МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Л.И. Лесняк, В.А. Старенченко

Производная и ее приложения

*Рекомендовано
Учебно-методическим объединением РФ по образованию
в области строительства в качестве учебного пособия
для студентов, обучающихся по направлению 653500
«Строительство»*

ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Томск – 2005

УДК 517 (075)
Л50

Лесняк Л.И., Старенченко В.А. Производная и ее приложе-
Л50 ния: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2005. – 312 с.

ISBN 5-89503-249-4

Пособие содержит основные теоретические сведения по разделу «Производная и ее приложения», изложенные в форме вопросов и ответов, методические рекомендации по решению типовых задач и задач на качественное усвоение теории, банк задач для самостоятельной работы по каждой теме раздела.

Пособие предназначено для студентов первого курса строительных специальностей очной и заочной форм обучения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ТГАСУ.

УДК 517 (075)

Рецензенты: профессор Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники Л. И. Магазинников; доктор физико-математических наук, профессор С. В. Панько

ISBN 5-89503-249-4

Предисловие

1. О содержании и структуре пособия “Производная и ее приложения”

Предлагаемое учебное пособие посвящено начальным разделам математического анализа – теории предела и дифференциальному исчислению функции одной переменной. Пособие подготовлено для студентов строительных специальностей, но может быть использовано студентами большинства специальностей высших технических учебных заведений.

Учитывая, что, как правило, студенты первого курса испытывают серьезные затруднения с освоением курса высшей математики, авторы стремились сделать изложение материала ясным и доступным. Пособие составлено так, чтобы помочь студенту, приступающему к изучению высшей математики, организовать свою самостоятельную работу, разобраться в обилии определений и теорем начал математического анализа, выделить и усвоить главное, приобрести достаточно прочные навыки решения задач различного уровня сложности.

Пособие содержит три главы: гл. 1 “Введение в математический анализ”, гл. 2 “Производная и дифференциал” и гл. 3 “Приложения дифференциального исчисления”. Учебный материал каждой главы разбит на темы. Изложение каждой темы содержит:

1) Основные теоретические сведения, которые представлены в виде вопросов и ответов с необходимыми комментариями. Многие из вопросов носят проблемный характер. Предполагается, что

свой вариант ответа студент может сравнить с предложенным и сделать соответствующий вывод. Всюду, где это возможно, теоретический материал иллюстрируется графически, что значительно облегчает усвоение теории.

2) Методические рекомендации по решению типовых задач. Помимо типовых задач вычислительного характера рассмотрены многочисленные задачи, способствующие качественному усвоению теории, и нестандартные задачи, которые могут заинтересовать студента.

3) Банк задач для самостоятельной работы. Сложность предлагаемых по каждой теме задач повышается постепенно. Задачи предлагаются в количестве, достаточном для приобретения навыка решения каждого типового задания.

Авторы настоятельно рекомендуют рассмотреть и тщательно проанализировать все решенные в пособии примеры и задачи. Что же касается заданий для самостоятельной работы, то их можно не рассматривать, если ход решения очевиден или учащийся уже имеет навык решения подобных задач.

Студенту, желающему расширить и углубить свои знания по математическому анализу, рекомендуется обратиться к учебнику Г.М. Фихтенгольца "Курс дифференциального и интегрального исчисления", указанному в списке литературы, приведенном в конце данного пособия.

2. Некоторые логические символы и примеры их употребления

При записи математических утверждений широко используется специальная символика (логические символы или кванторы). Использование логических символов не только облегчает запись, но и в значительной степени способствует усвоению материала.

Приведем наиболее используемые символы и примеры их употребления:

1) $\forall$ – квантор общности. Запись $\forall x$ означает "для любого x", "для каждого x".

2) $\exists$ – квантор существования. Запись $\exists x$ означает "существует x".

3) Пусть A и B – некоторые высказывания. Составное выражение "если A, то B" или "из A следует B" принято обозначать: $A \Rightarrow B$. Эта запись означает, что A является достаточным условием для B, а B необходимым для A. Если же $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, тогда A является необходимым и достаточным условием для B и наоборот. В этом случае принято обозначение $A \Leftrightarrow B$, которое можно прочесть еще и так: "A имеет место тогда и только тогда, когда имеет место B".

4) Запись $\stackrel{\text{def}}{=}$ читается "равенство, справедливое по определению".

Приведем примеры использования введенной символики:

1. $(\vec{a} \perp \vec{b}) \Rightarrow \big((\vec{a}, \vec{b}) = 0\big)$

Запись одного из свойств скалярного произведения векторов: если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно 0.

2. $\big([\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}\big) \Leftrightarrow (\vec{a} \parallel \vec{b})$

Запись теоремы: векторное произведение равно нулевому вектору тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

3. $\forall a > 0,\ \forall b > 0\ \ \exists n \in N$: $na > b$

Запись одного из свойств вещественных чисел: для любых положительных чисел a и b существует натуральное число n такое, что $na > b$.

4. $(f(x)$ ограничена на $X) \stackrel{\text{def}}{=} (\ \exists M \in R : |f(x)| \leqslant M\ \ \forall x \in X)$

Запись определения ограниченной функции: по определению функция $y = f(x)$ ограничена на множестве X, если существует действительное число M такое, что $|f(x)| \leqslant M$ для любого x из множества X.

3. Числовые множества

Понятие множества является первичным и определению не подлежит. Согласно Г. Кантору: "Множество есть многое, мыслимое как единое". Множество считается заданным, если относительно любого объекта можно установить, является ли он элементом этого множества или нет. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\emptyset$. Условимся множества и соответствующие им элементы обозначать как

$$A,\ B,\ C,\ X,\ Y,\ Z,\ R,\ N,\ Q,...$$
$$a,\ \ b,\ \ c,\ \ x,\ \ y,\ \ z,\ \ r,\ \ n,\ \ q,...$$

Запись $x \in X$ означает, что x является элементом множества X, запись $x \overline{\in} X$ или $x \notin X$ означает, что x не принадлежит множеству X.

Если X – некоторое множество, а P – какое-то свойство, то запись $\{x \in X/P\}$ обозначает совокупность элементов множества X, обладающих свойством P. Например, $\{x \in R/a \leqslant x \leqslant b\} = [a, b]$. Если множества X и Y таковы, что каждый элемент множества X является одновременно и элементом множества Y, то множество X называют подмножеством Y и пишут $X \subset Y$. Считается, что $X = Y$, если $X \subset Y$ и $Y \subset X$.

Над множествами определены следующие операции:

1. Объединение множеств X и Y (обозначают $X \cup Y$):

$$(Z = X \cup Y) \overset{\text{def}}{=} (z/z \in X \text{ или } z \in Y).$$

Геометрическая иллюстрация объединения приведена на рис. 1.

2. Пересечение множеств X и Y (обозначают $X \cap Y$):

$$(Z = X \cap Y) \overset{\text{def}}{=} (z/z \in X \text{ и } z \in Y).$$

Геометрическая иллюстрация пересечения приведена на рис. 2.

3. Разность множеств X и Y (обозначают $X \setminus Y$):

$$(Z = X \setminus Y) \overset{\text{def}}{=} (z/z \in X \text{ и } z \overline{\in} Y).$$

Геометрическая иллюстрация разности приведена на рис. 3.

$Z = X \cup Y$ $\quad$ $Z = X \cap Y$ $\quad$ $Z = X \setminus Y$

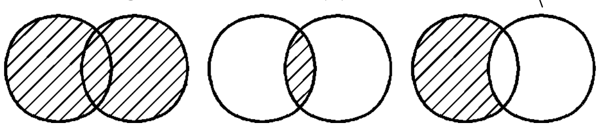


Рис. 1 $\quad$ Рис. 2 $\quad$ Рис. 3

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми множествами. Общеприняты следующие обозначения:

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R – множество действительных (вещественных) чисел.

Напомним, что множество R вещественных чисел – это совокупность рациональных и иррациональных чисел. Множества N, Z, Q являются подмножествами множества R ($N \subset R$, $Z \subset R$, $Q \subset R$), при этом $N \subset Z$, $Z \subset Q$. Всякому действительному числу соответствует бесконечная десятичная дробь, при этом рациональные числа представляются в виде конечной дроби $\left(\frac{1}{2} = 0.5\right)$ или бесконечной периодической дроби $\left(\frac{2}{3} = 0.(6)\right)$, а иррациональные – в виде бесконечной непериодической дроби ($\sqrt{2} = 1.4142...$, $\pi = 3.14159...$).

Напомним основные свойства вещественных чисел:

1. Для каждой пары чисел имеет место одно и только одно из соотношений $a = b$, $a > b$, $b > a$.

2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

3. Если $a > b$, то найдется вещественное (и в частности – рациональное) число c, заключенное между числами a и b (свойство плотности множества вещественных чисел).

