\1\le2+\sin x\le3}}=\infty$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\underset{б.б.}{x}\cdot\underset{\substack{x=\pi k\\ \sin\pi k=0\\ (\infty\cdot0)}}{\sin x}=не\cdot существует$

10. $\lim\limits_{x\to1+0}\left(\frac{1}{x-1}-\lg(x-1)\right)=+\infty-(-\infty)=+\infty$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5^x+4}{3^x+2}=\begin{cases}x\to+\infty,\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\ x\to-\infty,\frac{4}{2}=2\end{cases}$

Первый замечательный предел

Предел отношения синуса бесконечно малого аргумента к самому аргументу равен 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Заметим, что если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ (т.е. $\alpha(x)$ - б.м. при $x\to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$.

Это очевидно следует из первого замечательного предела, если ввести переменную $t=\alpha(x)$, которая стремится к 0 при $x\to x_0$.

Итак $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$.

Примеры:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}3\frac{\sin 3x}{3x}=3$$

$$2)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\frac{\sin 2x}{x}\frac{\sin 2x}{x}\cdot 4=8$$

$$3)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{1}{2}$$

Следствия первого замечательного предела

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=1$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=1$.

Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом принято называть

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Заметим, что при $x\to\infty$ функция $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ представляет неопределенное выражение вида $\left(1^\infty\right)$.

Второй замечательный предел используется при раскрытии неопределенных выражений вида $\left(1^{\infty}\right)$.

$$1)\lim_{x\to 0}\left(1+5x\right)^{\frac{2}{x}}=e^{10}$$

$$2)\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}=e^{-6}$$

$$3)\lim_{x\to 0}\left(1-\sin 2x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-2}$$

Следствия второго замечательного предела

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{\log_a\left(1+x\right)}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\log_a e$$

$$2)\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=1$$

$$3)\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$4)\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Сравнение б.м. величин

Пусть даны две б.м. при $x\to x_0$ (или $x\to\infty$) величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$:

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0,\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0.$$

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha\left(x\right)}{\beta\left(x\right)}=1$, то **эквивалентные** б.м

Опр. Если $\alpha(x)\sim C\left(x-x_0\right)^k$ при $x\to x_0$, тогда $C\left(x-x_0\right)^k\left(k>0\right)$ называют главной частью б.м. $\alpha(x)$.

Эквивалентные б.м. величины

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha\left(x\right)}{\beta\left(x\right)}\left(\frac{0}{0}\right)=1 \quad \alpha(x)\sim\beta(x).$$

Теорема 2. Предел отношения 2-х б.м. величин равен пределу отношения эквивалентных им б.м. величин.

$$\alpha(x)\sim\alpha^*(x)$$
$$\beta(x)\sim\beta^*(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha\left(x\right)}{\beta\left(x\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha^*\left(x\right)}{\beta^*\left(x\right)}$$

Таблица эквивалентных б.м. величин, которые следуют из первого и второго замечательных пределов и их следствий.

Пусть $\alpha(x)$ величина б.м. при $x \to x_0$:

$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Тогда

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$

2) $arc\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$

3) $tg\alpha(x) \sim \alpha(x)$

4) $arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$

5) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$

6) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$

7) $1-\cos\alpha(x) \sim \alpha^2(x)/2$

8) $\left(1+\alpha(x)\right)^p - 1 \sim p\cdot\alpha(x)$

Сравнение б.б. величин

Пусть даны две б.б. при $x \to x_0$ (или $x \to \infty$) величины $U(x)$ и $V(x)$:

$\lim\limits_{x \to x_0} U(x) = \infty, \lim\limits_{x \to x_0} V(x) = \infty$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{U(x)}{V(x)} = 1$, то **эквивалентные** б.б

В качестве эталонных б.б. для сравнения берут обычно простейшие, ими являются : x при $x \to \infty$,

$\dfrac{1}{x - x_0}$ при $x \to x_0$,

$\dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$.

