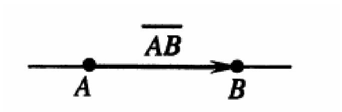
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Тема 1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и линейная независимость векторов.

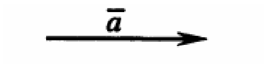
Известно, что ряд физических величин являются векторами, для характеристики которых необходимо указать не только их численное значение, но и направление. Геометрической моделью векторной величины является направленный отрезок, длина которого характеризует величину, а направление отрезка – направление векторной величины.

Опр. ***Вектор*** - это направленный отрезок. Пусть А – начало вектора, В – его конец, тогда сам вектор обозначается $\overline{AB}$.



Опр. ***Длиной*** или ***модулем*** вектора называется расстояние между началом и концом вектора и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$.

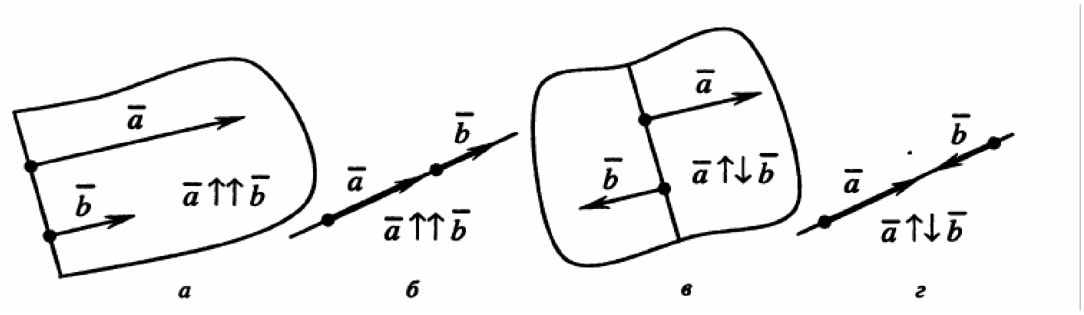
Свободные векторы - это векторы, для которых точка начала и конца не имеет значения, важны лишь его длина и направление. Такие векторы обозначаются одной малой буквой $\overline{a}, \overline{в}, \ldots$ В этом случае длина обозначается $\left|\overline{a}\right|$. Свободные векторы можно переносить в любую точку пространства с сохранением длины и направления.



Опр. ***Нулевым*** *вектором* $\overline{0}$ называется вектор, начало и конец которого совпадают. Модуль такого вектора равен нулю, а направление не определено.

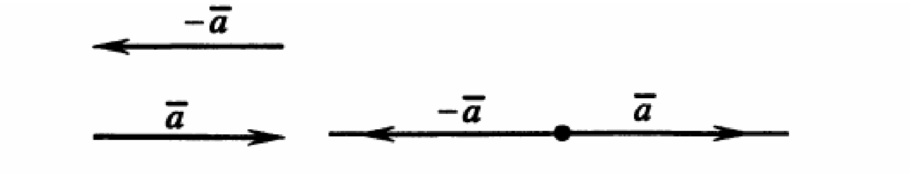
Опр. ***Единичным*** *вектором* (ортом) называется вектор, длина которого равна единице.

Опр. ***Коллинеарные векторы*** – векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

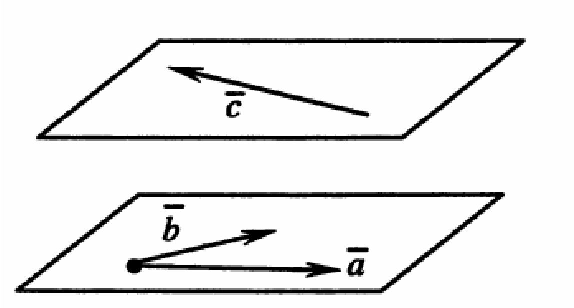


<u>Опр</u>. ***Равными*** называются коллинеарные векторы, имеющие одинаковые направления и равные длины.

<u>Опр</u>. ***Противоположные*** векторы имеют равные длины, но противоположное направление ($\bar{a}$ и -$\bar{a}$).



<u>Опр</u>. ***Компланарными*** называются векторы, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости).



Линейные операции над векторами.

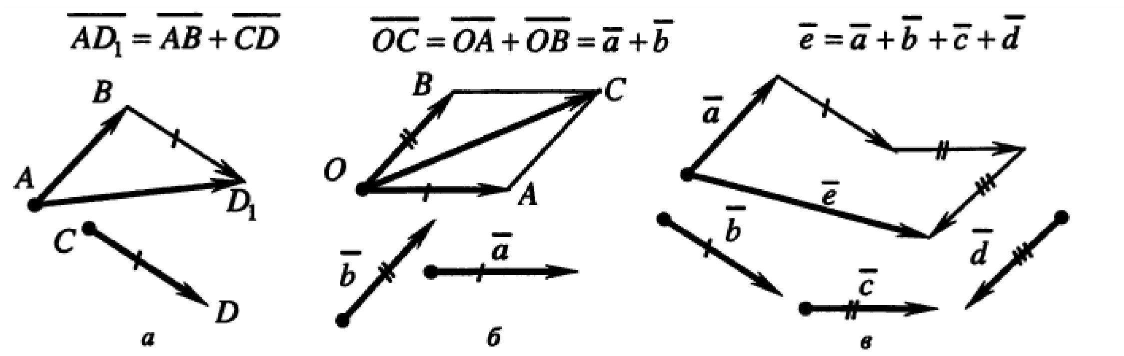
<u>Опр</u>. К ***линейным операциям*** над векторами относятся сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число.

<u>Опр</u>. ***Сложение двух векторов*** можно проводить геометрически двумя способами:

<u>Правило треугольника</u>. Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{в}$ называется третий вектор $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец с концом вектора $\bar{в}$ при условии, что вектор $\bar{в}$ отложен из конца вектора $\bar{a}$.

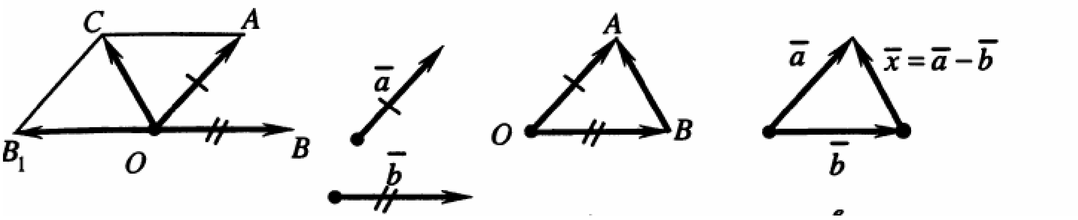
Замечание. Аналогично определяется сумма трех и более векторов.

<u>Правило параллелограмма</u>. Совмещаем начала двух векторов и строим на них параллелограмм. Вектор диагонали этого параллелограмма, идущий из их общего начала, будет суммой векторов.

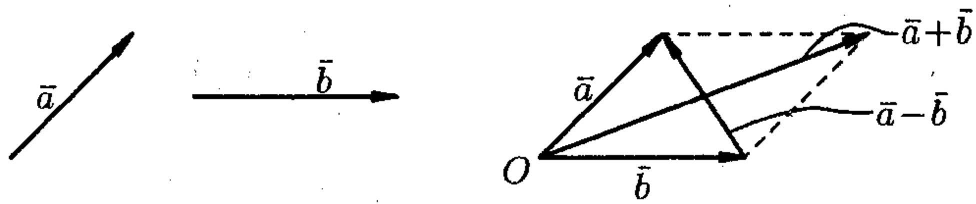


Опр. ***Разностью векторов*** $\overline{a}$ и $\overline{в}$ называется сумма вектора $\overline{a}$ с вектором $(-\overline{в})$, противоположным вектору $\overline{в}$.

<u>**Правило треугольника**</u>. Чтобы получить *разность* $\overline{a} - \overline{в}$ двух векторов, необходимо отложить их из одной точки и соединить конец второго с концом первого.



Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\overline{a}$ и $\overline{в}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{в}$, а другая – разностью векторов.



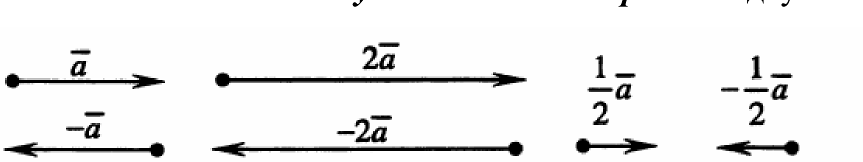
<u>Опр</u>. ***Произведением*** вектора $\overline{a}$ на число α называется вектор $\overline{в} = \alpha\overline{a}$, удовлетворяющий условиям:

1) $\overline{в} \,||\, \overline{a}$,

2) $|\overline{в}| = |\alpha||\overline{a}|$,

3) $\overline{a}$ и $\overline{в}$ одинаково направлены, если α > 0, и противоположно, если α < 0.

Замечание. $\overline{в} = \alpha\overline{a}$ - ***условие коллинеарности*** двух векторов.



Свойства линейных операций над векторами

Сложение векторов и умножение вектора на число называются линейными операциями над векторами.

Для любых векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ и чисел α и β справедливы равенства:

1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;
2. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$;
3. $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$;
4. $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\vec{0}$;
5. $\left(\alpha\beta\right)\overline{a}=\alpha\left(\beta\overline{a}\right)$;
6. $\left(\alpha+\beta\right)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$;
7. $\alpha\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$;
8. $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$.

Свойства линейных операций устанавливают такие же правила действия с векторами, как с алгебраическими выражениями.

Линейная комбинация векторов.

Опр. ***Линейной комбинацией*** векторов $\overline{a}$ и $\overline{в}$ называется вектор $\overline{c}$, определяемый равенством $\overline{c}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}$

Геометрически $\overline{c}$ - диагональ параллелограмма, построенного на векторах α$\overline{a}$ и β$\overline{в}$.

Опр. ***Линейной комбинацией*** трех векторов $\overline{a}$, $\overline{в}$ и $\overline{c}$ будет вектор $\overline{d}$

$$\overline{d}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c},$$

который является диагональю параллелепипеда, построенного на векторах α$\overline{a}$, β$\overline{в}$ и γ$\overline{c}$.

Опр. ***Линейной комбинацией*** векторов $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_n}$ называется вектор $\overline{в}$, если

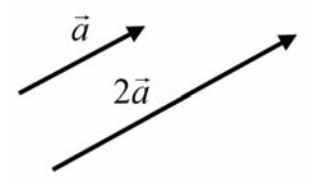
$$\overline{b}=\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+...+\alpha_n\overline{a_n},$$

где α_1, α_2,…, α_n – вещественные числа.

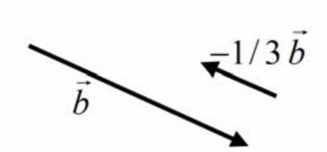
Задача. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить следующие векторы: а) $2\vec{a}$, б) $-\dfrac{1}{3}\vec{b}$, в) -2 $\vec{a}$ + 3 $\vec{b}$.

Решение. Зададим два вектора $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

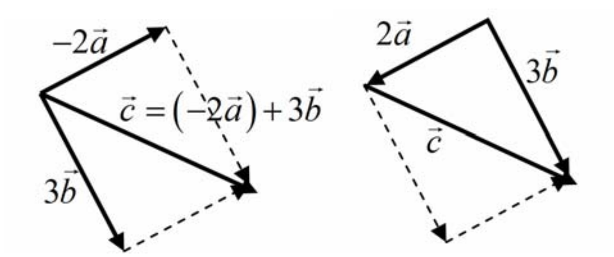
Используя понятие линейных операций над векторами, будем рассматривать вектор 2 $\vec{a}$ как результат умножения вектора $\vec{a}$ на скаляр 2. Поскольку скаляр положителен и по абсолютной величине больше 1, то искомый вектор *2* $\vec{a}$ будет представлять собою вектор, коллинеарный вектору $\vec{a}$*,* имеющий то же направление и вдвое большую длину, т.е



Вектор $-1/3$ $\vec{b}$ представляет собою вектор, коллинеарный вектору $\vec{b}$, имеющий противоположное с ним направление, так как скаляр отрицательный, и длину, в 3 раза меньшую длины ектора $\vec{b}$, так как скаляр по абсолютной величине меньше 1, т.е.



Вектор $\vec{c}$ = *- 2* $\vec{a}$ + 3 $\vec{b}$ можно рассматривать либо как сумму векторов (-2 $\vec{a}$) и 3 *в* , либо как разность векторов 3 $\vec{b}$ и *2* $\vec{a}$. В первом случае это будет вектор, направленный по диагонали араллелограмма, построенного на векторах (-2 $\vec{a}$) и 3 $\vec{b}$, исходящей из общего начала слагаемых векторов. Во втором случае это будет вектор диагонали параллелограмма, построенного на екторах 3 $\vec{b}$ и 2 $\vec{a}$, направленный из конца вектора *2* $\vec{a}$ в конец вектора 3 $\vec{b}$.