4. $a + b = b + a$, $\forall a, b \in R$.
5. $\exists 0 \in R$ такой, что $a + 0 = a$, $\forall a \in R$.
6. $\forall a$ существует число $-a$ такое, что $a + (-a) = 0$. Отсюда $a - b \overset{\text{def}}{=} a + (-b)$.
7. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
8. Из $a > b$ следует, что $a + c > b + c$, $\forall c \in R$.
9. $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in R$.
10. $\exists 1 \in R$ такая, что $a \cdot 1 = a$, $\forall a \neq 0$.
11. $\forall a \neq 0$ существует число $\frac{1}{a}$ такое, что $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Отсюда $\frac{b}{a} \overset{\text{def}}{=} b \cdot \frac{1}{a}$.
12. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
13. Из $a > b$ и $c > 0$ следует, что $a \cdot c > b \cdot c$.
14. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
15. $\forall a > 0$, $\forall b > 0$ $\exists n \in N$ такое, что $a \cdot n > b$ – аксиома Архимеда.

Определение 1. Множество X называется ограниченным сверху, если существует число M такое, что $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant M$. Число M называется верхней границей множества X. Множество X называется ограниченным снизу, если существует число m такое, что $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \geqslant m$. Число m называется нижней границей множества X.

Например, множество $X = (1, 3]$ ограничено и сверху, и снизу. Число 3 и все числа, большие трех, являются верхними границами этого множества. Нижней границей множества X является 1, а также все числа, меньшие единицы.

Определение 2. Наименьшая из всех верхних границ множества X называется точной верхней границей этого множества и обозначается $\sup X$ (супремум X). Наибольшая из всех нижних границ множества X называется точной нижней границей этого множества и обозначается $\inf X$ (инфимум X).

Для $X = (1, 3]$ $\sup X = 3$, $\inf X = 1$. Точные границы множества могут ему принадлежать, а могут и не принадлежать. В нашем примере $\sup X = 3 \in (1, 3]$, $\inf X = 1 \overline{\in} (1, 3]$.

Теорема. *Всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю границу. Всякое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю границу.*

Множество может быть ограничено или только сверху, или только снизу, или и сверху, и снизу.

Определение 3. Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется ограниченным.

Из предыдущей теоремы вытекает, что ограниченное множество имеет и точную нижнюю, и точную верхнюю границы, которые являются концами наименьшего промежутка, содержащего все множество.

Пример 1. Множество $X = \left\{ \frac{p}{q} \right\}$ всех правильных положительных дробей ограничено, причем $\sup X = 1 \overline{\in} X$, $\inf X = 0 \overline{\in} X$.

Пример 2. Множество $N = \{1, 2, 3, ..., ...\}$ всех натуральных чисел ограничено снизу ($\inf N = 1 \in X$), но не ограничено сверху.

Глава 1

Введение в математический анализ

Тема 1. **Понятие функции**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. В связи с чем возникло понятие функции?

Изучение любого процесса происходит путем изучения характера изменения переменных величин, участвующих в этом процессе. При этом, как правило, характер изменения одних величин зависит от характера изменения других. Понятие функции возникло в связи с необходимостью каким-то образом описать эту зависимость.

1.2. Каким должен быть характер изменения двух переменных величин, чтобы одна из них являлась функцией другой?

Функция считается заданной, если задан закон, по которому каждому значению переменной x из некоторого множества X ставится в соответствие единственное значение переменной y из множества Y, в котором эта переменная принимает свои значения.

Для функциональной зависимости приняты обозначения: $y = f(x)$, $y = \phi(x)$, $y = F(x)$ и т.п. Множество X называется областью определения функции, переменная x – независимой переменной или аргументом, множество $\{f(x)\}$ называют областью значений функции $y = f(x)$ (очевидно, $\{f(x)\} \subset Y$).

Часто в качестве синонима слова "функция" используется термин "отображение", при этом говорят, что задано отображение множества X во множество Y и используют обозначение : $X \xrightarrow{f} Y$. Если $X \subset R$ и $Y \subset R$, то функция $y = f(x)$ называется вещественнозначной функцией вещественной переменной.

Роль аргумента может играть время, длина дуги, угол и другие переменные величины.

Пример. Материальная точка падает в пустоте под действием силы тяжести с высоты h. Обозначим через y высоту точки в момент времени t, протекшего от начала движения. Очевидно, что значение переменной y будет зависеть от значений t и, следовательно, y является функцией аргумента t. Из курса физики известно, что зависимость y от t выражается формулой

$$y = h - \frac{qt^2}{2}.$$

В момент падения $y = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{q}}$. Это означает, что аргумент t принимает свои значения на промежутке $\left[0, \sqrt{\frac{2h}{q}}\right]$, который и является областью определения функции. При этом $y \in [0, h]$, то есть промежуток $[0, h]$ – множество значений функции $y = h - \frac{qt^2}{2}$.

1.3. Как можно задать функцию?

В рассмотренном примере зависимость y от t задана с помощью формулы. Такой способ задания функции называется аналитическим. Одним из простейших примеров функции, заданной аналитически, является функция $y = ax^2$, где a – некоторая константа. Такой характер зависимости, когда одна переменная принимает свои значения в зависимости от квадрата значения другой переменной, встречается довольно часто. Приведем несколько примеров.

1) $S = \pi r^2$ – зависимость площади круга от его радиуса;

2) $S = \dfrac{at^2}{2}$ – зависимость пути от времени при равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью;

3) $W_k = \dfrac{mV^2}{2}$ – зависимость кинетической энергии движущейся материальной точки массы m от скорости движения.

В курсе математики, как правило, отвлекаясь от физической (или иной) сущности взаимноизменяющихся величин, изучают лишь сам характер зависимости. Во всех приведенных примерах для математика это одна и та же функция $y = ax^2$.

Если область определения функции, заданной аналитически, не указана, то под областью определения подразумевается множество X значений x, при которых аналитическое выражение, с помощью которого задается функция $y = f(x)$, имеет смысл. Например, функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ определена при условии, что $1 - x^2 \geqslant 0$, то есть для $x \in [-1, 1]$.

В приложениях математики широко используется табличный способ задания функции. При этом способе указываются значения функции в нескольких точках из области ее определения. К функциям, задаваемым таблично, обычно прибегают в результате обработки экспериментальных данных.

В технических приложениях математики часто используется графическое задание функции. В этом случае специальные приборы воспроизводят на экране графическое изображение функции, с помощью которого делается заключение о характере функциональной зависимости.

1.4. Какие функции принято называть простейшими элементарными функциями?

Существует 7 классов простейших элементарных функций:

1. Целая рациональная функция (многочлен)

$$y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $n \in N$, a_i – коэффициенты многочлена (действительные числа), $X = (-\infty, +\infty)$. Множество значений многочлена зависит от его коэффициентов. Простейшими рациональными функциями являются:

$y = kx + b$ – линейная функция;

$y = ax^2 + bx + c$ – квадратный трехчлен.

2. Дробно-рациональная функция (отношение двух многочленов)

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

Функция определена при всех действительных x, за исключением точек, в которых $Q_m(x) = 0$.

Простейшей функцией этого класса является $y = \dfrac{k}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3. Степенная функция

$y = x^\lambda$, где $\lambda \in R$. Область определения и множество значений зависят от показателя степени λ. Примеры степенных функций:

$y = x^2$,	$X = (-\infty, +\infty)$,	$Y = [0, +\infty)$,
$y = x^3$,	$X = (-\infty, +\infty)$,	$Y = (-\infty, +\infty)$,
$y = \sqrt{x}$,	$X = [0, +\infty)$,	$Y = [0, +\infty)$,
$y = \sqrt[3]{x}$,	$X = (-\infty, +\infty)$,	$Y = (-\infty, +\infty)$,
$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,	$X = (0, +\infty)$,	$Y = (0, +\infty)$.

4. Показательная функция

$y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$.

5. Логарифмическая функция

$y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $X = (0, +\infty)$, $Y = (-\infty, +\infty)$.

6. Тригонометрические функции

$y = \sin x$,	$X = (-\infty, +\infty)$,	$Y = [-1, 1]$,
$y = \cos x$,	$X = (-\infty, +\infty)$,	$Y = [-1, 1]$,
$y = \operatorname{tg} x$,	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$,	$Y = (-\infty, +\infty)$,
$y = \operatorname{ctg} x$,	$x \neq \pi k$,	$Y = (-\infty, +\infty)$.

7. Обратные тригонометрические функции

$y = \arcsin x$,	$X = [-1, 1]$,	$Y = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
$y = \arccos x$,	$X = [-1, 1]$,	$Y = [0, \pi]$,
$y = \operatorname{arctg} x$,	$X = (-\infty, +\infty)$,	$Y = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
$y = \operatorname{arctg} x$,	$X = (-\infty, +\infty)$,	$Y = (0, \pi)$.

Функции 1 – 3 классов принято называть алгебраическими. Функции 4 – 7 классов — трансцендентными.

1.5. Какая функция называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$? Какова особенность графиков взаимно обратных функций? Какие простейшие элементарные функции являются взаимно обратными функциями?

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения X и областью изменения $Y = \{f(x)\}$. Согласно определению функции, каждому значению x_0 из области определения X соответствует единственное значение y_0 зависимой переменной y из множества Y. Произведем сопоставление значений переменных в обратном порядке. Выберем какое-либо значение y_0 из Y. Очевидно, что в области X найдется такое значение x_0, при котором $f(x_0) = y_0$. Если при этом для каждого y из Y существует единственное значение x, такое, что $f(x) = y$, то это соответствие будет определять некоторую функцию $x = g(y)$, которая называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$.