Опр. Если $U(x) \sim \dfrac{C}{(x - x_0)^p}\left(p > 0\right)$ при $x \to x_0$, тогда $\dfrac{C}{(x - x_0)^p}$ называют главной частью б.б. $U(x)$, а число p - ее порядком по отношению к $\dfrac{1}{x - x_0}$.

Главная часть многочлена $3x^5 + 2x^3 + 7x^2$ $3x^5$ при $x \to \infty$ и $7x^2$ при $x \to 0$.

Раскрытие неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

I) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Если x_0 - корень многочлена, то этот многочлен делится без остатка на $\left(x - x_0\right)$. Разделим числитель и знаменатель на $\left(x - x_0\right)$.

$$1.\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-4}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{3(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)}=-\frac{1}{8}.$$

$$2.\ \lim_{x\to 2}\frac{x^4+x^3+2x-4}{x^2+4x+4}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\left(x^3-x^2+2x-2\right)}{3(x+2)^2}=\frac{-18}{0}=-\infty$$

2) В числителе или(и) в знаменателе содержится иррациональность, от которой нужно освободиться, умножая ее на сопряженное выражение, используя формулы сокращенного умножения:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$$

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$$

$$1.\ \begin{matrix}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-2x-3}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-(x-2)}{\left(x^2-2x-3\right)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{(x-3)(x+1)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}=\\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-1}{(x+1)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}=-\dfrac{1}{8}\end{matrix}.$$

$$2.\ \lim_{x\to -8}\frac{2+\sqrt[3]{x}}{x^2+7x-8}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -8}\frac{8+x}{\underbrace{\left(x^2+7x-8\right)}_{(8+x)(x-1)}\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=-\frac{1}{108}$$

$$3.\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{5-x}}=2.$$

3) Тригонометрические выражения. Используются следствия 1-го и 2-го замечательных пределов:

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=5.$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 16x^2}{x^2}=32.$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-\sin 2x}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2}{x}=\infty.$$

$$4.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{x^2}{4}}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\frac{1}{4}$$

$$5.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg 2x}\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{5}{2}$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x-arctg\,2x}{5x+\arcsin 2x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\dfrac{5}{7}$

4) Введение новой переменной.

1. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{\sin 6x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l} t=\pi-x\Rightarrow x=\pi-t \\ x\to\pi, t\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(5\pi-5t)}{\sin(6\pi-6t)}=$
$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(\pi-5t)}{\sin(2\pi-6t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 5t}{-\sin 6t}=-\dfrac{5}{6}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ctg\,\dfrac{\pi x}{2}}{x-1}=\left|\begin{array}{l} t=x-1, x=t+1 \\ x\to 1, t\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{ctg\,\dfrac{\pi(t+1)}{2}}{t+1-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{ctg\left(\dfrac{\pi t}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)}{t}=$
$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-tg\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)}{t}=-\dfrac{\pi}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt[12]{x}\Rightarrow x=t^{12} \\ x\to 1, t\to 1\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^4-1}{t^3-1}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\dfrac{4}{3}$

Раскрытие неопределенностей вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

I) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Заменяем числитель и знаменатель эквивалентными величинами

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-3}{x^3+x^2}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^3}=2$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+100x}{x^5+1}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{x^5}=0$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^2+10x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{4x+1}}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x}}=\dfrac{1}{2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{\sqrt{4x^6+7}}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2|x^3|}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}, \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{-2x^3}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+n}{2}n\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{2}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!}{(n+3)!}=0$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{3^n-1}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{2x^2}{x^2+1}}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$

Раскрытие неопределенностей вида $(\infty-\infty)u(0\cdot\infty)$

С помощью алгебраических преобразований сводим эти неопределенности к неопределенностям вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Раскрытие неопределенностей вида $\left(1^\infty\right)$

$$\lim_{\alpha(x)\to0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$$

1. $\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right]^{\frac{5x\cdot2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{5x\cdot2}{x}}=e^{10}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\left(-\dfrac{3}{x}\right)\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-\frac{3}{x}\cdot2x}=e^{\lim\limits_{x\to0}-\frac{3}{x}2x}=e^{-6}$.