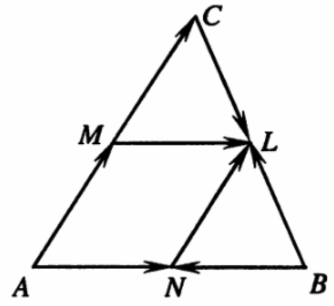


Задача. Дан треугольник АВС. Точки L, M, N - середины его сторон. Для векторов, изображенных на рисунке

1. указать коллинеарные, одинаково направленные, противоположно направленные, равные векторы.

2. Найти следующие суммы и разности векторов:

$\overline{BN} + \overline{AM}$; $\overline{AM} - \overline{BL}$; $\overline{AM} + \overline{AN}$; $\overline{BN} + \overline{AM} + \overline{CL}$.



Решение. 1. По теореме о средней линии треугольника заключаем, что $\overline{ML} \parallel \overline{AB}$, $\overline{NL} \parallel \overline{AC}$. Поэтому векторы $\overline{AM}, \overline{MC}, \overline{NL}$ - коллинеарные (так как лежат на одной или параллельных прямых), одинаково направленные и имеют равные длины. Следовательно, это равные векторы: $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{NL}$. Аналогично $\overline{AN} = \overline{ML}$, $\overline{AN} \uparrow\downarrow \overline{BN}$, $\overline{BN} \uparrow\downarrow \overline{ML}$, $\overline{CL} \uparrow\downarrow \overline{BL}$.

2. Учитывая равенство $\overline{AM} = \overline{NL}$, получаем по правилу треугольника $\overline{BN} + \overline{AM} = \overline{BN} + \overline{NL} = \overline{BL}.$

Поскольку $\overline{BL} = -\overline{CL}$ и $\overline{AM} = \overline{MC}$, то $\overline{AM} - \overline{BL} = \overline{MC} + \overline{CL} = \overline{ML}.$

По правилу параллелограмма $\overline{AN} + \overline{AM} = \overline{AL}.$

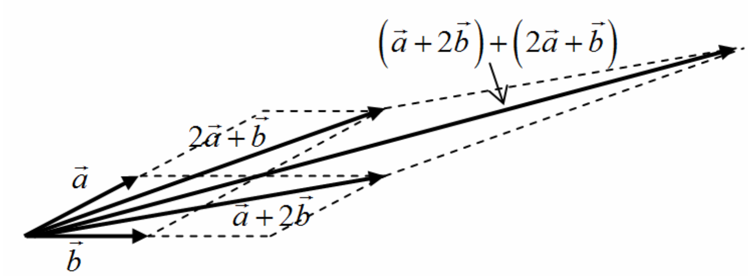
Так как $\overline{BN} + \overline{AM} = \overline{BL}$ и $\overline{CL} = -\overline{BL}$, находим

$$\overline{BN} + \overline{AM} + \overline{CL} = \underbrace{\left(\overline{BN} + \overline{AM}\right)}_{\overline{BL}} + \underbrace{\overline{CL}}_{-\overline{BL}} = \overline{BL} - \overline{BL} = \overline{0}.$$

Задача. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, проверить на чертеже справедливость тождества:

$$\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) + \left(2\vec{a} + \vec{b}\right) = 3\left(\vec{a} + \vec{b}\right).$$

Решение. В левой части тождества стоит сумма двух векторов $\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$ и $\left(2\vec{a} + \vec{b}\right)$, каждый из которых также представляет собой сумму двух векторов. Будем находить указанные суммы, пользуясь правилом параллелограмма. Для этого выбранные произвольным образом векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведем к общему началу и построим на этих векторах как на сторонах параллелограмм.



В результате сложения векторов $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $2\vec{a} + \vec{b}$ мы получили вектор, который лежит на одной прямой с вектором ($\vec{a} + \vec{b}$), одинаково с ним направлен и имеет длину в 3 раза большую, т.е. доказали справедливость тождества.

Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Опр. Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ называются ***линейно независимыми***, если линейная комбинация этих векторов – нуль-вектор лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$:

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + ... + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0}$$

Это значит, что ни один из векторов не может быть представлен в виде линейной комбинации остальных векторов.

Опр. Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ называются ***линейно зависимыми***, если линейная комбинация этих векторов – нуль-вектор, когда не все числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равны нулю. Пусть $\alpha_1 \neq 0$,тогда разделим уравнение

$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + ... + \alpha_n \overline{a_n} = \overline{0}$ на α_1 и выразим вектор $\overline{a_1}$:

$$\overline{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overline{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\overline{a}_3 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\overline{a}_n,$$

т.е. в этом случае какой либо из векторов может быть представлен в виде линейной комбинации остальных.

Оказывается, что из всей совокупности векторов всегда можно выбрать несколько векторов так, что все остальные векторы можно единственным образом представить в виде линейной комбинации выбранных векторов.

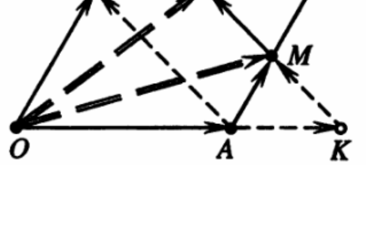
Совокупность таких выбранных векторов называется базисом, а векторы, входящие в базис, называются базисными. ***Базис*** всегда образован ***максимальным числом линейно независимых векторов***.

Задача. Параллелограмм OACB построен на векторах $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Требуется

1. Найти линейные комбинации векторов:

$$\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OA}; \quad \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB}; \quad \frac{3}{2}\overline{OA} + 2\overline{MN};$$

2. Доказать, что векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{MN}$ линейно зависимы.



Решение. Так как $\frac{1}{2}\overline{OA} = \overline{BN}$, то по правилу треугольника:

$\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{BN} = \overline{ON}.$ Рассуждая аналогично, получаем $\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OM}.$

Построим вектор $\overline{OK} = \frac{3}{2}\overline{OA}.$ Из равенства треугольников AKM и CNM следует, что $\overline{KN} = 2\overline{NM}.$ Тогда $\frac{3}{2}\overline{OA} + \overline{2NM} = \overline{OK} + \overline{KN} = \overline{ON}.$

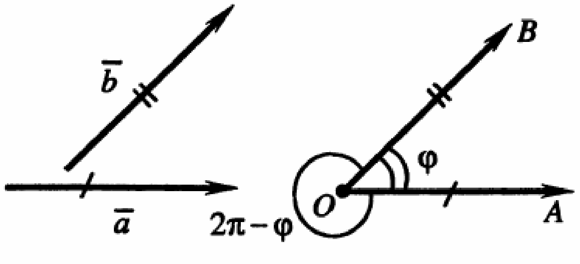
2. Учитывая, что $\overline{AB} = 2\overline{NM}$ и $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, получаем: $2\overline{NM} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Перенося векторы в левую часть, приходим к равенству $\overline{OA} - \overline{OB} + 2\overline{NM} = \overline{0}$, т.е. линейная комбинация векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{MN}$ равна нулю, при этом коэффициенты при этих векторах не равны нулю. Следовательно, векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{MN}$ линейно зависимы, что и требовалось доказать.

Тема 2. Метод координат. Проекция вектора на ось. Базис и координаты вектора на прямой, на плоскости и в пространстве.

Метод координат, разработанный Декартом в XVII веке позволяет свести все действия над векторами к действию над обычными вещественными числами.

Проекция вектора на ось и ее свойства

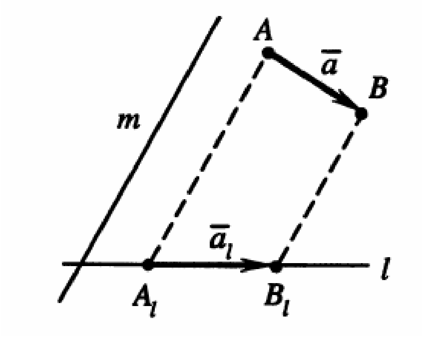
<u>Опр</u>. ***Углом*** между векторами $\bar{a}$ и $\bar{в}$ называется наименьший угол ($0 \le \varphi \le \pi$) между этими векторами, приведенными к общему началу.



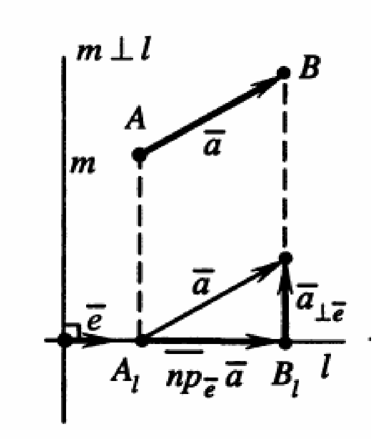
<u>Опр</u>. ***Ось*** – прямая, с выбранным на ней направлением.

<u>Опр</u>. Пусть на плоскости дана прямая l и пересекающая ее прямая m. ***Проекцией точки*** A на ось l параллельно прямой m называется основание прямой A_l проведенной из т.A на ось l, параллельно прямой m.

Опр. Пусть на плоскости дана прямая l и пересекающая ее прямая m. ***Проекцией вектора*** $\overline{AB}$ на ось l параллельно прямой m называется вектор $\overline{A_l B_l}$, началом которого служит проекция т.A на ось l параллельно прямой m, а концом – проекция т. B.



Опр. Ортогональной проекцией т.A на ось l называется основание перпендикуляра A_l, опущенного из т.A на ось l.



Опр. Ортогональной проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется длина направленного отрезка $\overline{A_l B_l}$ на этой оси (A_l, B_l – ортогональные проекции т. A и B на ось l), взятая со знаком «+», если направление $\overline{A_l B_l}$ совпадает с направлением оси l и со знаком «-», если направление $\overline{A_l B_l}$ противоположно направлению оси l.

$np_l \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cos\varphi$, φ – угол между вектором $\overline{AB}$ и осью l,

$np_l \overline{AB} > 0$, если 0<φ<π/2 - острый,

$np_l \overline{AB} < 0$, если π/2<φ<π – тупой.

Свойства проекции.

1. Равные векторы имеют равные проекции.

2. Проекция суммы векторов на одно и то же направление равна сумме проекций каждого вектора на это направление

   $$пр_l(\bar{a}+\bar{в}+\bar{c}) = пр_l\bar{a} + пр_l\bar{в} + пр_l\bar{c}.$$

3. При умножении вектора на число его проекция умножается на это число

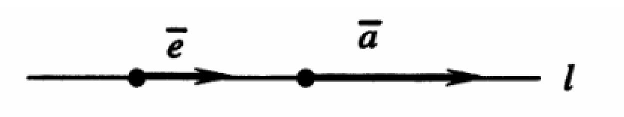
   $$пр_l(\alpha\bar{a}) = \alpha\, пр_l\bar{a}.$$

Базис и координаты вектора на прямой

Теорема. Пусть R_1 – множество векторов, параллельных данной прямой. Тогда любой ненулевой вектор $\bar{e}$ этого множества будет ***базисом в R_1***.

$\bar{e} \in R_1,\ \ \bar{a} \in R_1\ \Rightarrow \bar{a} = \alpha\bar{e}$,

α – координата вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e_1}$, $\bar{a} = (\alpha)$.



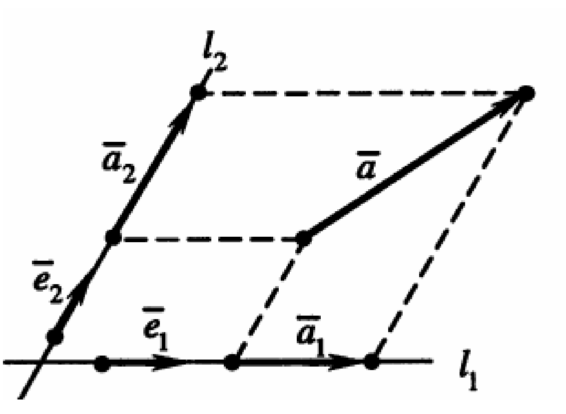
Теорема. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{в}$ **линейно зависимы** тогда и только тогда, когда они коллинеарные.

Базис и координаты вектора на плоскости.

Теорема. Пусть R_2 – множество векторов, параллельных данной плоскости. Тогда любая упорядоченная пара неколлинеарных вектор $\bar{e_1}$, $\bar{e_2}$ этого множества будет ***базисом в R_2***.

$\bar{a} \in R_2 \Rightarrow \bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2.$

Числа α_1, α_2 – координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e_1}$, $\bar{e_2}$. $\bar{a}$=(α_1, α_2).