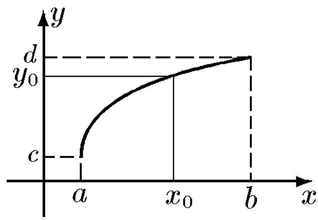


Рис. 1

Достаточным условием существования обратной функции является строгая монотонность функции $y = f(x)$ (рис. 1).

Любому y_0 из $[c, d]$ соответствует единственное значение x_0 из $[a, b]$, при котором

$$f(x_0) = y_0.$$

Если независимое переменное y обратной функции $x = g(y)$ откладывать по оси Oy, то график обратной функции $x = g(y)$ будет совпадать с графиком функции $y = f(x)$. Если же независимое переменное откладывать, как принято, по оси Ox, т.е. записать обратную функцию в виде $y = g(x)$, то график обратной функции будет симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ принято называть взаимно обратными. Парами взаимно обратных функций являются, например, $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 2), $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$ (рис. 3).

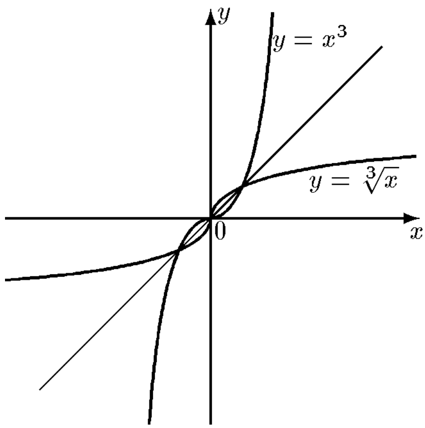


Рис. 2

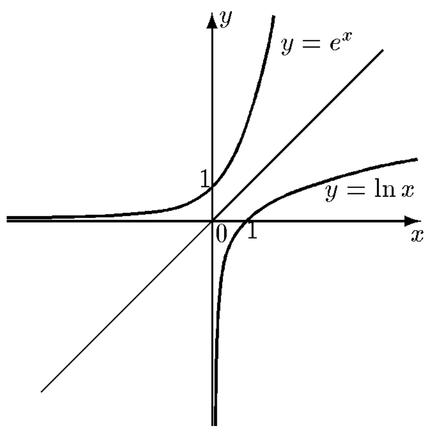


Рис. 3

Заметим, что при преобразовании обратной функции может оказаться, что значению y_0 из Y будет соответствовать несколько значений x_0 из X, таких, что $f(x_0) = y_0$. Например, для функции $y = x^2$, определенной на множестве $X = (-\infty; +\infty)$ и принимающей значения на множестве $Y = [0; +\infty)$, каждому значению y из Y будет соответствовать два значения $x = \pm\sqrt{y}$. В этом случае функция $x = \sqrt{y}$ является обратной для $y = x^2$ на промежутке $[0; +\infty)$, где она строго монотонно возрастает, а функция $x = -\sqrt{y}$ будет обратной на промежутке $(-\infty; 0]$, на котором функция $y = x^2$ строго монотонно убывает.

На рис. 4 и 5 изображены пары взаимно обратных функций $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, $y = -\sqrt{x}$.

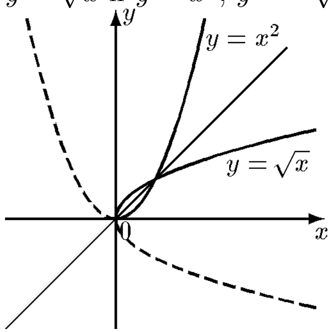


Рис. 4

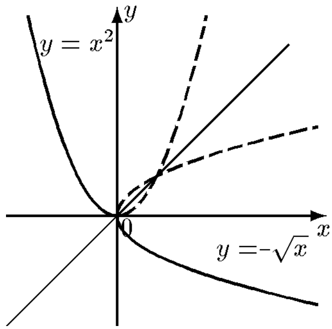


Рис. 5

1.6. Какая функция называется сложной? Пояснить, как с помощью понятия сложной функции расширяется класс элементарных функций

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{\lg x}$. Эта функция сконструирована из двух простейших элементарных функций – логарифмической $z = \lg x$ и степенной $y = \sqrt{z}$, при этом аргумент z степенной функции $y = \sqrt{z}$ принимает свои значения в области изменения логарифмической функции $z = \lg x$. Таким образом, функцию $y = \sqrt{\lg x}$ можно назвать функцией от функции. Такие функции принято называть сложными функциями.

Как найти область определения сложной функции? Вернемся к нашему примеру. Известно, что степенная функция $y = \sqrt{z}$ определена для $z \geqslant 0$. Следовательно, сложная функция $y=\sqrt{\lg x}$ определена лишь для тех значений x, при которых $\lg x \geqslant 0$, то есть для $x \in [1, +\infty)$.

В общем случае, если функция $z = g(x)$ определена на множестве X, а функция $y = f(z)$ – на множестве Z, то сложная функция $y = f(g(x))$ будет определена на множестве X лишь тогда, когда множество значений функции $g(x)$ будет входить в область определения функции $f(z)$.

Сложную функцию $y = f(g(x))$ называют также наложением или суперпозицией функций $z = g(x)$ и $y = f(z)$.

Большинство функций, с которыми приходится иметь дело, являются сложными функциями. Например, функция $y = \sin x$ является простейшей элементарной функцией, а функция $y = \sin 2x$ – уже сложная функция. Она является комбинацией линейной функции $z = 2x$ и тригонометрической функции $y = \sin z$. Сложная функция может быть суперпозицией трех и большего числа функций. Например, функция $y = 7^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$ является наложением трех простейших элементарных функций $u = \sqrt{x}$, $v = \operatorname{arctg} u$ и $y = 7^v$. Так как функции $y = 7^v$ и $v = \operatorname{arctg} u$ определены при любых значениях своих аргументов, то сложная функция $y = 7^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$ определена для всех x, при которых определена функция $u = \sqrt{x}$, то есть для $x \in [0, +\infty)$.

Понятие сложной функции позволяет значительно расширить множество элементарных функций. К элементарным функциям принято относить простейшие элементарные функции 1 – 7, а также все функции, которые получаются из простейших с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций, последовательно примененных конечное число раз. Многочисленные примеры таких функций будут рассмотрены при решении задач.

2. Решение задач

2.1. Тело движется прямолинейно под действием силы F. Найти функцию, выражающую зависимость между силой F и ускорением a, если известно, что когда тело движется с ускорением 12 м/с^2, то на пути $S = 15$ м производится работа $A = 32$ Дж.

Решение. По закону Ньютона $F = m \cdot a$. Задача сводится к нахождению m. Коэффициент m будет найден, если при заданном ускорении 12 м/с^2 удастся найти величину силы F. С этой целью воспользуемся формулой для работы силы F на пути S: $A = F \cdot S$. При $A = 32$ Дж, $S = 15$ м найдем $F = \frac{32}{15}$ Н. Тогда $m = \frac{F}{a} = \frac{32}{15} : 12 = \frac{8}{45}$ кг. Искомая функция будет иметь вид $F = \frac{8}{45} \cdot a$ – линейная функция, аргументом которой является ускорение a.

2.2. Напряжение в некоторой цепи падает равномерно по линейному закону. В начале опыта оно было равно 12 В, а через 8 с упало до 6.4 В. Найти функцию, выражающую зависимость напряжения U от времени t.

Решение. По условию задачи $U = kt + b$. Таким образом, задача сводится к нахождению коэффициентов k и b линейной функции. По условию задачи при $t = 0$ $U = 12$ В $\Rightarrow b = 12$. При $t = 8$ с $U = 6.4$ В $\Rightarrow 6.4 = k \cdot 8 + 12 \Rightarrow k = -0.7$. Искомая зависимость имеет вид $U = 12 - 0.7t$ – линейная функция, аргументом которой является время t.

2.3. Точка движется равномерно по окружности радиуса R с центром в начале координат против часовой стрелки с линейной скоростью V см/с. В начальный момент времени абсцисса точки была равна a. Составить уравнение гармонического колебания абсциссы точки.

Решение. Пусть M_0 – начальное положение точки, $M(x, y)$ – положение точки в момент времени t.

По условию задачи $\beta = \dfrac{V \cdot t}{R}$, $\frac{a}{R} = \cos\alpha$ (рис. 6). Очевидно, $x = R\cos(\alpha + \beta)$, где $\alpha = \arccos\frac{a}{R}$, $\beta = \dfrac{V \cdot t}{R}$. Таким образом,

$$x = R\cos\left(\arccos\frac{a}{R} + \frac{V \cdot t}{R}\right).$$

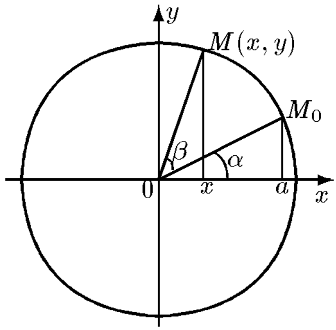


Рис. 6

Полученная функциональная зависимость абсциссы x точки M от времени t и является уравнением гармонического колебания абсциссы движущейся по окружности точки.