3. $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+(-\sin2x)\right)^{-\frac{1}{-\sin2x}}\right]^{\frac{-\sin2x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin2x}{x}}=e^{-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x}(1)^\infty\left(e^6\right)$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{3x-1}\right)^{2x}\left(\dfrac{1}{3}\right)^\infty\begin{pmatrix}x\to+\infty\\x\to-\infty\end{pmatrix}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\dfrac{(a+x)}{a}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{a}\right)}{x}=\dfrac{1}{a}$.

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{\sin x}-1}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cdot\ln a}{x}=\ln a$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{x^2}-1\right)-(\cos x-1)}{x^2}=\dfrac{3}{2}$.

Классификация точек разрыва функции

Напомним, что ф-ция $y=f(x)$ называется непрерывной в т. x_0, если

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ (1).

Равенство (1) возможно, если выполнены следующие условия:

1. Ф-ция должна быть определена не только в окрестности т. x_0 , но и в самой т. x_0. $\left(\exists f\left(x_0\right)\right)$.

2. Должны существовать оба односторонних предела

$\left(\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x), \exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\right)$.

3. Должно иметь место равенство

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

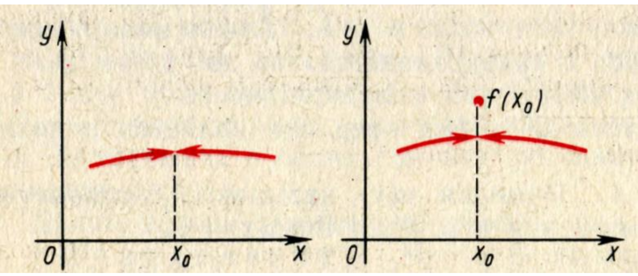
Если хотя бы одно из этих условий нарушено, то x_0 - точка разрыва ф-ции $y=f(x)$. Принята следующая классификация точек разрыва.

Опр. Точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва 1-го рода** ф-ции $y=f(x)$, если односторонние пределы существуют и равны между собой

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$,

а сама ф-ция в т. x_0 либо не определена, либо имеет значение, не равное А. $\left(f(x_0)\neq A\right)$. Разрыв устраняется, если доопределить значение ф-ции в т. x_0 и изменить его, приняв

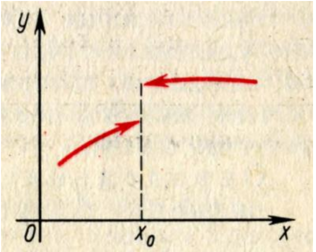
$\left(f(x_0)=A\right): y=\begin{cases} f(x), x\neq x_0 \\ A, x=x_0 \end{cases}$

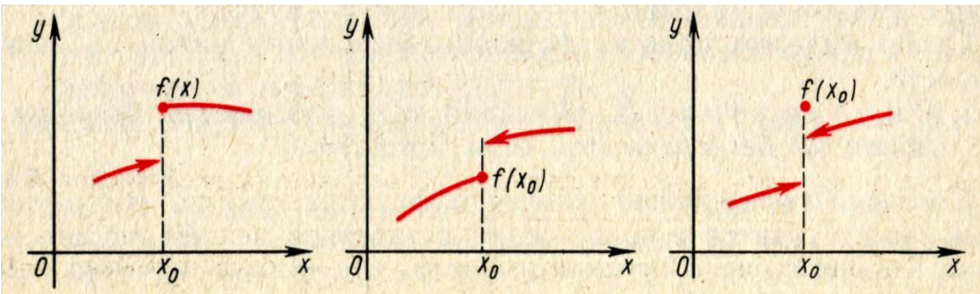


Опр. Точка x_0 называется **точкой неустранимого разрыва 1-го рода** (точкой конечного скачка) ф-ции $y=f(x)$, если односторонние пределы существуют, но не равны между собой