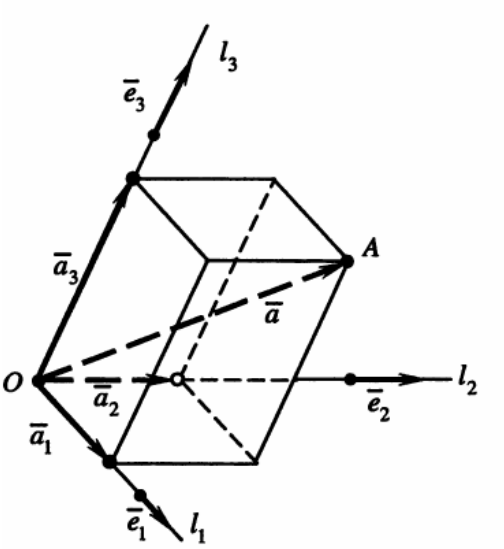
Теорема. Три вектора $\bar{a}$, $\bar{в}$ и $\bar{c}$ **линейно зависимы** тогда и только тогда, когда они компланарны – лежат в одной или параллельных плоскостях.

Базис и координаты вектора в пространстве.

Теорема. Пусть R_3 – множество векторов пространства. Тогда любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ этого множества будет **базисом в R_3**.

$\overline{a} \in R_3 \Rightarrow \overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 = \alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \alpha_3 \overline{e_3}.$

Числа α_1, α_2, α_3 – координаты вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$. $\overline{a}$=(α_1, α_2, α_3).



Теорема. Система любых четырех и более векторов пространства всегда **линейно зависима**.

Отметим, что базисов в пространстве может быть выбрано бесконечное множество. Но, если базис выбран, то разложение вектора в этом базисе всегда является единственным. Один и тот же вектор в разных базисах будет иметь разные координаты.

Разложить вектор по базису – значит найти координаты вектора в этом базисе.

Теорема. Все ***линейные операции над векторами*** сводятся к точно таким же линейным операциям ***над их соответствующими координатами***.

Задача. Даны векторы $\overline{a} = -2\overline{e}$ и $\overline{b} = 4\overline{e}$, параллельные оси, задаваемой вектором $\overline{e} \neq \overline{0}$. Требуется найти координаты векторов $\overline{a} + \overline{b}$; $-\overline{b}$; $\overline{a} - \overline{b}$; $3\overline{a} + 2\overline{b}$ относительно базиса $\overline{e}$, а также координату вектора $\overline{a} + \overline{b}$ относительно базиса $\overline{b}$.

Решение. Используя свойства коллинеарных векторов, находим разложение по базису $\overline{e}$:

$\overline{a}+\overline{b}=-2\overline{e}+4\overline{e}=2\overline{e}$;

$-\overline{b}=(-1)\overline{b}=(-1)4\overline{e}=-4\overline{e}$;

$\overline{a}-\overline{b}=-2\overline{e}-4\overline{e}=-6\overline{e}$;

$3\overline{a}+2\overline{b}=3(-2\overline{e})+2(4\overline{e})=2\overline{e}$.

Выразим вектор $\overline{a}$ через вектор $\overline{b}$, для этого выразим вектор $\overline{e}$ через вектор $\overline{b}$:

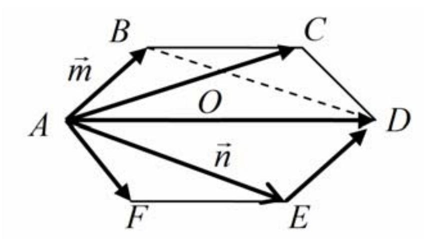
$\overline{e}=\overline{b}/4$;

$\overline{a}+\overline{b}=-2\dfrac{\overline{b}}{4}+\overline{b}=-\dfrac{\overline{b}}{2}+\overline{b}=\dfrac{\overline{b}}{2}$.

Заметим, что относительно базиса $\overline{e}$ вектор $\overline{a}+\overline{b}$ имеет координату 2, а относительно базиса $\overline{b}$ - координату равную ½.

Задача. В правильном шестиугольнике ABCDEP даны: $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{AE}=\vec{n}$. Разложить по этим двум векторам векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{AF}$.

Решение.



Сразу же можно заметить, что $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{m}+\vec{n}$, как диагональ параллелограмма ABDE. Далее $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, но $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (на основании свойств правильного шестиугольника), значит,

$\overrightarrow{AC}=\vec{m}+\dfrac{1}{2}(\vec{m}+\vec{n})=\dfrac{3}{2}\vec{m}+\dfrac{1}{2}\vec{n}$,

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{m}-\dfrac{3}{2}\vec{m}-\dfrac{1}{2}\vec{n}=-\dfrac{1}{2}\vec{m}-\dfrac{1}{2}\vec{n}$.

И последний вектор $\overrightarrow{AF}$ найдем так:

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=(\vec{m}+\vec{n})-\left(\dfrac{3}{2}\vec{m}+\dfrac{1}{2}\vec{n}\right)=-\dfrac{1}{2}\vec{m}+\dfrac{1}{2}\vec{n}$.

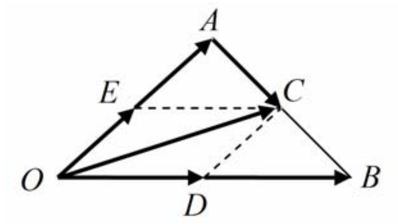
Итак, вектор $\overrightarrow{AD}$ в базисе $\vec{m},\vec{n}$ имеет координаты $\{1;1\}$.

Вектор $\overrightarrow{AC}$ в базисе $\vec{m},\vec{n}$ имеет координаты $\left\{\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$.

Вектор $\overrightarrow{AE}$ в базисе $\vec{m}, \vec{n}$ имеет координаты $\left\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$.

Вектор $\overrightarrow{AF}$ в базисе $\vec{m}, \vec{n}$ имеет координаты $\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

Задача. Даны векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ медиана ΔOAB. Разложить аналитически и геометрически вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Решение.

Очевидно, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, так как $\overrightarrow{OC}$ - медиана, то точка С делит отрезок АВ пополам. Следовательно,

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right), \text{ значит}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right).$$

Чтобы получить геометрическое разложение, проведем через конец вектора **с** прямые, параллельные сторонам ΔАВС, до пересечения с этими сторонами. Обозначим точки пересечения со сторонами Е и D. Из чертежа наглядно видно, что

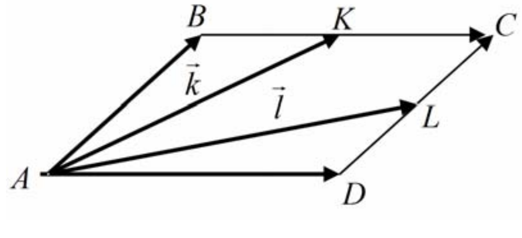
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}$, но $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, т.е.

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right).$$

Вектор $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}$ имеет координаты $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

Задача. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма ABCD. Полагая $\overrightarrow{AK} = \vec{k}$ и $\overrightarrow{AL} = \vec{l}$, выразить через векторы $\vec{k}$ и $\vec{l}$ векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Решение.



На основании правила треугольника - правила сложения векторов - имеем:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK} \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AL} \end{cases}$$

но $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \vec{k} \\ \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{l} \end{cases}.$$

Решая систему относительно $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, получим

$\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\left(2\vec{k} - \vec{l}\right) = \frac{4}{3}\vec{k} - \frac{2}{3}\vec{l}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\left(2\vec{l} - \vec{k}\right) = -\frac{2}{3}\vec{k} + \frac{4}{3}\vec{l}$.

Декартова прямоугольная система координат

Опр. ***Система координат*** – совокупность базиса и некоторой фиксированной точки.

Декартов базис в пространстве образован тройкой взаимно перпендикулярных векторов единичной длины $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$,

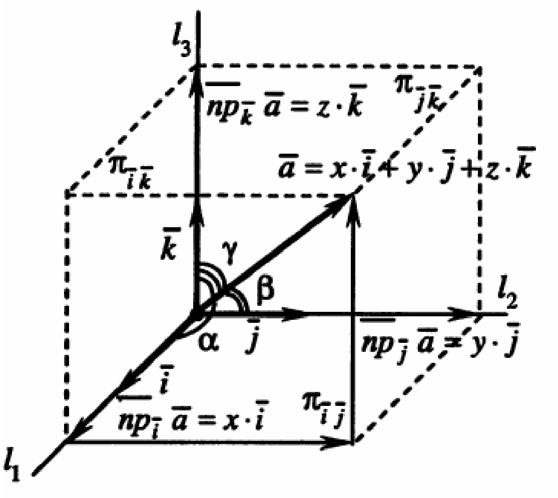
$$\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}, \quad |\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1,$$

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - орты трех взаимно перпендикулярных осей *OX,OY,OZ* декартовой системы координат, выходящей из общей точки *O* – начала координат. Такой базис называется ортонормированным.

Разложение вектора $\bar{a}$ а декартовом базисе в пространстве

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x, y, z)$$

x,y,z – декартовы координаты вектора $\bar{a}$ - проекции вектора $\bar{a}$ на соответствующие оси координат.



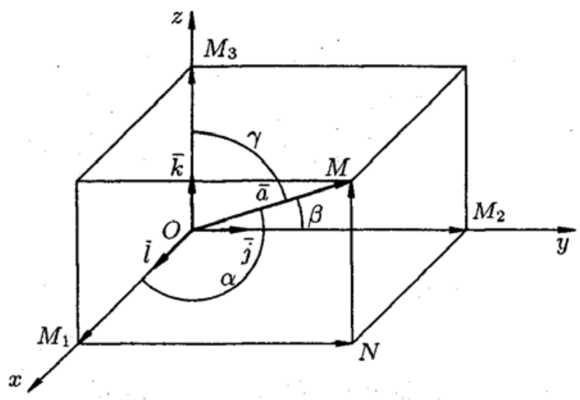
α, β, γ – углы между вектором $\bar{a}$ и осями координат *OX,OY,OZ* соответственно,

cos α, cos β, cos γ – направляющие косинусы вектора $\bar{a}$.

Радиус-вектором $\overline{OM}$ т. *M(x,y,z)* в трехмерном пространстве называется вектор, идущий из начала координат в эту точку. ***Координатами т. М*** в декартовой системе координат называют координаты соответствующего ей радиус-вектора $\overline{OM}$.

$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $x = np_{\bar{i}}\overline{OM} = \left|\overline{OM}\right|\cos\alpha$, $y = np_{\bar{j}}\overline{OM} = \left|\overline{OM}\right|\cos\beta$

$z = np_{z}\overline{OM} = \left|\overline{OM}\right|\cos\gamma$.



α, β, γ – углы между вектором $\overline{OM}$ и осями координат *OX,OY,OZ* соответственно,

cos α, cos β, cos γ – направляющие косинусы вектора $\overline{OM}$.

1*Линейные операции над векторами в координатной форме*

Все линейные операции над векторами сводятся к точно таким линейным операциям над их соответствующими координатами.

Пусть даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{в}$:

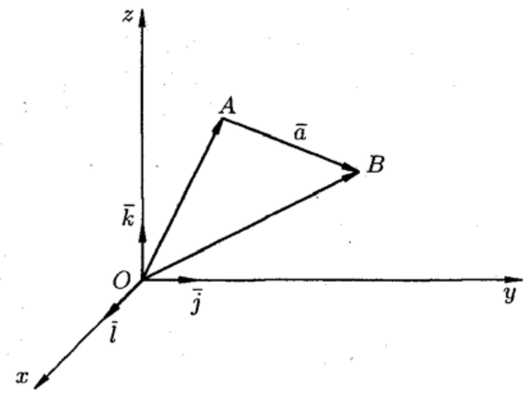
$\bar{a} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2) = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$.

1. ***Сумма векторов*** $\overline{a}+\overline{в}=\left(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2\right)$

2. ***Разность векторов*** $\overline{a}$ - $\overline{в}$= (x_1- x_2, y_1- y_2, z_1- z_2).

Следствие. Чтобы найти **координаты вектора** $\overline{AB}$, заданного координатами точек A(x_1,y_1,z_1) начала и B(x_2,y_2,z_2) конца вектора, нужно из координат конца вычесть координаты начала.

Очевидно $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=\left(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\right)$



3. ***Произведение*** вектора на число $\overline{в}=\alpha\overline{a}$ = $\alpha(x_1,y_1,z_1)$ = ($\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1$).

Следствие. Получим условие коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{в}$ в координатной форме.

$\overline{в}=\alpha\overline{a}=\left(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1\right)=\left(x_2, y_2, z_2\right)$, т.е. $x_2=\alpha x_1, y_2=\alpha y_1, z_2=\alpha z_1 \Rightarrow$

$\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{z_2}{z_1}=\alpha$ - ***координаты коллинеарных векторов пропорциональны***.