2.4. Над центром круглого стола радиуса R помещена электрическая лампочка. Получить функциональную зависимость освещенности края стола от высоты лампочки над столом.

Решение. Известно, что освещенность I вычисляется по формуле

$$I = k\frac{\sin\phi}{r^2},$$

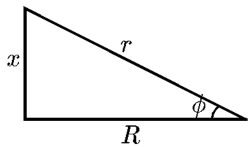


Рис. 7

где $k = \text{const}$; r – расстояние от источника света до точки освещения; ϕ – угол, изображенный на рис. 7. Обозначим высоту лампочки над столом через x. Требуется найти функцию $I = f(x)$, поэтому необходимо r и $\sin\phi$ выразить через x. По теореме Пифагора

$$r^2 = x^2 + R^2,\ \sin\phi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \Rightarrow I = k\frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

2.5. В шар радиуса R вписан цилиндр. Найти функциональную зависимость объема V цилиндра от радиуса x его основания.

Решение. Объем цилиндра вычисляется по формуле

$$V = \pi x^2 \cdot H,$$

где x – радиус основания цилиндра; H – высота цилиндра. По условию задачи $V = f(x)$, следовательно, необходимо выразить H через x. По теореме Пифагора (рис. 8):

$$\frac{H}{2} = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow V = 2\pi x^2\sqrt{R^2 - x^2},\ 0 \leqslant x \leqslant R.$$

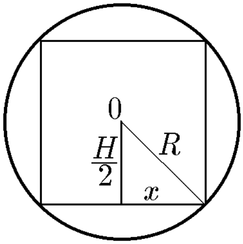


Рис. 8

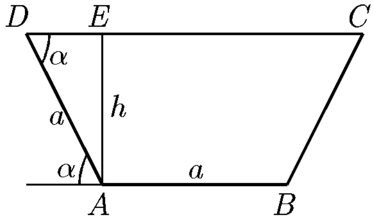


Рис. 9

2.6. Из трех досок одинаковой ширины a сколачивается желоб (рис. 9). Найти функциональную зависимость площади S поперечного сечения желоба от угла α наклона стенок.

Решение. Из условия задачи следует $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, так как предполагается, что $S > 0$. Требуется выразить переменную S через α.

Сечение желоба – равнобочная трапеция $ABCD$, площадь которой вычисляется по формуле

$$S = \frac{AB + CD}{2}h, \text{ где } CD = AB + 2DE.$$

Из $\triangle ADE$: $DE = a\cos\alpha$,

$h = a\sin\alpha \Rightarrow S = \dfrac{2a + 2a\cos\alpha}{2} \cdot a\sin\alpha$ или

$S = a^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha$, где $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2.7. Задана функция

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \ x \neq -1.$$

Требуется найти $f(0)$, $f(1)$, $f(2x)$, $2f(x)$, $f(x^2)$, $f^2(x)$.

Решение. $f(0) = \dfrac{0}{0+1} = 0$; $f(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$;

$$f(2x) = \frac{2x}{2x+1}; \quad 2f(x) = 2\frac{x}{x+1};$$

$$f(x^2) = \frac{x^2}{x^2+1}; \quad f^2(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2.$$

2.8. Задана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leqslant x < 0, \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}, & 0 \leqslant x < \pi, \\ \sin 2x, \pi \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Найти $f(-1)$, $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$, $f(7)$.

Решение. $x = -1 \in [-2, 0) \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 = 1;$

$$x = 0 \in [0, \pi) \Rightarrow f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1;$$

$$x = \pi \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow f(\pi) = \sin 2\pi = 0$$

$x = 7$ не входит в область определения.

2.9. На рис. 10 задан график функции $f(x)$. Требуется задать функцию $f(x)$ аналитически.

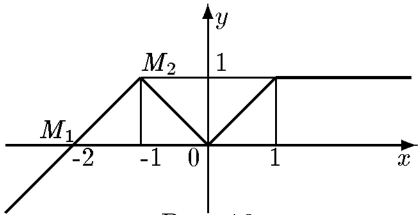


Рис. 10

Решение. Чтобы задать функцию для $x \in (-\infty, -1)$, воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

В нашем случае $M_1(-2, 0)$, $M_2(-1, 1) \Rightarrow y = x + 2$. Для $x \in [-1, 1]$ имеем $f(x) = |x|$, для $x \in (1, +\infty)$ будем иметь $f(x) = 1$.

Таким образом, $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{если } x < 0, \\ |x|, \quad \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, \quad \text{если } x > 1. \end{cases}$

2.10. Задана функция $y = \dfrac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$. Найти приращение Δy функции при изменении ее аргумента от $x = 3$ до $x = 4$.

Решение.

$$\Delta y = f(4) - f(3) = \frac{4}{\sqrt{25 - 16}} - \frac{3}{\sqrt{25 - 9}} = \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}.$$

2.11. Задана функция $y = x^3 + 2x - 5$. Найти приращение Δy функции при изменении ее аргумента от $x = 1$ до $x = 1 + \Delta x$, где Δx – произвольное приращение аргумента.

Решение. $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) =$

$$= [(1 + \Delta x)^3 + 2(1 + \Delta x) - 5] - [1^3 + 2 \cdot 1 - 5] =$$
$$= 1 + 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2 + 2\Delta x - 5 - 1 - 2 + 5 =$$
$$= \Delta x^3 + 3\Delta x^2 + 3\Delta x.$$

2.12. Задана функция $y = \sin^2 \frac{x}{2}$. Показать, что при любом x $\Delta y = \sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$. Убедиться в справедливости равенства, взяв $x = \pi$, $\Delta x = \frac{\pi}{3}$.

Решение. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin^2 \frac{x + \Delta x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} =$

$$= \left(\sin\frac{x+\Delta x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{x+\Delta x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\Delta x}{4}\right)\cos\frac{\Delta x}{4} \cdot 2\sin\frac{\Delta x}{4}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\Delta x}{4}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{4}\cos\frac{\Delta x}{4} \cdot 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\Delta x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\Delta x}{4}\right) =$$

$$= \sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Пусть $x = \pi$, $\Delta x = \frac{\pi}{3}$. Тогда

$$\Delta y = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{2\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

Найдем Δy, используя полученную формулу:

$$\Delta y = \sin\frac{\pi}{6}\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{7\pi}{6} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Результаты вычислений Δy совпали.

2.13. Найти $f(x)$, если $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$.

Решение. Выразим $x^2 - 3x + 2$ через $(x+1)$:

$$f(x+1) = x^2 - 3x + 2 = (x+1-1)^2 - 3(x+1-1) + 2 =$$
$$= (x+1)^2 - 2(x+1) + 1 - 3(x+1) + 3 + 2 =$$
$$= (x+1)^2 - 5(x+1) + 6 \Rightarrow f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

2.14. Для функций

$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (гиперболический синус) и

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (гиперболический косинус)

убедиться в справедливости формул:

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

Решение.

1) $2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} =$
$$= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x;$$

2) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch} 2x.$$

Заметим, что формула для $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ аналогична формуле для $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, формула для $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ отличается от формулы для $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ лишь знаком между слагаемыми. Позднее будет отмечен еще ряд свойств гиперболических функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, аналогичных свойствам $\sin x$ и $\cos x$. Это и объясняет природу названий функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

2.15. Заданы функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = 2^x$. Найти $f(f(x))$, $g(f(x))$, $f(g(x))$ и $g(g(x))$.

Решение.

$f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4; g(f(x)) = g(x^2) = 2^{x^2};$

$f(g(x)) = f(2^x) = (2^x)^2 = 4^x;\ g(g(x)) = g(2^x) = 2^{2^x}.$

2.16. Заданы функции $f(x) = x^3 - x$ и $g(x) = \sin 2x$. Требуется

а) убедиться, что $f\left(g\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$;

б) найти $g(f(f(1)))$.

Решение.

а) $f\left(g\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = f\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{8};$

б) $g(f(f(1))) = g(f(1-1)) = g(f(0)) = g(0-0) = \sin 0 = 0.$

2.17. Заданы сложные функции
$$y = \sqrt[3]{\sin 5x}, \quad y = 2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}, \quad y = \sin^3(\lg(x^2+1)).$$

Требуется представить каждую функцию в виде цепочки простейших элементарных функций.

Решение.

1) $y = \sqrt[3]{u}$, $u = \sin v$, $v = 5x$.

Функция $y = \sqrt[3]{\sin 5x}$ является суперпозицией линейной, тригонометрической и степенной функций.

2) $y = 2^u$, $u = \operatorname{arctg} v$, $v = \sqrt{x}$.

Функция $y = 2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$ является суперпозицией степенной, обратной тригонометрической и показательной функций.

3) $y = u^3$, $u = \sin v$, $v = \lg z$, $z = x^2 + 1$.