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

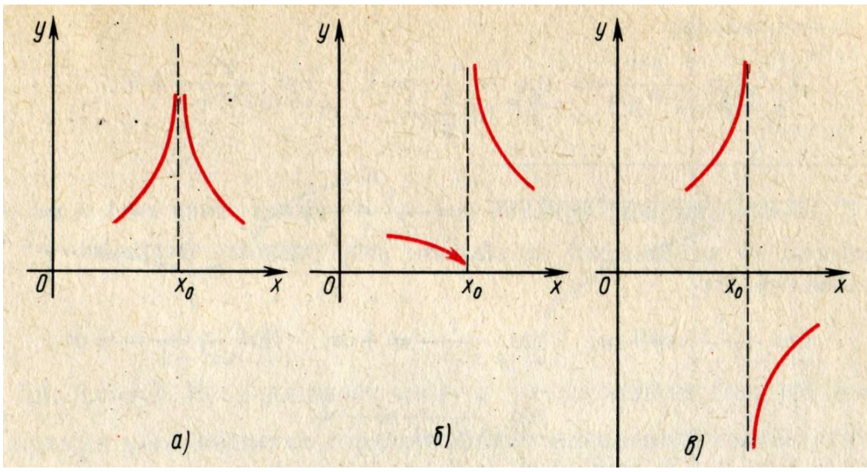
при этом сама ф-ция в т. x_0 может быть и не определена. Если $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ и $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$, то число $|A - B|$ называется скачком ф-ции в т. x_0 .





Опр. Функция $y = f(x)$, непрерывная на $[a, b]$ за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода, называется **кусочно-непрерывной** на $[a, b]$. Схематично кусочно-непрерывную ф-цию можно изобразить

Опр. Точка x_0 называется **точкой неустранимого разрыва 2-го рода** ф-ции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов не существуют или равен бесконечности. $\left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty\right) \cup \left(\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty\right)$.



В случае, когда односторонние пределы равны бесконечности, разрыв 2-го рода называется бесконечным разрывом, а т. x_0 – точкой бесконечного скачка ф-ции.

Исследование функции на непрерывность

Исследование на непрерывность состоит в выявлении т. разрыва и определении их характера.

Пример1. Исследовать ф-цию на непрерывность. Изобразить ее схематически. $y=\frac{x^2-4}{x-2}$.

ОДЗ $x\neq 2$.

Элементарная ф-ция непрерывна в своей области определения, поэтому ф-ция может иметь разрыв только в т. $x=2$.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}(x+2)=4$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}(x+2)=4$$

.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)=\lim_{x\to\infty}x=\begin{cases}+\infty, x\to+\infty\\+\infty, x\to+\infty\end{cases}$$

$x=2$ - точка устранимого разрыва 1-го рода

$$y=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, x\neq 2\\4, x=2\end{cases}$$

Пример 2. Исследовать ф-цию на непрерывность. Изобразить ее схематически.

$$f(x)=\begin{cases}x^3, -\infty<x<1\\3-x, x\geq 1\end{cases}$$

Каждая из элементарных ф-ций непрерывна в своей области определения, поэтому ф-ция может иметь разрыв только в точке x=1.

$$\lim_{x\to 1-0}x^3=1$$

$$\lim_{x\to 1+0}3-x=2$$

$$\lim_{x\to -\infty}x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}3-x=-\infty$$

т. x=1 – т. неустранимого разрыва 1-го рода.

Пример 3. Исследовать ф-цию на непрерывность. Изобразить ее схематически.