Задача. Даны векторы $\vec{a}$ ={3, 4}, $\vec{b}$ ={*-1,* 2}, $\vec{c}$ = {5, -2}. Найти координаты вектора $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c}$

Решение. Чтобы найти координаты, вектора $\vec{d}$, нужно координаты вектора $\vec{a}$ умножить на 2, к ним прибавить соответствующие координаты вектора $\vec{b}$, умноженные на 3, и координаты вектора $\vec{c}$, умноженные на (- 5), т.е.

$x_{\vec{d}}=2\cdot 3+3\cdot(-1)-5\cdot 5=-22,$

$y_{\vec{d}}=2\cdot 4+3\cdot 2-5\cdot(-2)=24.$

Ответ: $\vec{d}=\{-22; 24\}$.

2*Линейная комбинация векторов*

Координаты вектора $\overline{d}$, являющегося линейной комбинацией векторов $\overline{a}, \overline{в}, \overline{c}$, будут равны линейной комбинации одноименных координат этих векторов. Т.е. запись

$$\overline{d}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c},\ \overline{a}=\left(x_1, y_1, z_1\right), \overline{b}=\left(x_2, y_2, z_2\right), \overline{c}=\left(x_3, y_3, z_3\right), \overline{d}=\left(x_4, y_4, z_4\right).$$

в координатной форме будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_4 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \\ y_4 = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 \\ z_4 = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 \end{cases}$$

Таким образом, если в пространстве задан базис $\bar{a}$, $\bar{в}$, $\bar{c}$, то координаты (α, β, γ) вектора $\bar{d}$ в этом базисе найдутся из решения этой системы.

Для плоского случая

$$\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ y_3 = \alpha y_1 + \beta y_2 \end{cases}$$

Можно рассмотреть задачу о линейной зависимости векторов.

Два вектора линейно независимы, т.е. образуют базис на плоскости, если они не коллинеарны.

Три вектора линейно независимы, т.е. образуют базис на плоскости, если они не компланарны.

3. *Длина вектора. Расстояние между двумя точками.*

Если вектор задан в декартовой системе координат, то его длина находится по теореме Пифагора: $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Расстояние *AB* между двумя точками *A*(x_1,y_1,z_1) и *B*(x_2,y_2,z_2) можно рассматривать как длину вектора $\overline{AB}$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

4. *Орт вектора. Направляющие косинусы вектора.*

<u>Опр</u>. Ортом оси l называется вектор $\overline{l^0}$, имеющий единичную длину и направление, совпадающее с направлением оси.

<u>Опр</u>. Ортом вектора $\bar{a}$ называется вектор $\overline{a^0}$, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$ и длина равна 1.

$$\overline{a^0} \parallel \bar{a},\ |\overline{a^0}| = 1,\ \overline{a^0} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} .$$

Чтобы найти координаты орта, нужно разделить этот вектор на его длину:

$$\overline{a^0} = \left(\frac{x}{|\bar{a}|}, \frac{y}{|\bar{a}|}, \frac{z}{|\bar{a}|} \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

Как известно, для задания вектора нужно знать его длину и направление. Направление вектора задается углами α, β, γ, которые он образует с осями координат *OX,OY,OZ*, соответственно. Зная координаты вектора, можно найти косинусы этих углов, которые называются направляющими косинусами вектора

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overline{a}|},\ \cos\beta = \frac{y}{|\overline{a}|}, \cos\gamma = \frac{z}{|\overline{a}|}.$$

Следовательно величины направляющих косинусов являются ординатами орта данного вектора $\overline{a^0} = \left(\frac{x}{|\overline{a}|}, \frac{y}{|\overline{a}|}, \frac{z}{|\overline{a}|}\right) = \left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right)$

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ – **основное свойство** направляющих косинусов

Зная длину вектора и углы, которые он образует с осями координат, можно найти координаты вектора.

$$x = |\overline{a}|\cos\alpha,\ y = |\overline{a}|\cos\beta,\ z = |\overline{a}|\cos\gamma.$$

Задача. Представить вектор $\vec{c}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$\vec{a}$ ={5,4}, $\vec{b}$ ={-3,3}, $\vec{c}$ ={19,8}

Решение. По определению линейной комбинации имеем

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$

где α и β - коэффициенты линейной комбинации, которые и надо найти. Переходя от векторной формы записи вектора $\vec{c}$ к координатной, подставим вместо векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ сначала их первые координаты::

$$19 = \alpha \cdot 5 + \beta \cdot (-3),$$

затем - вторые координаты:

$$8 = \alpha\ 4 + \beta \cdot 3.$$

Получаем для нахождения неизвестных коэффициентов α и β следующую систему:

$$\begin{cases} 19 = 5\alpha - 3\beta, \\ 8\ \ = 4\alpha + 3\beta, \end{cases}$$

решив которую, получаем α =3; β = -4/3.

Ответ: $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}.$

Задача. На плоскости даны три вектора $\vec{p}$ ={2,-3}, $\vec{q}$ ={1,2}, $\vec{r}$ = {9,4}.Убедившись, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ образуют базис, найти разложение вектора $\vec{r}$ по базису $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

Решение. Убедимся, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ образуют базис.

Для этого убедимся, что координаты этих векторов не пропорциональны:

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{2}$$

Следовательно, векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарные и образуют базис на плоскости. Далее решение идет аналогично решению предыдущей задачи. Решая систему

$$\begin{cases} 9 = 2\alpha + \beta \\ 4 = -3\alpha + 2\beta \end{cases}$$

получаем α = 2, β = 5.

Искомое разложение имеет вид: $\vec{r} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$.

Задача. Построить векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + 10\vec{j}$. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ аналитически и геометрически.

Решение: Аналитическое разложение имеет вид:

$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Для нахождения коэффициентов α и β составим систему:

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha + 5\beta \\ 10 = -3\alpha + 4\beta \end{cases}$$

решением которой являются α= -2, β = 1 . Значит,

$\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$

Чтобы получить геометрическое разложение, мы должны представить вектор $\vec{c}$ в виде диагонали параллелограмма, стороны которого лежат на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.8) . Для этого проведем следующие построения. Продолжим прямые, на которых лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Затем через конец вектора $\vec{c}$ проведем прямые, параллельные сторонам параллелограмма, до пересечения с ними.

В нашем случае вектор $\vec{c}$ есть диагональ параллелограмма со сторонами $-2\vec{a}$ и $\vec{b}$, выходящими из одной и той же точки, т. е.

$\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$.

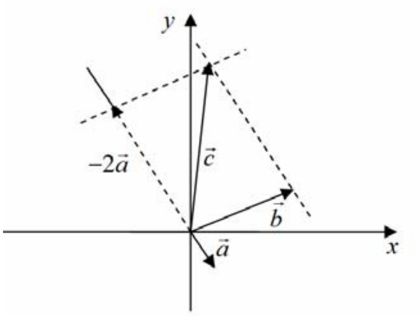


Рис.8

Аналитическое разложение совпало с геометрическим.

Задача. Даны точки *A* (1, 2, -1), *B* (5, 8, -3), *C* (2, 1, 1), *D* (4, 4, 0). Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены - в одну сторону или в противоположные

Решение: Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, вычитая из координат точек - концов векторов соответствующие координаты точек - начал векторов

$\overrightarrow{AB}$ = {4, 6, -2} $\overrightarrow{CD}$ ={2, 3,-1}

Коллинеарные векторы имеют пропорциональные соответствующие координаты. В нашем случае

$\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{-2}{-1}=2$. Следовательно, векторы коллинеарные.

Коэффициент пропорциональности положителен, значит, векторы направлены в одну сторону. Найдем длины векторов по формуле $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где x, y, z - координаты $\vec{a}$.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+6^2+(-2)^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14},$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}.$$

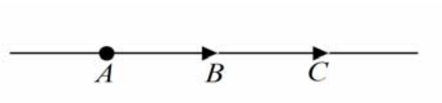
Вектор $\overrightarrow{AB}$ в 2 раза длиннее вектора $\overrightarrow{CD}$.

Задача. Показать, что точки A (2, 1, -5), B (-8, 1, 20), C (4, 1,-10) лежат на одной прямой.

Решение: Данные точки соединим между собой векторами, например, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{AB}=\{-10,0,25\}$, $\overrightarrow{BC}=\{12,0,-30\}$.

Замечаем, что их соответствующие координаты пропорциональны между собой: $\frac{-10}{12}=\frac{0}{0}=\frac{-25}{-30}$.

Отсюда следует, что векторы коллинеарны. Коллинеарные векторы лежат либо на параллельных прямых, либо на одной прямой. Поскольку векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ имеют общую точку B и притом коллинеарны, делаем вывод, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ лежат на одной прямой, но тогда и точки A, B, C, тоже будут лежать на одной прямой.

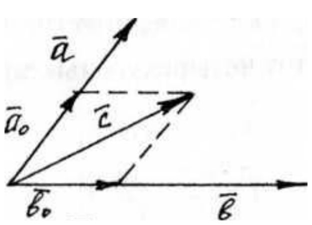


Задача. Из одной точки проведены векторы $\bar{a}$ = {-3, 0, 4} и $\bar{b}$ = (5,2,-14}. Найти единичный вектор, который, будучи отложен от той же точки, делит пополам угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение. Найдем единичные векторы a_0 и $в_0$, коллинеарные векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ соответственно:

$$\overline{a_0}=\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|},\ \overline{b_0}=\frac{\bar{b}}{\left|\bar{b}\right|},$$

$$|\bar{a}|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=5,\ \left|\bar{b}\right|=\sqrt{5^2+(-2)^2+(-14)^2}=15.$$



Тогда $\overline{a_0}=\left\{-\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}\right\},\ \overline{b_0}=\left\{\frac{5}{15},-\frac{2}{15},-\frac{14}{15}\right\}..$

Вектор $a_0+в_0$ будет являться диагональю ромба (так как стороны ромба имеют одинаковую длину) и, следовательно, будет делить угол между векторами *а₀* и *в*₀, т е. угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$ пополам:

$$\overline{c}=\overline{a}_0+\overline{b}_0=\left\{-\frac{3}{5}+\frac{5}{15};0-\frac{2}{15};\frac{4}{5}-\frac{14}{15}\right\}=\left\{-\frac{4}{15};-\frac{2}{15};-\frac{2}{15}\right\}.$$

По условию требуется найти единичный вектор, соответствующий вектору $\overline{c}$, т.е.

$$\overline{c_0}=\frac{\overline{c}}{|\overline{c}|},\ |\overline{c}|=\frac{\sqrt{16+4+4}}{15}=\frac{\sqrt{24}}{15}=\frac{2\sqrt{6}}{15}.$$

Тогда окончательно получаем

$$\overline{c_0}=\frac{\overline{c}}{|\overline{c}|}=\left\{-\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}.$$

Задача. Представить вектор $\vec{d}=\{4,0,0\}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}=\{1,1,-1\}$, $\vec{b}=\{2,3,0\}$ и $\vec{c}=\{4,1,2\}$.

Решение: Вектор $\vec{d}$ будет иметь вид:

$\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$

коэффициенты линейной комбинации α, β, γ, которые и надо найти. Переходя от векторного равенства к координатным, получаем систему линейных уравнений для нахождения α, β и γ:

$$\begin{cases}4=\alpha+2\beta+4\gamma\\0=\alpha+3\beta+\gamma\\0=-\alpha+2\gamma\end{cases}$$

Решая систему метом Крамера, находим определители:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&4\\1&3&1\\-1&0&2\end{vmatrix}=12,\ \Delta_\alpha=\begin{vmatrix}4&2&4\\0&3&1\\0&0&2\end{vmatrix}=24,$$

$$\Delta_\beta=\begin{vmatrix}1&4&4\\1&0&1\\-1&0&2\end{vmatrix}=-12,\ \Delta_\gamma=\begin{vmatrix}1&2&4\\1&3&0\\-1&0&0\end{vmatrix}=12.$$

Откуда получаем $\alpha=\frac{\Delta_\alpha}{\Delta}=2$, $\beta=\frac{\Delta_\beta}{\Delta}=-1$, $\gamma=\frac{\Delta_\gamma}{\Delta}=1$.

Вектор $\vec{d}$ будет иметь вид: $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Задача. Даны две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Найти координаты точки M_3, лежащей на отрезке $M_1 M_2$ и делящей длину этого отрезка в отношении $m:n=\lambda$.

$M_1M_3:M_3M_2=m:n=\lambda\Rightarrow M_1M_3=\lambda\cdot M_3M_2$. Это равенство в координатной форме равносильно системе

$$\begin{cases} x_3 - x_1 & = & \lambda(x_2 - x_3) \\ y_3 - y_1 & = & \lambda(y_2 - y_3) \\ z_3 - z_1 & = & \lambda(z_2 - z_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 & = & \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y_3 & = & \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \\ z_3 & = & \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

Лекция 4

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Опр. ***Скалярным произведением*** двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{в}$ называется число, обозначаемое символом ($\bar{a}$, $\bar{в}$) и равное произведению длин векторов на косинус угла между ними: ($\bar{a}$, $\bar{в}$) = $|\bar{a}|\,|\bar{в}|\cos(\bar{a} \wedge \bar{в})$.