Функция $y = \sin^3(\lg(x^2+1))$ является суперпозицией рациональной, логарифмической, тригонометрической и степенной функций.

2.18. Объяснить, почему элементарные функции $z = -x^2 + x - 1$ и $y = \lg z$ не определяют сложной функции.

Решение. Областью определения функции $y = \lg z$ является множество $Z = (0, +\infty)$, функция же $z = -x^2+x-1 = -(x-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}$ принимает только отрицательные значения и потому не может быть аргументом функции $y = \lg z$. Поэтому суперпозиция $y = \lg(-x^2 + x - 1)$ функций $z = -x^2 + x - 1$ и $y = \lg z$ не имеет смысла.

2.19. Записать условия на функцию $f(x)$ в ее области определения, при которых будут определены следующие функции:

1) $y = \dfrac{1}{f(x)}$; 2) $y = \sqrt{f(x)}$; 3) $y = \log_a f(x)$;

4) $y = \dfrac{1}{\log_a f(x)}$; 5) $y = \arcsin f(x)$; 6) $y = \operatorname{arctg} f(x)$.

Решение.

1) $y = \dfrac{1}{f(x)}$ определена в той части области определения $f(x)$, где $f(x) \neq 0$;

2) $y = \sqrt{f(x)}$ определена при условии, что $f(x) \geqslant 0$;

3) $y = \log_a f(x)$ – сложная логарифмическая функция, определенная при положительных значениях своего аргумента, то есть при условии, что $f(x) > 0$;

4) $y = \dfrac{1}{\log_a f(x)}$ – областью определения этой функции будет множество значений x, удовлетворяющих условиям

$$f(x) > 0 \text{ и } f(x) \neq 1;$$

5) $y = \arcsin f(x)$ – определена для x, при которых

$$f(x) \in [-1, 1];$$

6) $y = \operatorname{arctg} f(x)$ – эта функция определена всюду, где определена $f(x)$, так как функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена для всех действительных значений x.

2.20. Найти область определения заданных функций:

1) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$; 3) $y = \lg(x^3 - 9x)$;

4) $y = \dfrac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$; 5) $y = \arcsin\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$;

6) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$; 7) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$.

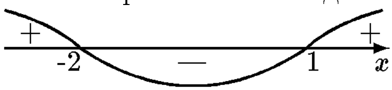
Решение.

1) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$, $X = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2) $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$ – функция определена при условии, что

$$\frac{x+2}{x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \geqslant 0 \text{ при } x \neq 1.$$

Решая неравенство методом интервалов,

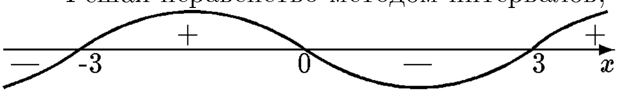


получим $x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$.

3) Функция $y = \lg(x^3 - 9x)$ определена для тех x, при которых

$$x^3 - 9x > 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+3) > 0.$$

Решая неравенство методом интервалов,



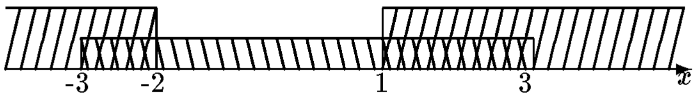
получим $x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty)$.

4) Функция $y = \dfrac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$ будет определена для тех значений x, для которых определено каждое из ее слагаемых. Это означает, что область определения данной функции будет решением системы:

$$\begin{cases} 1 - x > 0, \\ \lg(1-x) \neq 0, \\ x + 2 \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \neq 0, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$$

Таким образом, $x \in [-2, 0) \cup (0, 1)$.

5) Первое слагаемое функции $y = \arcsin\frac{x}{3} + \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$ определено при условии, что $-1 \leqslant \frac{x}{3} \leqslant 1$ или $-3 \leqslant x \leqslant 3$. Второе слагаемое определено, когда $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) > 0$, то есть при $x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$. Найдем значения x, при которых определены оба слагаемых:

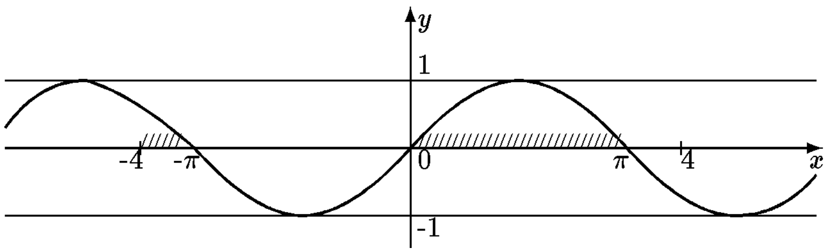


Таким образом, $x \in [-3, -2) \cup (1, 3]$.

6) Функция $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$ определена для x, удовлетворяющих системе неравенств:

$$\begin{cases} 16 - x^2 \geqslant 0, \\ \sin x \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4, \\ \sin x \geqslant 0. \end{cases}$$

Чтобы облегчить решение системы, воспользуемся графиком функции $y = \sin x$:



Из всех значений x, для которых $\sin x \geqslant 0$, условию $-4 \leqslant x \leqslant 4$ удовлетворяют x, принадлежащие промежуткам $[-4, -\pi]$ и $[0, \pi]$. Таким образом, $X = [-4, -\pi] \cup [0, \pi]$.

7) Дробно-рациональная функция

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

определена всюду, за исключением точек, в которых $Q(x) = 0$. Задача сводится к нахождению корней многочлена, стоящего в знаменателе дроби. Так как $Q(-1) = 0$, $x_1 = -1$. Для того, чтобы найти два других корня, найдем частное от деления $Q(x)$ на разность $(x - x_1)$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 - 4x^2 + & x & +6 & & x+1 \\
\cline{5-5}
\underline{x^3 + \ \ x^2} & & & & x^2-5x+6 \\
-5x^2 + & x & & & \\
-\underline{5x^2 - 5x} & & & & \\
& 6x & +6 & & \\
& \underline{6x} & \underline{+6} & & \\
& & 0 & &
\end{array}
$$

Решая уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, найдем остальные корни:

$$x_2 = 2,\ x_3 = 3.$$

Таким образом, заданная функция определена всюду, за исключением точек $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, то есть

$$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty).$$

3. Перечень задач для самостоятельной работы

3.1. Заданы функции: $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$ и $g(x) = \dfrac{|x-2|}{x+3}$. Найти $f(1)$, $g(1)$, $f(2)$, $g(2)$, $|f(-4)|$, $|g(-4)|$.

3.2. Задана функция $f(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$.
Найти $f(2)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(a) - f(\frac{1}{a})$.

3.3. Задана функция $f(x) = x^3 - 1$.
Найти $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ при $a \neq b$.

3.4. Задана функция $f(x) = \lg \dfrac{1-x}{1+x}$. Проверить равенство $f(a) + f(b) = f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

3.5. Убедиться в справедливости формул

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,\ 2\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x - 1,\ 2\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{ch} 2x + 1$$

для функций $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Сравните доказанные формулы с соответствующими формулами тригонометрии.

3.6. Задана функция

$$f(x)=\begin{cases}\cos^2\dfrac{x}{3}, & -\pi\leqslant x\leqslant-\dfrac{\pi}{2},\\ |\operatorname{tg}x|, & -\dfrac{\pi}{2}<x<0,\\ \sqrt{\pi-4x^2}, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти $f(-\frac{3\pi}{2})$, $f(-\frac{\pi}{2})$, $f(-\frac{\pi}{4})$, $f(0)$, $f(\log_2 9)$.

3.7. Вычислить значения функции $f(x)=\dfrac{25}{x^2}+x^2$ в точках, для которых $\dfrac{5}{x}+x=2$.

3.8. Задана функция $f(x)=x^3-3x$. Найти приращение функции при изменении ее аргумента от $x=2$ до $x=2+\Delta x$.

3.9. Задана функция $y=\cos^2 x$. Показать, что при любом x $\Delta y=-\sin\Delta x\sin(2x+\Delta x)$.

3.10. Заданы функции $f(x)=e^x$, $g(x)=\sin x$, $\phi(x)=$ $=\operatorname{arctg}x$. Найти $f(g(x))$, $g(f(x))$, $\phi(g(x))$, $f(\phi(x))$ и убедиться, что каждая из указанных суперпозиций имеет смысл для всех действительных x.

3.11. Заданные сложные функции представить в виде цепочки простейших элементарных функций и указать их области определения:

1) $y=\sqrt{x^2-3x}$; 2) $y=\sin\frac{\pi}{x}$;
3) $y=\ln^2(x^2+4)$; 4) $y=e^{\arcsin\sqrt{x}}$.

3.12. Объяснить, почему с помощью цепочки простейших элементарных функций $v=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $u=2^v$ и $y=\arcsin u$ нельзя задать y как сложную функцию x.