$f(x)=e^{\frac{1}{x^2-4}}$. ОДЗ $x\neq\pm 2$.

$$\lim_{x\to -2-0} e^{\frac{1}{x^2-4}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2+0} e^{\frac{1}{x^2-4}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x^2-4}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x^2-4}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} e^{\frac{1}{x^2-4}} = e^{0} = 1$$

$$f(0) = e^{-\frac{1}{4}}$$

т.x=-2 и x=2 – точки неустранимого разрыва 2-го рода.

Пример 4. Исследовать ф-цию на непрерывность. Изобразить ее схематически.

$y = \dfrac{x+5}{x^2-9}$. ОДЗ $x \neq \pm 3$.

Определим тип разрыва. Для этого найдем односторонние пределы в каждой точке.

x = -3.

$$\lim_{x\to -3-0} \frac{x+5}{x^2-9} = \lim_{x\to -3-0} \frac{x+5}{(x+3)(x-3)} = \frac{-3+5}{(-3-0+3)(-3-3)} = \frac{2}{(-0)(-6)} = \frac{2}{(+0)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -3+0} \frac{x+5}{x^2-9} = \lim_{x\to -3+0} \frac{x+5}{(x+3)(x-3)} = \frac{-3+5}{(-3+0+3)(-3-3)} = \frac{2}{(+0)(-6)} = \frac{2}{(-0)} = -\infty$$

Оба односторонних предела равны бесконечности, значит функция в точке x = -3 терпит неустранимый разрыв 2-го рода, или бесконечный разрыв.

x = 3

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{x+5}{x^2-9} = \lim_{x\to 3-0} \frac{x+5}{(x+3)(x-3)} = \frac{-3+5}{(3+3)(3-0-3)} = \frac{2}{(6)(-0)} = \frac{2}{(-0)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3+0} \frac{x+5}{x^2-9} = \lim_{x\to 3+0} \frac{x+5}{(x+3)(x-3)} = \frac{-3+5}{(3+3)(3+0-3)} = \frac{2}{(6)(+0)} = \frac{2}{(+0)} = +\infty$$

Оба односторонних предела равны бесконечности, значит функция в точке x = 3 терпит неустранимый разрыв 2-го рода, или бесконечный разрыв.

Предел функции при x $\to\infty$, очевидно, равен нулю:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^2-9} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = 0.$$

$$f(0) = -\frac{5}{9}.$$

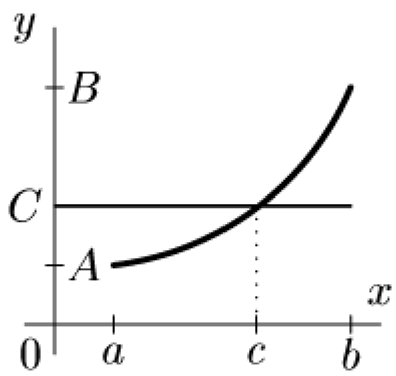
Свойства функции, непрерывной на замкнутом промежутке

Теорема 1. (теорема Больцано -Коши о нуле ф-ции)

Пусть ф-ция $y = f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков. Тогда внутри промежутка $[a,b]$ найдется по крайней мере одна т.с, в которой ф-ция обращается в нуль $f(x) = 0$.

Теорема 2. (теорема Больцано-Коши о промежуточном значении ф-ции).

Пусть ф-ция $y = f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$ при этом $f(a) \neq f(b)$. Тогда какого бы ни было число $C \in [f(a), f(b)]$ внутри промежутка $[a,b]$ найдется точка x = c, такая, что $f(c) = C$.



Теорема 3. (теорема Вейерштрасса об ограниченности ф-ции).

Непрерывная на замкнутом промежутке ф-ция ограничена на этом промежутке.(Ф-ция непрерывная на открытом промежутке (a,b) может быть и неограниченной там)

Теорема 4. (теорема Вейерштрасса о наименьшем и наибольшем значениях ф-ции).

Непрерывная на замкнутом промежутке $[a,b]$ ф-ция имеет на этом промежутке $[a,b]$ наименьшее и наибольшее значение.