Если один из векторов или оба нулевые, то скалярное произведение полагается равным нулю.

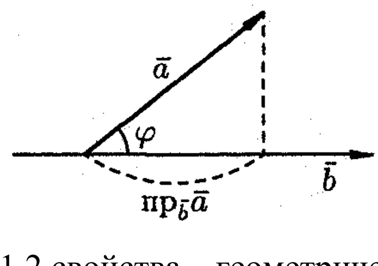
Реальным прообразом скалярного произведения является работа А постоянной силы $\bar{F}$, действующей на тело под углом α к направлению движения при перемещении на прямолинейном участке пути, характеризуемом вектором $\bar{S}$: А= $A = |\bar{F}||\bar{S}|\cos\alpha = (\bar{F}, \bar{S})$.

Свойства скалярного произведения.

Теор.1. Необходимым и достаточным условием равенства нулю скалярного произведения двух ненулевых векторов (($\bar{a}$, $\bar{в}$)=0) является их ортогональность ($\bar{a} \perp \bar{в}$).

Теор.2. Скалярное произведение двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{в}$ равно произведению модуля одного из них на проекцию другого на ось, определяемую первым вектором.

($\bar{a}$, $\bar{в}$) = $|\bar{в}|\,|\bar{a}|\cos(\bar{a} \wedge \bar{в})$=$|\bar{в}|\; пр_{\bar{в}}\bar{a}$,



1,2 свойства – геометрические свойства.

3) ($\bar{a}$, $\bar{в}$)= ($\bar{в}$, $\bar{a}$) – переместительное свойство,

4) $(\alpha\overline{a},\ \overline{в})=\alpha(\overline{a},\ \overline{в})$ – постоянный множитель можно выносить за знак скалярного произведения.

5) $(\overline{a}+\overline{в},\ \overline{c})=(\overline{a},\ \overline{c})+(\overline{в},\ \overline{c})$ – распределительное свойство.

Рассмотренные свойства позволяют при скалярном перемножении линейных комбинаций векторов действовать по тем же законам, что и при перемножении алгебраических многочленов.

Пример.

$$(\overline{a}-2\overline{в}+4\overline{c},3\overline{a}+5\overline{в}-7\overline{c})=3(\overline{a},\overline{a})+5(\overline{a},\overline{в})-7(\overline{a},\overline{c})-6(\overline{в},\overline{a})-10(\overline{в},\overline{в})+14(\overline{в},\overline{c})+12(\overline{c},\overline{a})+$$
$$+20(\overline{c},\overline{в})-28(\overline{c},\overline{c})$$

Выражение скалярного произведения в декартовых координатах

<u>Теор</u>. Скалярное произведение двух векторов равно ***сумме произведений их одноименных декартовых координат*** относительно одного и того же базиса.

<u>Док-во</u>.: Пусть векторы $\overline{a}$ и $\overline{в}$ заданы в одном и том же декартовом базисе $(\overline{i},\overline{j},\overline{k})$: $\overline{a}$ = (x_1,y_1,z_1)= $x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}$, $\overline{в}$= (x_2,y_2,z_2)= $x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}$. Тогда, пользуясь таблицей скалярного произведения векторов $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$, получаем:

	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	1	0	0
$\overline{j}$	0	1	0
$\overline{k}$	0	0	1

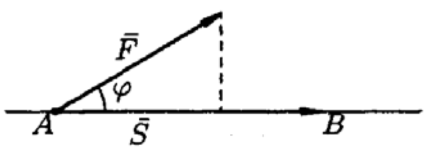
$$\left(\overline{a},\overline{b}\right)=x_1x_2(\overline{i},\overline{i})+x_1y_2(\overline{i},\overline{j})+x_1z_2(\overline{i},\overline{k})+y_1x_2(\overline{j},\overline{i})+y_1y_2(\overline{j},\overline{j})+y_1z_1(\overline{j},\overline{k})+$$
$$+z_1x_2(\overline{k},\overline{i})+z_1y_2(\overline{k},\overline{j})+z_1z_2(\overline{k},\overline{k})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

$(\overline{a},\ \overline{в})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

<u>Приложения скалярного произведения</u>

1. Вычисление **работы силы F** по перемещению S.

Реальным прообразом скалярного произведения является работа A постоянной силы $\vec{F}=(x_1,y_1,z_1)$, действующей на тело под углом φ к направлению движения при перемещении на прямолинейном участке пути, характеризуемом вектором $\overline{S}=(x_2,y_2,z_2)$: $A=\left(\vec{F},\vec{S}\right)=\left|\vec{F}\right|\left|\vec{S}\right|\cos\varphi=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.



2. Вычисление **длины вектора**.

$(\bar{a},\bar{a}) = |\bar{a}|^2 \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})}$

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где $\vec{a} = \{x, y, z\}$ в прямоугольной системе координат.

3. Нахождение **угла между векторами**.

Из определения скалярного произведения ($\bar{a}$, $\bar{в}$) = $|\bar{a}|\,|\bar{в}|\cos(\bar{a} \wedge \bar{в}) \Rightarrow$

$\cos(\bar{a} \wedge \bar{в}) = \dfrac{(\vec{a},\vec{в})}{|\vec{a}||\vec{в}|}$.

или $\cos\left(\vec{a}\wedge\vec{в}\right) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$,

где $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$

4. Нахождение **проекции вектора на вектор**.

Из выражения скалярного произведения ($\bar{a}$, $\bar{в}$) = $|\bar{в}|\,|\bar{a}|\cos(\bar{a} \wedge \bar{в}) = |\bar{в}|\, пр_{\bar{в}}\bar{a} \Rightarrow$

$пр_{\bar{в}}\bar{a} = \dfrac{(\vec{a},\vec{в})}{|\vec{в}|}$.

$пр_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{(\vec{a},\vec{в})}{|\vec{в}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ в прямоугольной системе координат.

5. Проверка **условия перпендикулярности** векторов.

Из $\bar{a} \perp \bar{в} \Rightarrow (\bar{a}, \bar{в}) = |\bar{a}|\,|\bar{в}|\cos(\pi/2) = 0$ и наоборот.

Из $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ в прямоугольной системе координат.

Задача. Даны векторы $\vec{a}$ ={5, -6, 1}, $\vec{b}$ ={-4,3,0}, $\vec{c}$ ={3, 1,2}. Найти

1) $3\vec{a}^2 - 4\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 2\vec{c}^2$,

2) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Решение: Квадрат вектора есть скалярное произведение вектора на себя, т.е. $\vec{a}^2 = \left(\vec{a},\vec{a}\right)$. Тогда

$3\vec{a}^2 - 4\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 2\vec{c}^2 = 3\left(\vec{a},\vec{a}\right) - 4\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 2\left(\vec{c},\vec{c}\right)$.

Пользуясь формулой для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами,

$(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$,

где x_1, y_1, z_1- координаты вектора $\vec{a}$, x_2, y_2, z_2 - координаты вектора $\vec{b}$, получаем

3 [5 • 5 + (-6) (-6) + 1 • 1] - 4 [5 • (-4) + (-6)•3 +1•0] +
+ 2 [3 •3 + 1• 1+2 •2] = 366.

2) Так как скалярное произведение $(\vec{a},\vec{b})$ представляет собой скалярную величину, то

$\left(\vec{a},\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ есть вектор, коллинеарный вектору $\vec{c}$, поэтому координаты этого вектора будут равны координатам вектора $\vec{c}$, умноженным на число ($\vec{a}$, $\vec{b}$).

($\vec{a}$, $\vec{b}$) = 5• (-4) + (-6) •3 + 1 • 0 = -38

$\left(\vec{a},\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ =- {-38•3 - 38• 1 -38 •2} = {-114,-38, -76}.

Задача. Даны точки A (-1, 3, 7), B (2, -1, 5), C (0,1,-5). Вычислить $\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB},2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$.

Решение.

Первый способ.

Найдем координаты $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, , $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ и воспользуемся свойствами скалярного произведения:

$\overrightarrow{AB}=\{3,-4,12\}$ $\quad\overrightarrow{BA}=\{-3,4,-12\}$

$\overrightarrow{BC}=\{-2,2,-10\}$ $\quad\overrightarrow{CB}=\{2,-2,10\}$

$$\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB},2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)=4\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)-2\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BC}\right)+$$

$$+2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}\right)-\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BA}\right)=4\left(-6-8-120\right)-2\left(-4-4-100\right)+$$

$$+2\left(-9-16-144\right)-\left(-6-8-120\right)=-524$$

Второй способ

Зная координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$, найдем координаты векторов-сомножителей $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$ и $2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$:

$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\{4,-6,14\}$ $\qquad 2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\{-7,8,-32\}$

Тогда их скалярное произведение будет равно сумме произведений соответствующих координат

$$\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB},2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)=4\cdot\left(-7\right)+\left(-6\right)\cdot 8+14\cdot\left(-32\right)=-524$$

Задача. Даны вершины четырехугольника A (1, -2, 2), B (1, 4, 0), C (-4, 1, 1), D (-5, -5, 3). Доказать, что его диагонали $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ взаимно перпендикулярны.

Решение. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, совпадающие с диагоналями четырехугольника. Если эти векторы взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение должно быть равно 0. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ и вычислим их скалярное произведение:

$\overrightarrow{AC}=\{-5,3,-1\}$; $\qquad\overrightarrow{BD}=\{-6,-9,3\}$

$$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)=\left(-5\right)\cdot\left(-6\right)+3\left(-9\right)+\left(-1\right)\cdot 3=0\Rightarrow\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD},$$

что и требовалось доказать.

Задача. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F}$ = {3,-2,-5}, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A (2, -3, 5) в положение B (3,-2,-1).

Решение. Согласно пункту 1.4, работа будет равна скалярному произведению вектора - силы $\vec{F}$ на вектор - путь $\overrightarrow{AB}$, т.е. $A=\left(\vec{F},\overrightarrow{AB}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Найдя координаты вектора AB = {1, 1, -6}, вычислим скалярное произведение

$$A=\left(\vec{F},\overrightarrow{AB}\right)=3\cdot 1+\left(-2\right)1+\left(-5\right)\left(-6\right)=31\,ед.раб.$$

Задача. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a}=\{6,-2,3\}$

Решение. Используем формулы:

$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$,где $\vec{a} = \{x, y, z\}$.

Так как $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$, то

$\cos\alpha = \frac{6}{7}$, $\cos\beta = -\frac{2}{7}$, $\cos\gamma = \frac{3}{7}$.

Задача. Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями ОХ и ОУ углы α = 60^0 и β=120^0. Вычислить его координаты, если $|\vec{a}|$=2.

Решение. Зная направляющие косинусы вектора, можно найти его координаты по формулам:
$x = |\vec{a}|\cos\alpha$, $y = |\vec{a}|\cos\beta$, $z = |\vec{a}|\cos\gamma$.

По условию α = 60^0 и β=120^0. Значит, $\cos\alpha = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \cos 120^0 = -\frac{1}{2}$.

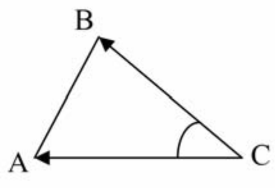
Зная, что направляющие косинусы вектора удовлетворяют условию
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,
найдем неизвестный пока $\cos\gamma$.
$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Мы получили два значения $\cos\gamma$, следовательно, и третья координата вектора будет иметь два значения.
Итак, один вектор, модуль которого равен 2, имеет координаты
$x_1 = 2\frac{1}{2} = 1$, $y_1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, $z_1 = 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
Второй вектор с таким же модулем имеет координаты
$x_2 = 2\frac{1}{2} = 1$, $y_2 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, $z_2 = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$.

Задача. Даны вершины треугольника *A* (2,-1,3), *B*(1,1,1), *C*(0,0,5). Найти внутренний угол при вершине *C*.

Решение. Внутренний угол при вершине С образуется векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, исходящими из общей точки - вершины *C* треугольника ABC. Угол между двумя векторами находится по формуле (для нашего случая):

$$\cos\angle C = \cos\left(\overrightarrow{CA}\,\hat{}\,\overrightarrow{CB}\right) = \frac{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}.$$



Найдем координаты векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$:
$\overrightarrow{CA} = \{2, -1, -2\}$, $\overrightarrow{CB} = \{1, 1, -4\}$.
$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$, $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = 2 - 1 + 8 = 9$.
$\cos\angle C = \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle C = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^0$.

Задача. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, угол между которыми равен 60°.