3.13. Найти область определения следующих функций:

1) $y=\sqrt{25-x^2}$; 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{25-x^2}}$;
3) $y=\sqrt[4]{x^2-4x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$; 4) $y=\lg(2x^2-5x+2)$;
5) $y=\dfrac{1}{\lg(4-x)}+\sqrt{5x-x^2}$; 6) $y=\dfrac{x^2-9}{x^3+6x^2-9x-54}$;
7) $y=\arccos\dfrac{x-2}{3}$; 8) $y=\arcsin\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$;
9) $y=\lg\sin x+\sqrt{\dfrac{3-x}{x-7}}$;
10) $y=\sqrt{\cos\sin x}+\lg(x^2+x+1)$;
11) $y=\sqrt{|x|-1}+\sqrt{2-|x|}$;

12) $y=\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}+\lg(25-x^2)$; 13) $y=\sqrt{\left|\frac{3x}{x^2-4}\right|-1}$.

Ответы: 1) $[-5,5]$; 2) $(-\infty,-5)\cup(-5,5)\cup(5,+\infty)$; 3) $(-2,0]\cup[4,+\infty)$; 4) $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$; 5) $[0,3)\cup(3,4)$; 6) $(-\infty,-6)\cup(-6,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$; 7) $[-1,5]$; 8) $(-3,-2]\cup[2,3)$; 9) $[3,\pi]\cup[2\pi,7)$; 10) $(-\infty,+\infty)$; 11) $[-2,-1]\cup[1,2]$; 12) $(-5,-\frac{7\pi}{6})\cup[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$; 13) $[-4,-2)\cup(-2,-1]\cup(2,4]$.

3.14. Приведите примеры функций с заданной областью определения в каждом из следующих случаев:

1) $x\neq 1$; $x\neq 2$; 2) $x\in[1,2]$; 3) $x\in(1,2)$; 4) $x\in(1,2]$; 5) $x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$; 6) $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

3.15. Найдите функции, обратные заданным:

1) $y=1-3x$; 2) $y=x^2+1$;
3) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$; 4) $y=2\sin 3x$;
5) $y=\frac{2^x}{1+2^x}$; 6) $y=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$.

Ответы: 1) $y=\frac{1-x}{3}$; 2) $y=\pm\sqrt{x-1}$; 3) $y=\pm\sqrt{x^3-1}$; 4) $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$; 5) $y=\log_2\frac{x}{1-x}$; 6) $y=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$.

3.16. Задайте аналитически функции, графики которых изображены на рис. 11 и 12.

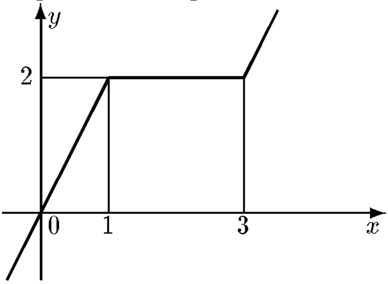


Рис. 11

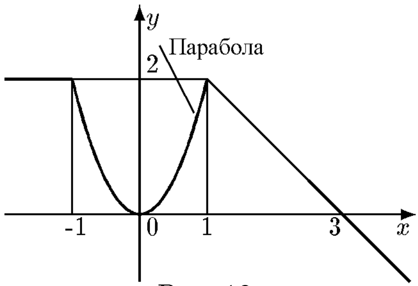


Рис. 12

3.17. Равномерно движущаяся по прямой точка через 12 с после начала движения находилась на расстоянии 32.7 см от точки отсчета; через 20 с после начала движения расстояние стало равным 43.4 см. Получить зависимость расстояния S от времени t.

Ответ: $S=16.6+1.34t$.

3.18. При напряжении, равном 2.4 В, и постоянном сопротивлении сила тока равна 0.8 А. Найти функциональную зависимость силы тока от напряжения.

Ответ: $I = \frac{1}{3}U$.

3.19. Некоторое количество газа занимало при 20 °С объем 107 см^3. При 40 °С объем стал равным 114 см^3. Исходя из закона Гей–Люссака, найти функцию, выражающую зависимость объема газа V от температуры t.

Ответ: $V = 100 + 0.35t$.

3.20. По закону Вебера–Фехнера зависимость ощущения E от раздражения R выражается формулой $E = k \cdot \ln R$, $k =$const. Убедиться, что если возбуждение возрастает в геометрической прогрессии, то ощущение растет в арифметической прогрессии.

3.21. Получить функциональную зависимость длины y катета прямоугольного треугольника от длины x другого катета, если гипотенуза равна 5.

Ответ: $y = \sqrt{25 - x^2}$.

3.22. Выразить площадь равнобедренной трапеции с основаниями a и b как функцию угла α при основании a.

Ответ: $S = \dfrac{a^2 - b^2}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

3.23. В треугольник с основанием b и высотой h вписан прямоугольник. Выразить периметр P и площадь S прямоугольника как функции его высоты x.

Ответ: $P = 2b + 2(1 - \frac{b}{h})x$, $S = b(1 - \frac{x}{h})x$.

3.24. В шар радиуса R вписан конус. Найти функциональную зависимость объема V конуса от его высоты h.

Ответ: $V = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h)$.

3.25. Около шара радиуса R описан конус. Найти функциональную зависимость площади S боковой поверхности конуса от угла α при вершине осевого сечения конуса.

Ответ: $S = \dfrac{\pi R^2 \operatorname{ctg}^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4})}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

3.26. На оси параболы $y^2 = 2px$ задана точка $A(a, 0)$. Расстояние от точки A до произвольной точки $M(x, y)$ параболы равно l. Найти функциональную зависимость расстояния l от абсциссы x точки $M(x, y)$.

Ответ: $l = \sqrt{(x-a)^2 + 2px}$.

3.27. На полуокружности $y = \sqrt{25 - x^2}$ взяты точки $A(5, 0)$, $B(3, 4)$ и $C(x, y)$ – произвольная точка полуокружности. Найти функциональную зависимость площади S треугольника ABC от абсциссы x точки $C(x, y)$.

Ответ: $S = |\sqrt{25 - x^2} + 2x - 10|$.

Тема 2. **Элементы поведения функции**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Графический обзор простейших элементарных функций