Решение. Диагоналями параллелограмма являются векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$. Найдем их:

$\vec{a} + \vec{b} = (2\vec{m} + \vec{n}) + (\vec{m} - 2\vec{n}) = 3\vec{m} - \vec{n}$,

$\vec{a} - \vec{b} = (2\vec{m} + \vec{n}) - (\vec{m} - 2\vec{n}) = \vec{m} + 3\vec{n}$.

Используя формулу для скалярного квадрата вектора $\vec{c}$:

$(\vec{c}, \vec{c}) = |\vec{c}|^2$, получим $|\vec{c}| = \sqrt{(\vec{c}, \vec{c})}$. Тогда

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}\right)} = \sqrt{(3\vec{m} - \vec{n}, 3\vec{n} - \vec{m})} =$$

$$= \sqrt{9(\vec{m}, \vec{m}) - 6(\vec{m}, \vec{n}) + (\vec{n}, \vec{n})} = \sqrt{9|\vec{m}|^2 - 6|\vec{m}||\vec{n}|\cos(\vec{m}\hat{}\vec{n}) + |\vec{n}|^2}.$$

По условию задачи $|\vec{m}| = 1,\ |\vec{n}| = 1,\ \vec{m}\hat{}\vec{n} = 60^0$.

Подставив эти данные, получаем:

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{9 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{7}.$$

Аналогично считаем длину другой диагонали:

$$\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{(\vec{m} + 3\vec{n}, \vec{m} + 3\vec{n})} = \sqrt{(\vec{m}, \vec{m}) + 6(\vec{m}, \vec{n}) + 9(\vec{n}, \vec{n})} =$$

$$= \sqrt{|\vec{m}|^2 + 6|\vec{m}||\vec{n}|\cos(\vec{m}\hat{}\vec{n}) + 9|\vec{n}|^2} = \sqrt{1 + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 9} = \sqrt{13}$$

Задача. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 3, -2\right\}$ на ось, составляющую с координатными осями ОХ и ОY углы α = 45^0 и β=60^0, а с осью OZ острый угол γ.

Решение. Проекция вектора $\vec{a}$ на произвольную ось $\vec{e}$ определяется формулой $np_{\vec{e}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{e})}{|\vec{e}|} = (\vec{a}, \vec{e}_0)$, где $\vec{e}_0$ - единичный вектор оси $\vec{e}$. Зная углы, которые образует ось $\vec{e}$ с координатными осями, можно задать координаты вектора $\vec{e}_0$ в виде направляющих косинусов, т е.

$\vec{e}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Зная два угла α и β, мы найдем два направляющих косинуса cos α и cos β, а затем и cos γ, как это было сделано в предыдущей задаче.

$$\cos\alpha = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\beta = \cos 60^0 = \frac{1}{2},$$

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},\ \Rightarrow \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}.$$

По условию ось $\vec{e}$ образует с осью OZ острый угол, следовательно, выбираем $\Rightarrow \cos\gamma = \frac{1}{2}$,

тогда $\vec{e}_0 = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, а проекция будет равна

$$np_{\vec{e}}\vec{a} = (\vec{a}, \vec{e}_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\frac{1}{2} + (-2)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 1.$$

Задача. Даны три вектора: $\vec{a} = \{1, 2, -1\},\ \vec{b} = \{3, 0, 2\},\ \vec{c} = \{2, -2, 1\}$.

Вычислить: 1) $np_{\vec{c}}\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$; 2) $np_{(\vec{a}-2\vec{c})}\vec{b}$.

Решение. Первая проекция будет находиться по формуле

$$np_{\vec{c}}\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{\left(2\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)}{|\vec{c}|}.$$

Найдем координаты вектора $2\vec{a}+\vec{b}=\{5,4,0\}$. Скалярное произведение двух векторов $2\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{c}$, заданных своими координатами, равно сумме произведений их одноименных координат:

$$\left(2\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=5\cdot 2+4\cdot(-2)+0\cdot 1=10-8=2$$

Тогда

$$np_{\vec{c}}\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{\left(2\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)}{|\vec{c}|}=\frac{2}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}.$$

Аналогично для второй проекции имеем

$$np_{(\vec{a}-2\vec{c})}\vec{b}=\frac{\left(\vec{b},\vec{a}-2\vec{c}\right)}{|\vec{a}-2\vec{c}|}.$$

Координаты вектора $\vec{a}-2\vec{c}=\{-3,6,-3\}$, его модуль равен

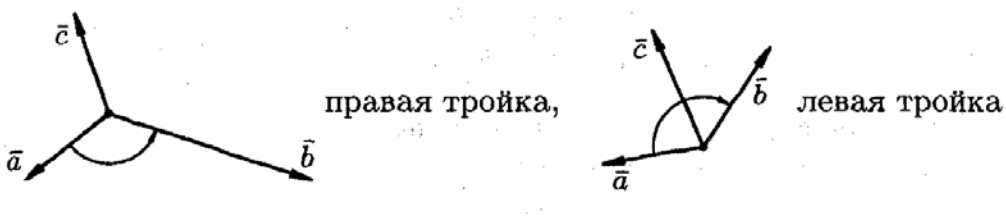
$$|\vec{a}-2\vec{c}|=\sqrt{9+36+9}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}.$$

Тогда

$$np_{(\vec{a}-2\vec{c})}\vec{b}=\frac{\left(\vec{b},\vec{a}-2\vec{c}\right)}{|\vec{a}-2\vec{c}|}=\frac{3\cdot(-3)+0\cdot 6+2\cdot(-3)}{3\sqrt{6}}=\frac{-15}{3\sqrt{6}}=-\frac{5}{\sqrt{6}}.$$

Векторное произведение векторов

Три некомпланарных вектора $\overline{a}$, $\overline{в}$ и $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\overline{a}$ ко второму вектору $\overline{в}$ виден против часовой стрелки, и **левую**, если по часовой.

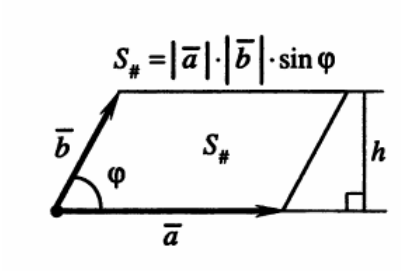


Опр. ***Векторным произведением*** векторов $[\vec{a},\vec{в}]$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{в}$ называется третий вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

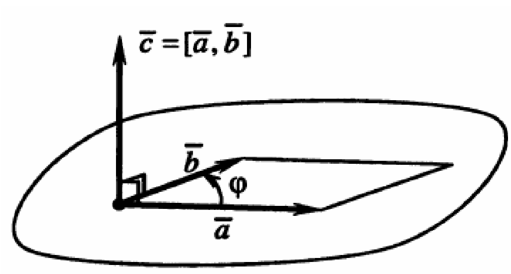
1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{в}$;

2) длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{в}$, и равна произведению длин этих векторов на синус угла φ между ними

$$|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{в}]| = |\vec{a}||\vec{в}|\sin\varphi\,;$$



3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что из его конца кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{в}$ виден против часовой стрелки (векторы $\bar{a}$, $\bar{в}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку) .



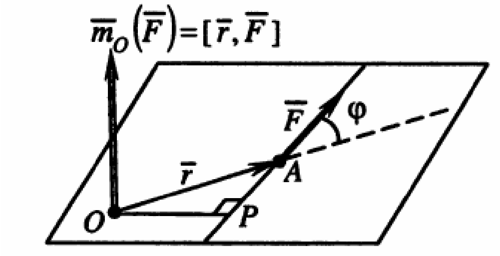
Геометрически модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{в}$.

$$|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{в}]| = S_{парал.}$$

Механический смысл векторного произведения.

Пусть т.О неподвижная т. твердого тела. К нему приложена сила F к т. А. Момент этой силы относительно неподвижной т. О равен векторному произведению векторов ОА и F:

$$\vec{m}_0 = \left[O\vec{A}, \vec{F} \right].$$

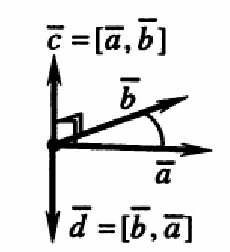


Свойства векторного произведения

1. При **перестановке сомножителей** векторное произведение меняет знак:

$[\vec{a},\vec{в}] = -[\vec{в},\vec{a}]$,

так как при повороте от вектора $\bar{в}$ к $\bar{a}$ меняется на противоположное направление вектора $\vec{c}$.



2. Векторное произведение **коллинеарных векторов** ($\varphi = 0$) равно нулевому вектору ($\sin\varphi = 0$).

$[\vec{a},\vec{в}] = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$ Отсюда следует, что $[\vec{a},\vec{a}] = 0.$

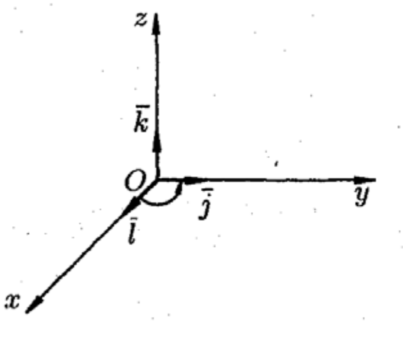
3. **Постоянный множитель** можно выносить за знак векторного произведения: $[\alpha\vec{a},\vec{в}] = \alpha[\vec{a},\vec{в}].$

4. Векторное произведение подчиняется распределительному закону

$[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\bar{c}] + [\bar{b},\bar{c}].$

5. Из определения векторного произведения следует, что векторные произведения **единичных векторов** будут соответственно

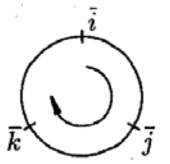
*[**i**,**i**] = [**j**,**j**] =[**k**,**k**] = 0,* *[**i**,**j**] = **k**, [**j**,**k**] =**i** , [**k**,**i**] = **j**.*



Выражение векторного произведения через координаты векторов в прямоугольной декартовой системе координат.

Будем использовать таблицу векторного произведения векторов ***i, j, k***.

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$



Чтобы не ошибиться со знаком, удобно пользоваться схемой: если направление кратчайшего пути от первого вектора ко второму совпадает с направлением стрелки, то произведение равно третьему вектору, если не совпадает - третий вектор берется со знаком «минус».

Пусть даны два вектора $\bar{a} = (x_1,\ y_1, z_1)$ и $\bar{в} = (x_2,\ y_2, z_2)$. Учитывая свойства векторного произведения, найдем

$$\left[\vec{a},\vec{в}\right] = \left[x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right] =$$

$$= x_1x_2\left[\vec{i},\vec{i}\right] + x_1y_2\left[\vec{i},\vec{j}\right] + x_1z_2\left[\vec{i},\vec{k}\right] + \ldots =$$

$$= \vec{i}\left(y_1z_2 - z_1y_2\right) - \vec{j}\left(x_1z_2 - z_1x_2\right) + \vec{k}\left(x_1y_2 - y_1x_2\right) =$$

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Приложения векторного произведения

1. Нахождение **площадей параллелограмма** и треугольника.

$$S_{парал.} = \left|\left[\vec{a},\vec{в}\right]\right|, \quad S_{треуг.} = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{a},\vec{в}\right]\right| .$$

2. Нахождение **вектора, перпендикулярного двум другим векторам**.

Если требуется найти вектор, перпендикулярный одновременно двум векторам, то в качестве такого вектора можно взять вектор, пропорциональный векторному произведению заданных векторов, т.е.

$\vec{c} = \alpha\left[\vec{a},\vec{в}\right]$, где α – некоторое число.

3. Нахождение **момента силы**.

Решение задач.

2.1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$ образуют между собой угол $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Зная, что $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2},\ \left|\vec{b}\right| = 2,$ найти: $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$, $\left|\left[2\vec{a} - \vec{b}, 3\vec{a} + 4\vec{b}\right]\right|$, $\left[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}\right]^2$.

Решение.

1) По определению векторного произведения его модуль равен
$\left|\left[\vec{a},\vec{в}\right]\right| = |\vec{a}||\vec{в}|\sin\varphi = \sqrt{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$.

2) Используя распределительное свойство векторного произведения, найдем $\left|\left[2\vec{a}-\vec{b},3\vec{a}+4\vec{b}\right]\right|$, перемножая каждое слагаемое первого вектора $2\vec{a}-\vec{b}$ на каждое слагаемое второго вектора. При этом надо следить за порядком множителей, потому что векторное произведение не перестановочно.
$\left[2\vec{a}-\vec{b},3\vec{a}+4\vec{b}\right] = \left[2\vec{a},3\vec{a}\right]-\left[\vec{b},3\vec{a}\right]+\left[2\vec{a},4\vec{b}\right]-\left[\vec{b},4\vec{b}\right]$.
Но $\left[2\vec{a},3\vec{a}\right]=0$, $\left[\vec{b},4\vec{b}\right]=0$, так как векторное произведение коллинеарных векторов равно 0, а $\left[\vec{b},3\vec{a}\right]=-\left[3\vec{a},\vec{b}\right]$, поскольку при перестановке перемножаемых векторов векторное произведение меняет свой знак на противоположный. Учитывая это и вынося постоянный множитель за знак векторного произ- введения, получаем:
$\left[2\vec{a}-\vec{b},3\vec{a}+4\vec{b}\right] = 3\left[\vec{a},\vec{b}\right]+8\left[\vec{a},\vec{b}\right]=11\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.
Окончательно:
$\left|\left[2\vec{a}-\vec{b},3\vec{a}+4\vec{b}\right]\right| = \left|11\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = 11\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = 11\cdot 2 = 22$.

3) Выражение $\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]^2$ представляет собой скалярный квадрат вектора $\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]$ и, следовательно, равен квадрату модуля этого векторного произведения.

Сначала найдем $\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]$ аналогично тому, как мы это делали в предыдущем примере, т.е.

$$\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right] = \left[2\vec{a},\vec{a}\right]+\left[\vec{b},\vec{a}\right]+\left[2\vec{a},2\vec{b}\right]+\left[\vec{b},2\vec{b}\right] = \\ = -\left[\vec{a},\vec{b}\right]+4\left[\vec{a},\vec{b}\right]=3\left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

Затем найдем модуль $\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]$:

$\left|\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]\right| = 3\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = 3\cdot 2 = 6$.

Окончательно,

$\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]^2 = \left|\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]\right|^2 = 6^2 = 36.$

2.2. Упростить выражение

$\left[\vec{i}-2\vec{j},\vec{i}+\vec{k}\right]-\left[\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},2\vec{j}-\vec{k}\right]$.

Решение. Сначала найдем первое слагаемое.
Воспользуемся распределительным свойством векторного произведения и перемножим вектор $\vec{i}-2\vec{j}$ на вектор $\vec{i}+\vec{k}$:
$$\left[\vec{i}-2\vec{j},\vec{i}+\vec{k}\right] = \left[\vec{i},\vec{i}\right]-\left[2\vec{j},\vec{i}\right]+\left[\vec{i},\vec{k}\right]-\left[2\vec{j},\vec{k}\right] = \\ = 2\left[\vec{i},\vec{j}\right]-\left[\vec{k},\vec{i}\right]-2\left[\vec{j},\vec{k}\right].$$

Так как $\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k}$, $\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}$, $\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}$, получаем:

$$\left[\vec{i}-2\vec{j},\vec{i}+\vec{k}\right]=2\vec{k}-\vec{j}-2\vec{i}.$$

Аналогичным образом найдем второе слагаемое:

$$\left[\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},2\vec{j}-\vec{k}\right]=\left[\vec{i},2\vec{j}\right]+\left[\vec{j},2\vec{j}\right]+\left[\vec{k},2\vec{j}\right]-\left[\vec{i},\vec{k}\right]-$$
$$-\left[\vec{j},\vec{k}\right]-\left[\vec{k},\vec{k}\right]=2\left[\vec{i},\vec{j}\right]-2\left[\vec{j},\vec{k}\right]+\left[\vec{k},\vec{i}\right]-\left[\vec{j},\vec{k}\right]=$$
$$=2\left[\vec{i},\vec{j}\right]-3\left[\vec{j},\vec{k}\right]+\left[\vec{k},\vec{i}\right]=2\vec{k}-3\vec{i}+\vec{j}.$$

Объединяя полученные слагаемые, имеем результат:

$$\left(2\vec{k}-\vec{j}-2\vec{i}\right)-\left(2\vec{k}-3\vec{i}+\vec{j}\right)=2\vec{k}-\vec{j}-2\vec{i}-2\vec{k}+3\vec{i}-\vec{j}=$$
$$=\vec{i}-2\vec{j}.$$

2.3. Даны векторы $\vec{a}=\{2, 1,-1\}$ и $\vec{в}=\{3, 0, 4\}$. Найти координаты векторных произведений $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, $\left[\vec{a}-2\vec{b},3\vec{a}+\vec{b}\right]$.

Решение.

Векторное произведение $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ может быть представлено в виде определителя третьего порядка, в нашем случае

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-1\\3&0&4\end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель по элементам первой строки $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, получаем:

$$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-1\\3&0&4\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1&-1\\0&4\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2&-1\\3&4\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2&1\\3&0\end{vmatrix}=4\vec{i}-11\vec{j}-3\vec{k}, \text{ т.е.}$$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\{4,-11,-3\}.$$

Пользуясь свойствами векторного произведения, имеем

$$\left[\vec{a}-2\vec{b},3\vec{a}+\vec{b}\right]=3\left[\vec{a},\vec{a}\right]-6\left[\vec{b},\vec{a}\right]+\left[\vec{a},\vec{b}\right]-2\left[\vec{b},\vec{b}\right]=$$
$$=6\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{b}\right]=7\left[\vec{a},\vec{b}\right],$$

Так как $\left[\vec{a},\vec{a}\right]=0$, $\left[\vec{b},\vec{b}\right]=0$, $\left[\vec{b},\vec{a}\right]=-\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Окончательно получаем такой результат:

$$\left[\vec{a}-2\vec{b},3\vec{a}+\vec{b}\right]=7\left(4\vec{i}-11\vec{j}-3\vec{k}\right),$$

или $\left[\vec{a}-2\vec{b},3\vec{a}+\vec{b}\right]=\{28,-77,-21\}$.

Координаты этого векторного произведения можно было найти другим способом, а именно: сначала найти координаты векторов $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+\vec{b}$, а затем найти векторное произведение полученных векторов с помощью определителя, т.е.

$$\vec{a}-2\vec{b}=\{-4,1,-9\},\ 3\vec{a}+\vec{b}=\{9,3,1\}.$$

$$\left[\vec{a}-2\vec{b},3\vec{a}+\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-4&1&-9\\9&3&1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1&-9\\3&1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-4&-9\\9&1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-4&1\\9&3\end{vmatrix}=$$

$$=28\vec{i}-77\vec{j}-21\vec{k}.$$

Как видим, результат один и тот же.

2.4. Сила $\vec{Q}$={3,4, -2} приложена к точке A (4, 2, -3). Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно B (2, 2, 0).

Решение. По определению момент силы относительно точки B равен

$$\overrightarrow{mom}\,\vec{Q}_B=\left[\overrightarrow{BA},\vec{Q}\right].$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{BA}=\{2,0,-3\}$.

Запишем векторное произведение $\overrightarrow{mom}\,\vec{Q}_B=\left[\overrightarrow{BA},\vec{Q}\right]$.в координатной форме:

$$\left[\overrightarrow{BA},\vec{Q}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&0&-3\\3&4&-2\end{vmatrix}=12\vec{i}-5\vec{j}+8\vec{k}.$$

Следует обратить внимание на порядок сомножителей, так как векторное произведение не перестановочно:

Теперь найдем модуль и направляющие косинусы для полученного вектора по известным ранее формулам:

$$\left|\overrightarrow{mom}\,\vec{Q}_B\right|=\left|\left[\overrightarrow{BA},\vec{Q}\right]\right|=\sqrt{12^2+(-5)^2+8^2}=\sqrt{233}.$$

$$\cos\alpha=\frac{12}{\sqrt{233}},\ \cos\beta=-\frac{5}{\sqrt{233}},\ \cos\gamma=\frac{8}{\sqrt{233}}.$$

2.5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=5\vec{j}-\vec{k}$.

Решение. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{в}$, исходящих из общей точки, равна модулю векторного произведения этих векторов. В нашем случае векторы имеют координаты $\vec{a}$ = {3, -2, 1}, $\vec{в}$ = {0, 5, -1}. тогда

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-2&1\\0&5&-1\end{vmatrix}=-3\vec{i}+3\vec{j}+15\vec{k}\ \text{ и}$$

$$S_{\square}=\left|\left[\vec{a},\vec{в}\right]\right|=\sqrt{(-3)^2+3^2+15^2}=3\sqrt{27}\ \text{ ед. площади.}$$

2.6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол 30^0.

Решение. Площадь параллелограмма, как и в предыдущей задаче, равна модулю векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$. На этот раз мы сначала найдем векторное произведение векторов $\vec{m}+2\vec{n}$ и $2\vec{m}+\vec{n}$, а затем его модуль таким образом, как это было сделано в задаче 1 :

$$\left[\vec{m}+2\vec{n},2\vec{m}+\vec{n}\right]=\left[\vec{m},2\vec{m}\right]+\left[2\vec{n},2\vec{m}\right]+\left[\vec{m},\vec{n}\right]+\left[2\vec{n},\vec{n}\right]=$$

$$=-4\left[\vec{m},\vec{n}\right]+\left[\vec{m},\vec{n}\right]=-3\left[\vec{m},\vec{n}\right],$$

$$\left|\left[\vec{m}+2\vec{n},2\vec{m}+\vec{n}\right]\right|=\left|-3\left[\vec{m},\vec{n}\right]\right|=3\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\sin\left(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}\right)=$$

$$=3\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 30^0=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

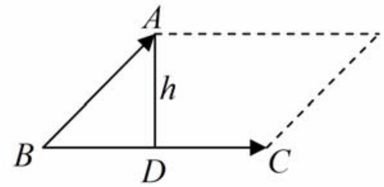
$S_{\square}=\dfrac{3}{2}$ ед. площади.

2.7. Даны вершины треугольника *A* (1, 2, 3), *B* (4, 0, 5), *C* (-3, 1, 2). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины *A* на сторону *BC*.

Решение.

Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах-сторонах треугольника, исходящих из общей вершины *B*. Например, так:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|.$$



Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA}=\{-3,2,-2\},\overrightarrow{BC}=\{-7,1,-3\}.$$

$$\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & -2\\ -7 & 1 & -3\end{vmatrix}=-4\vec{i}+5\vec{j}+11\vec{k}.$$

Значит,

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(-4\right)^2+5^2+11^2}=\frac{\sqrt{162}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

С другой стороны, из элементарной математики известно, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту. В нашем случае

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot h.$$

Отсюда

$$h=\frac{2S_{\Delta}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}.$$

Найдем

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{49+1+9}=\sqrt{59}.$$

Значит

$$h=\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{59}}.$$

2.8. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}=\{1,2,-1\}$ и $\vec{в}=\{3, 4, 0\}$, образуют с осью OX острый угол. Зная, что $|\vec{x}|=2\sqrt{29}$, найти его координаты.

Решение. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$, будет коллинеарен вектору, равному векторному произведению $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, который тоже перпендикулярен этим двум векторам, т.е.

$$\vec{x}=k\cdot\left[\vec{a},\vec{b}\right],$$

так как коллинеарные векторы линейно зависимы между собой. Чтобы найти координаты вектора $\vec{x}$, нужно сначала найти координаты векторного произведения $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, затем коэффициент линейной зависимости *k*, для которого справедливо соотношение

$$|k|=\frac{\vec{x}}{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|}.$$

и после этого умножить координаты $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ на найденный коэффициент.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix}=4\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}.$$

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\sqrt{16+9+4}=\sqrt{29}\ .$$

$$|k|=\frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{29}}=2\cdot$$

Вектор $\vec{x}$ образует с осью OX острый угол, следовательно, его координата x должна иметь положительный знак. Учитывая это, коэффициент *k* выберем равным 2. Тогда все координаты вектора $\vec{x}$ будут в 2 раза больше соответствующих координат вектора , т.е.
$\vec{x}=\{8,-6,-4\}$.

Смешанное произведение векторов

<u>Опр.</u> ***Смешанным произведением*** трех векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $[\vec{в},\vec{c}]$.

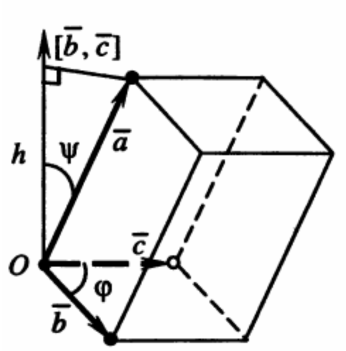
Обозначается оно так: $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=\vec{a}\ \ [\vec{в},\vec{c}]$.

Свойства смешанного произведения

1. **Геометрический смысл** смешанного произведения.

Смешанное произведение по абсолютной величине численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$.

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\vec{c}$ не компланарны. Перенесем векторы так, чтобы начала их находились в одной точке O. Построим на этих векторах как на ребрах параллелепипед.



Найдем вектор $[\vec{в},\vec{c}]$, модуль которого равен площади параллелограмма S, построенного на векторах $\vec{в}$,$\vec{c}$,. Далее

$(\vec{a},\vec{в},\vec{c})= |\vec{a}|\left|[\vec{в},\vec{c}]\right|\cos\psi$, где ψ = $\left(\vec{a}\wedge\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)$. $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})$ = S $|\vec{a}|\cos\psi$.