$y = kx + b$, $k > 0$

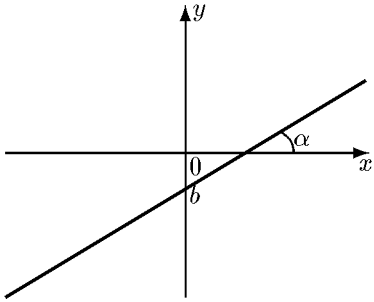


Рис. 1

$y = kx + b$, $k < 0$

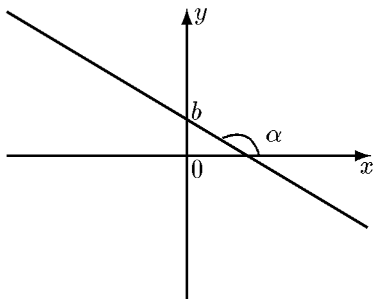


Рис. 2

$y = \dfrac{k}{x}$, $k > 0$

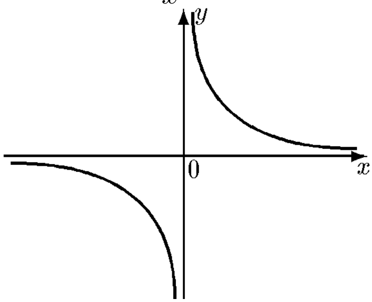


Рис. 3

$y = \dfrac{k}{x}$, $k < 0$

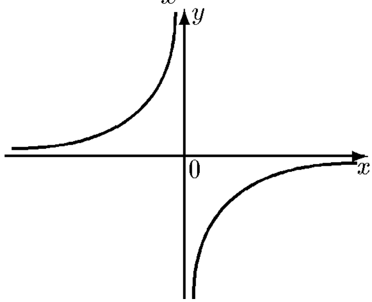


Рис. 4

$y = ax^2 + bx + c,\ D = b^2 - 4ac$

$a > 0,\ D > 0$

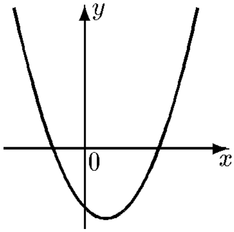


Рис. 5

$a > 0,\ D = 0$

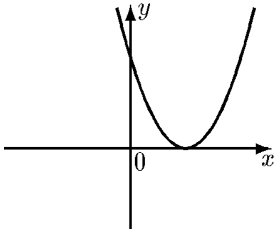


Рис. 6

$a > 0,\ D < 0$

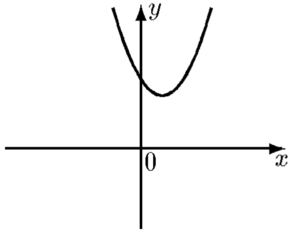


Рис. 7

$a < 0,\ D > 0$

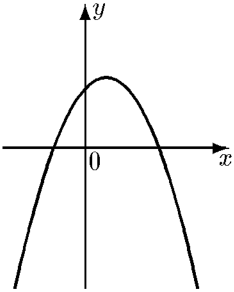


Рис. 8

$a < 0,\ D = 0$

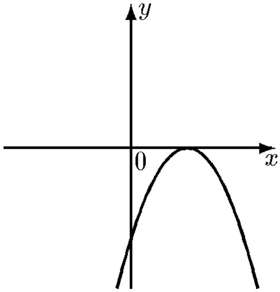


Рис. 9

$a < 0,\ D < 0$

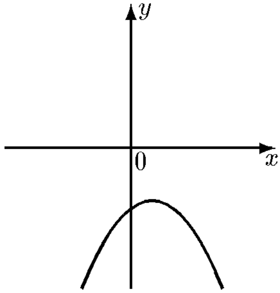


Рис. 10

$y = a^x,\ y = \log_a x,\ a > 1$

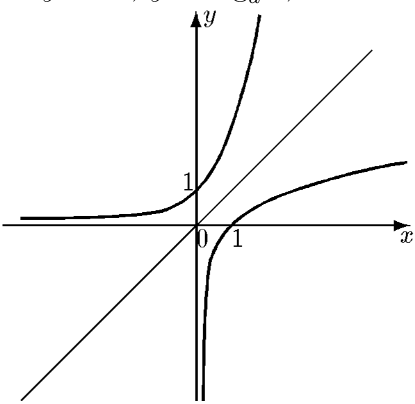


Рис. 11

$y = a^x,\ y = \log_a x,\ 0 < a < 1$

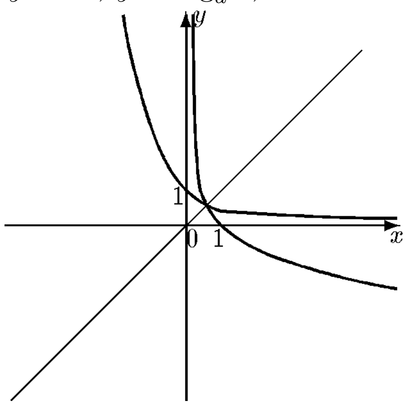


Рис. 12

$y = \sin x$

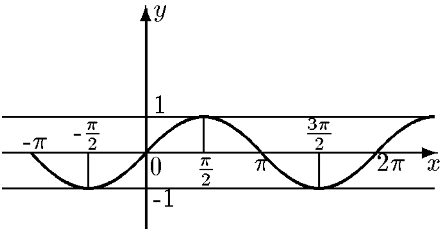


Рис. 13

$y = \cos x$

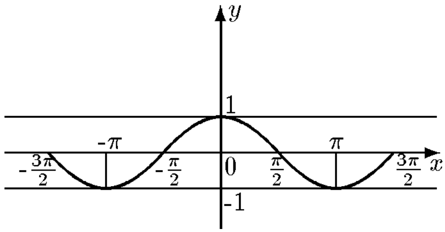


Рис. 14

$y = \operatorname{tg} x$

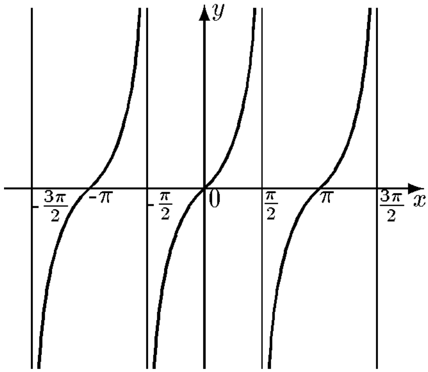


Рис. 15

$y = \operatorname{ctg} x$

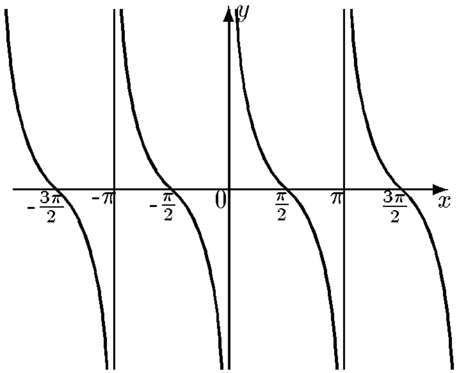


Рис. 16

$y = \arcsin x$

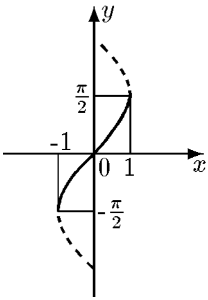


Рис. 17

$y = \arccos x$

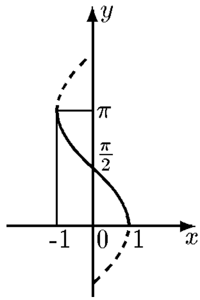


Рис. 18

$y = \operatorname{arctg} x$

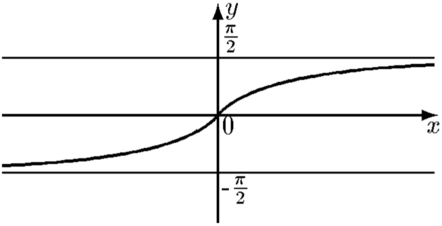


Рис. 19

$y = \operatorname{arcctg} x$

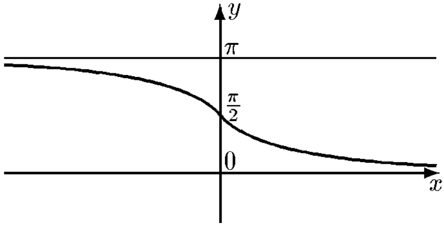


Рис. 20

1.2. Каким общим на $[a, b]$ свойством обладают функции, графики которых изображены на рис. 21 – 24?

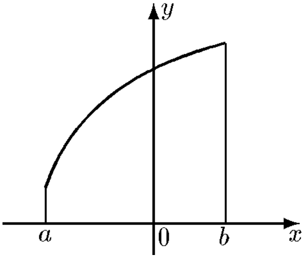


Рис. 21

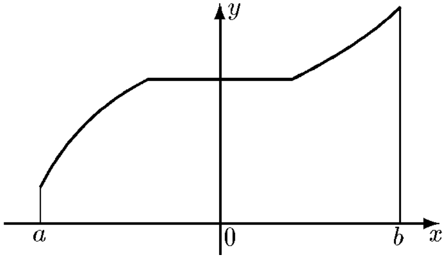


Рис. 22

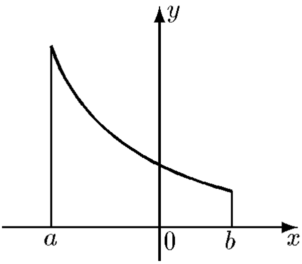


Рис. 23

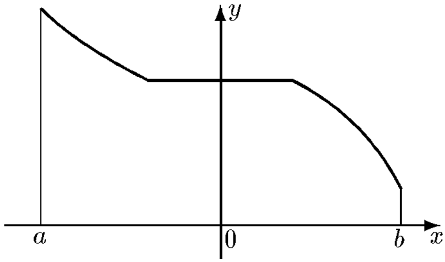


Рис. 24

Изображенные на рис. 21 – 24 функции являются монотонными на $[a, b]$.

1.3. В чем отличие возрастающей функции (рис. 21) от неубывающей (рис. 22) и убывающей (рис. 23) от невозрастающей (рис. 24)?

Для возрастающей на $[a, b]$ функции $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
Для неубывающей на $[a, b]$ функции $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$
Для убывающей на $[a, b]$ функции $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$
Для невозрастающей на $[a, b]$ функции $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Возрастающие, неубывающие, убывающие и невозрастающие функции называются монотонными. Возрастающие и убывающие функции называются также строго монотонными.

1.4. Какие простейшие элементарные функции являются монотонными?

Функция $y = kx + b$ возрастает при $k > 0$ (рис. 1) и убывает при $k < 0$ (рис. 2).

Функция $y = \frac{k}{x}$ убывает при $k > 0$ (рис. 3) и возрастает при $k < 0$ (рис. 4).

Функция $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ убывает при $x < -b/2a$ и возрастает при $x > -b/2a$ (рис. 5 – 7).

Функция $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$ возрастает при $x < -b/2a$ и убывает при $x > -b/2a$ (рис. 8 – 10).

Функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ возрастают при $a > 1$ (рис. 11) и убывают при $0 < a < 1$ (рис. 12).

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ можно назвать кусочно-монотонными. Функция $y = \sin x$ возрастает на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, убывает на $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ и т.д. (рис. 13). Функция $y = \cos x$ возрастает на $[-\pi, 0]$, убывает на $[0, \pi]$ и т.д. (рис. 14).

Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ и т.д. (рис. 15).

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$ и т.д. (рис. 16).

Функция $y = \arcsin x$ возрастает на $[-1, 1]$ (рис. 17).

Функция $y = \arccos x$ убывает на $[-1, 1]$ (рис. 18).

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает на $(-\infty, +\infty)$ (рис. 19).

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ убывает на $(-\infty, +\infty)$ (рис. 20).

1.5. Какие простейшие элементарные функции являются ограниченными? Какие ограничены только сверху или только снизу? Какие неограничены?

Функция $y = f(x)$ ограничена на X, если существуют числа m и M такие, что $m \leqslant f(x) \leqslant M,\ \forall x \in X$.