Так как $[\vec{в},\vec{c}]$ по определению векторного произведения $\perp\vec{в}$ и $\perp\vec{c}$, то этот вектор параллелен высоте параллелепипеда $\Rightarrow |\vec{a}|\cos\psi = \pm h$ и следовательно

$|(\vec{a},\vec{в},\vec{c})|$ = Sh= $V_{пар.}$

Итак, модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах.

<u>Замечание</u>: Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ равен шестой части объема параллелепипеда, т.е. $V_{пир.} = \frac{1}{6}\,|(\vec{a},\vec{в},\vec{c})|$.

2. Выражение смешанного произведения через координаты его сомножителей в декартовой системе координат.

Пусть даны векторы $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$.

Найдем $\vec{a}\ [\vec{в},\vec{c}]$ = $x_1x^* + y_1y^* + z_1z^*$.

$$[\vec{в},\vec{c}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \text{ i } - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \text{ j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \text{ k} = x^*\text{ i}+ y^*\text{ j}+ z^*\text{ k}.$$

$$(\vec{a},\vec{в},\vec{c}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

$$(\vec{a},\vec{в},\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

3. При **циклической перестановке** векторов величина смешанного произведения не изменяется. Если поменять местами 2 соседних вектора, смешанное произведение изменит знак.
$(\vec{a},\vec{в},\vec{c}) = (\vec{в},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{в})$.
$(\vec{a},\vec{в},\vec{c}) = -(\vec{в},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{в}) = -(\vec{c},\vec{в},\vec{a},)$.
Доказательство следует из свойств определителя.

4. Векторы $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ **компланарны** тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.
<u>Следствие</u>. Если в смешанном произведении участвуют два одинаковых вектора, то смешанное произведение равно нулю.

Отсюда следует, что если определитель матрицы, составленной из координат векторов равен нулю, то векторы компланарны

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Еще раз подчеркнем,
если $\vec{a} \perp \vec{в} \Rightarrow (\vec{a},\vec{в}) = 0$,
если $\vec{a}$ и $\vec{в}$ коллинеарны , то $[\vec{a},\vec{в}] = 0 \Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$, т.е. координаты векторов пропорциональны,
если $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ компланарны, то их смешанное произведение равно нулю $(\vec{a},\vec{в},\vec{c}) = 0$.

Приложения смешанного произведения

1. Вычисление **объемов параллелепипеда** и пирамиды

$$V_{\text{параллепипеда}} = |(\vec{a},\vec{в},\vec{c})|, \; V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6}|(\vec{a},\vec{в},\vec{c})|.$$

2. **Проверка линейной независимости** системы 3-х векторов (или проверка условия, что три вектора образуют базис в пространстве).

Если $(\vec{a},\vec{в},\vec{c}) \neq 0$, то совокупность векторов является линейно независимой, следовательно образует базис в пространстве. В этом случае векторы не компланарны. Если $(\vec{a},\vec{в},\vec{c}) = 0$, то векторы являются линейно зависимыми и компланарными.

Решение задач

2.1. Определить, какой является тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ (левой или правой):

1) $\vec{a}=\vec{j}, \quad \vec{b}=\vec{i}, \quad \vec{c}=\vec{k}$. 2) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}, \quad \vec{b}=\vec{j}, \quad \vec{c}=\vec{j}+\vec{k}$.

Решение. Если смешанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ положительно, то векторы образуют правую тройку; если отрицательно - левую. В нашем случае,

1) $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=(\vec{a},[\vec{в},\vec{c}])==\left(\vec{j},\left[\vec{i},\vec{k}\right]\right)=-\left(\vec{j},\left[\vec{k},\vec{i}\right]\right)=-\left(\vec{j},\vec{j}\right)=-\left|\vec{j}\right|^2=-1\Rightarrow$ тройка левая.

Здесь было использовано векторное произведение ортов декартова базиса.

2) $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=(\vec{a},[\vec{в},\vec{c}])=\left(\vec{i}+\vec{j},\left[\vec{j},\vec{j}+\vec{k}\right]\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\Rightarrow$ тройка правая.

2.2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{в}$ равен 30^0. Зная, что $|\vec{a}|=6$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $|\vec{c}|=3$, вычислить $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})$.

Решение. По определению смешанного произведения

$(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=([\vec{a},\vec{в}],\vec{c})$,

далее по определению скалярного произведения

$([\vec{a},\vec{в}],\vec{c})=\left|[\vec{a},\vec{в}]\right|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\left([\vec{a},\vec{в}],^\wedge\vec{c}\right)$.

Так как вектор $\vec{c}$ по условию перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$, то он будет коллинеарен вектору $[\vec{a},\vec{в}]$, который по определению векторного произведения в свою очередь тоже перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$. Отсюда следует, что угол между векторами $[\vec{a},\vec{в}]$ и $\vec{c}$ либо равен 0^0, если векторы одинаково направлены, либо равен 180^0, если векторы противоположно направлены. Значит,

$\cos\left([\vec{a},\vec{в}],^\wedge\vec{c}\right)=\pm1$.

Тогда

$(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=\pm\left|[\vec{a},\vec{в}]\right|\cdot|\vec{c}|=\pm|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\sin\left(\vec{a},^\wedge\vec{в}\right)\cdot|\vec{c}|=\pm|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\sin30^0\cdot|\vec{c}|==\pm6\cdot3\cdot3\cdot\frac{1}{2}=\pm27$.

2.3. Доказать тождество:

$\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}\right)=2\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

Решение.

$\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}\right)=\left(\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c}\right],\vec{c}+\vec{a}\right)=$

используем свойства векторного и скалярного произведений:

$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{b}\right]+[\vec{a},\vec{c}]+\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{c}+\vec{a}\right)=$

$=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)+\left([\vec{a},\vec{c}],\vec{c}\right)+\left(\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{c}\right)+$

$+\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{a}\right)+\left([\vec{a},\vec{c}],\vec{a}\right)+\left(\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{a}\right)=$

$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+(\vec{a},\vec{c},\vec{c})+\left(\vec{b},\vec{c},\vec{c}\right)+\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right)+(\vec{a},\vec{c},\vec{a})+\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=$

$=2\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$, так как

$(\vec{a},\vec{c},\vec{c})=0,\left(\vec{b},\vec{c},\vec{c}\right)=0,\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right)=0,(\vec{a},\vec{c},\vec{a})=0$, а

$(\vec{в},\vec{c},\vec{a})=(\vec{a},\vec{в},\vec{c})$

на основании свойств смешанного произведения.

2.4. Показать, что векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ компланарны и найти линейную зависимость между ними.

Решение. Условием компланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\vec{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения.

Составим определитель третьего порядка из координат данных векторов - это и будет их смешанным произведением:

$$\left(\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Вычисляем определитель любым способом и получаем

$\left(\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}\right)$=0, откуда следует, что векторы компланарны. Но компланарные векторы линейно зависимы между собой, т.е. найдутся такие три числа α, β, γ, не равные нулю одновременно, что будет иметь место равенство:

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$.

Перейдем к координатам векторов и получим систему уравнений относительно неизвестных α, β, γ:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0, \\ \alpha - 2\beta - 3\gamma = 0, \\ 4\alpha + 4\gamma = 0. \end{cases}$$

Решая однородную систему, имеющую бесчисленное множество ненулевых решений, выберем одно из множества решений

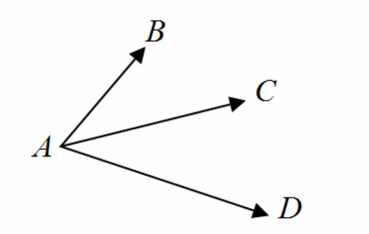
$\alpha = -1,\ \ \beta = -2,\ \ \gamma = 1$.

Значит линейная зависимость между $\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\vec{c}$ имеет вид

$-\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = 0$.

2.5. Показать, что точки *A* (3, 1, 0), *B* (6, 1, -1), *C* (-1, 5, 4) и *D* (1, 0, 0) лежат в одной плоскости. Разложить вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Решение. Одну из данных точек примем за общее начало, например, точку А. Из этой точки направим векторы в точки *B*, *C* и *D*. Рассмотрим получившиеся векторы, если эти векторы будут компланарны, т.е. будут лежать в одной плоскости, тогда и все четыре точки *A*, *B*, *C*, *D* тоже будут лежать в одной плоскости.



Найдем координаты векторов

$\overrightarrow{AB} = \{3, 0, -1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-4, 4, 4\}$, $\overrightarrow{AD} = \{-2, -1, 0\}$ и составим их смешанное произведение:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ равно нулю, значит, они компланарны. Тогда точки *A*, *B*, *C*, *D* лежат в одной плоскости.

Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$ тоже лежат в одной плоскости и, следовательно, линейно зависимы между собой. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$:
$\overrightarrow{BC} = \{-7, 4, 5\}$, $\overrightarrow{BD} = \{-5, -1, 1\}$.
Поскольку координаты векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$ не пропорциональны
$\frac{-7}{-5} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{5}{1}$,
то эти векторы не коллинеарны между собой и, значит, могут быть выбраны в качестве базисных векторов. Тогда разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ по базису $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$ будет иметь вид:
$\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$.

Перейдем от векторного уравнения к координатным, подставив вместо векторов их соответствующие координаты. Получим систему:

$$\begin{cases} 3 = -7\alpha - 5\beta, \\ 0 = 4\alpha - \beta, \\ -1 = 5\alpha + \beta, \end{cases}$$

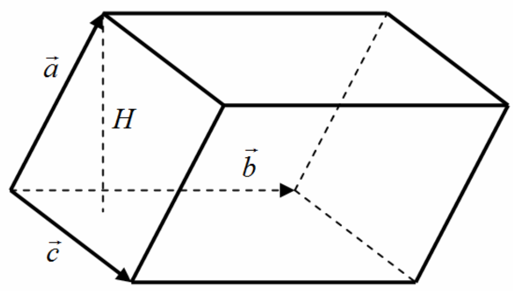
решив которую, получаем $\alpha = -\frac{1}{9}$, $\beta = -\frac{4}{9}$. Окончательно,

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{BC} + -\frac{4}{9}\overrightarrow{BD}.$$

2.6. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\vec{в}$ и $\vec{c}$.

Решение.

$$V_{пар.} = S_{осн.} \cdot H.$$



Объем параллелепипеда найдем, используя смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\vec{c}$. В основании параллелепипеда лежит параллелограмм, построенный на векторах $\vec{в}$ и $\vec{c}$. Следовательно, его площадь равна модулю векторного произведения векторов - сторон $\vec{в}$ и $\vec{c}$.
Найдем $\left[\vec{b}, \vec{c}\right]$:

$$\left[\vec{b}, \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}.$$

$$S_{осн.} = \left|\left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right| = \sqrt{11^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{134}.$$

Теперь найдем смешанное произведение векторов

$$\left(\vec{a},\vec{в},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}3 & 2 & -5\\ 1 & -1 & 4\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}=49.$$

Значит, $V_{пар.}=49$ и $H=\dfrac{V_{пар.}}{S_{осн.}}=\dfrac{49}{\sqrt{134}}$.

2.7. Даны вершины тетраэдра *A* (2, 1, -1), *B* (3, 2, 0), *C* (4, 1, -2), *D* (0, 5, 3). Найти длину его высоты, опущенной из вершины *A*.

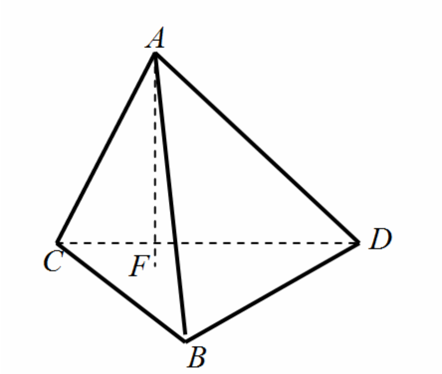
Решение. Сделаем схематический чертеж.

Длину высоты пирамиды можно найти, пользуясь формулой

$$V_{пир.}=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot H.$$

С другой стороны, объем пирамиды средствами векторной алгебры может быть найден таким образом:

$$V_{пир.}=\frac{1}{6}V_{пар.}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)\right|,$$



а площадь основания, которым является треугольник BCD, найдем с помощью векторного произведения

$$S_{осн.}=S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right\|.$$

Получаем

$$\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)\right|=\frac{1}{6}\left\|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right\|\cdot H,$$

Откуда

$$H=\frac{\left|\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right\|}.$$

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{BC}=\{1,-1,-2\},\ \overrightarrow{BA}=\{-1,-1,-1\},\ \overrightarrow{BD}=\{-3,3,3\}.$$

$$\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ -3 & 3 & 3\end{vmatrix}=3\vec{i}+3\vec{j}.$$

$$\left\|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right\|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

$$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6 .$$

Окончательно,

$$H = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$