Ограниченными функциями являются:

$y = \sin x$, так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1,\ \forall x \in (-\infty, +\infty)$;

$y = \cos x$, так как $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1,\ \forall x \in (-\infty, +\infty)$;

$y = \arcsin x$, так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$;

$y = \arccos x$, так как $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, $x \in [-1, 1]$;

$y = \operatorname{arctg} x$, так как $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

$y = \operatorname{arcctg} x$, так как $0 \leqslant \operatorname{arcctg} x \leqslant \pi$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху на X, если $\exists M$: $f(x) \leqslant M\ \ \forall x \in X$. Для функции, ограниченной снизу, $\exists m$: $f(x) \geqslant m\ \ \forall x \in X$.

Функция $y = ax^2 + bx + c$ ограничена снизу при $a > 0$ (рис. 5, 6, 7) и сверху при $a < 0$ (рис. 8, 9, 10).

Функция $y = a^x$ ограничена снизу (рис. 11, 12), так как $a^x \geqslant 0\ \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Функции $y = kx + b$, $y = \dfrac{k}{x}$, $y = \log_a x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ не ограничены в своих областях определения.

1.6. Какова особенность графиков четных и нечетных функций?

Для четной функции $f(-x) = f(x)$ и, следовательно, график четной функции симметричен относительно оси ординат. Для нечетной функции $f(-x) = -f(x)$. В этом случае график функции симметричен относительно начала координат.

Среди простейших элементарных функций четными являются функции $y = ax^2$, $y = \cos x$, нечетными – функции $y = kx$,

$y = \frac{k}{x}$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$. Функции $y = ax^2 + bx + c$ при $b \neq 0$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ не являются ни четными, ни нечетными.

1.7. Каким общим свойством обладают простейшие тригонометрические функции?

Тригонометрические функции являются периодическими.

Согласно определению, функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует число T такое, что

$$f(x + T) = f(x).$$

Для функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ наименьшим положительным периодом будет $T = 2\pi$ (рис. 13, 14), для $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ $T = \pi$ (рис. 15 и 16).

При решении задач будут рассмотрены нетригонометрические периодические функции.

2. Решение задач

2.1. Исследовать на монотонность и построить графики функций:

$$1)\ y = |x|;\ 2)\ y = |x| - x;\ 3)\ y = 2x^3 + x;\ 4)\ y = \frac{x+3}{x-1}.$$

Решение. Исходя из определения монотонной функции, при исследовании функции на монотонность следует установить знак разности

$$f(x_2) - f(x_1)$$

для $x_1 < x_2$ из области определения функции. Если разность положительна ($f(x_2) > f(x_1)$), функция возрастает. Если разность отрицательна ($f(x_2) < f(x_1)$), функция убывает.

1) $y = |x|$.

Пусть $x_1 < x_2 < 0$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = |x_2| - |x_1| < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = |x|$ убывает на $(-\infty, 0]$.

Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = |x_2| - |x_1| > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = |x|$ возрастает на $[0, +\infty)$. График функции изображен на рис. 25.

$$2)\ y = |x| - x = \begin{cases} -2x, \text{если } x < 0, \\ 0, \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

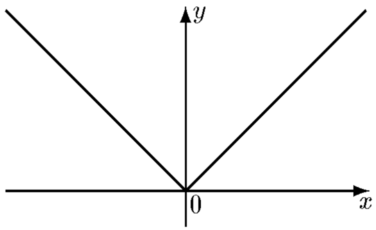


Рис. 25

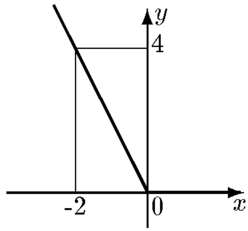


Рис. 26

Пусть $x_1 < x_2 < 0$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = -2x_2 + 2x_1 = -2(x_2 - x_1) < 0 \Rightarrow y = |x| - x$ убывает на $(-\infty, 0)$.

Для $x \geqslant 0$ функция $y = |x| - x$ постоянна. Таким образом, $y = |x| - x$ – невозрастающая на $(-\infty, +\infty)$ функция (рис. 26).

3) $y = 2x^3 + x$.

Пусть $x_1 < x_2$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = 2x_2^3 + x_2 - 2x_1^3 - x_1 = 2(x_2^3 - x_1^3) + (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(2(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) + 1) =$

$$= (x_2 - x_1)(2(x_2 + \frac{x_1}{2})^2 + \frac{3}{2}x_1^2 + 1).$$

Второй сомножитель принимает только положительные значения, поэтому при $x_1 < x_2$ $f(x_2) - f(x_1) > 0$ и, следовательно, $y = 2x^3 + x$ – возрастающая на $(-\infty, +\infty)$ функция.

При построении графика функции учтем, что $y(0) = 0$ и функция $y = 2x^3 + x$ – нечетная: $y(-x) = -2x^3 - x = -(2x^3 + x) = -y(x)$. График функции изображен на рис. 27.

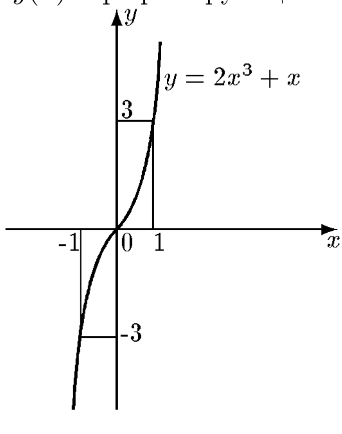


Рис. 27

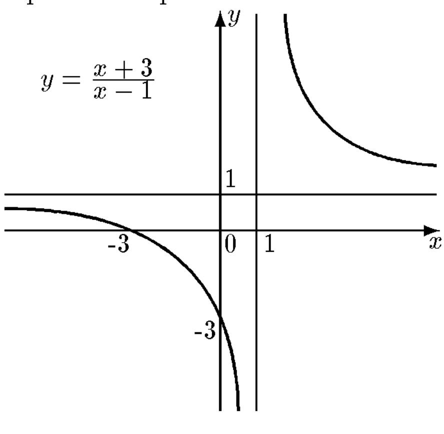


Рис. 28

4) $y = \dfrac{x+3}{x-1}$, $X = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Пусть $x_1 < x_2$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{x_2+3}{x_2-1} - \dfrac{x_1+3}{x_1-1} =$
$= \dfrac{x_1x_2 + 3x_1 - x_2 - 3 - x_1x_2 - 3x_2 + x_1 + 3}{(x_2-1)(x_1-1)} = \dfrac{-4(x_2-x_1)}{(x_2-1)(x_1-1)}$.

Числитель дроби при $x_1 < x_2$ отрицателен. Знак знаменателя зависит, очевидно, от величины x_1 и x_2 по сравнению с 1. При $x_1 < x_2 < 1$ оба сомножителя знаменателя отрицательны, то есть знаменатель положителен $\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow y = f(x)$ на $(-\infty, 1)$ убывает. При $1 < x_1 < x_2$ оба сомножителя знаменателя положительны, знаменатель положителен $\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow$ $y = f(x)$ на $(-\infty, 1)$ тоже убывает (рис. 28).

Заметим, что в случае, когда область определения функции является объединением нескольких множеств, исследование на монотонность следует проводить отдельно на каждом из множеств (как это было сделано при исследовании последней функции).

2.2. Убедиться, что функция
$$f(x) = x^6 - 10x^4 + 26x^2$$
ограничена снизу.

Решение.

$f(x) = x^2((x^4 - 10x^2 + 25) + 1) = x^2((x^2-5)^2 + 1)$.
Очевидно, что $f(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in R$, при этом $f(0) = 0$ – наименьшее значение функции.

2.3. Убедиться, что функция
$$f(x) = \frac{7}{\sqrt{3x^2 - 6x + 5}}$$
ограничена сверху.

Решение.

$$f(x) = \frac{7}{\sqrt{3x^2 - 6x + 5}} = \frac{7}{\sqrt{3(x^2 - 2x + 1) + 2}} = \\ = \frac{7}{\sqrt{3(x-1)^2 + 2}}.$$

Очевидно, $f(x) \leqslant \frac{7}{\sqrt{2}} \ \ \forall x \in R$, при этом $f(1) = \frac{7}{\sqrt{2}}$ – наибольшее значение функции.

Заметим, что решение задач 2.2 и 2.3 основано на выделении полного квадрата из квадратного трехчлена. Метод выделения полного квадрата широко используется в курсе математики.

2.4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$.

Решение.
$f(x) = 5(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x) = 5(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x) = 5\sin(x+\alpha)$, где угол α таков, что $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ (это возможно, так как $(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$). Так как $-1 \leqslant \sin(x+\alpha) \leqslant 1$, то $-5 \leqslant f(x) \leqslant 5$, то есть наименьшее значение $f(x)$ равно -5, наибольшее равно 5.

2.5. Доказать, что функция $f(x) = \cos ax$ $(a > 0)$ периодическая, и найти ее период T.

Решение. Требуется показать, что существует положительное число T такое, что $\cos a(x+T) = \cos ax \; \forall x$ или что $\cos a(x+T) - \cos ax = 0 \; \forall x$. Используя формулу $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \times \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ для разности косинусов, получим

$$\cos a(x+T) - \cos ax = -2\sin\left(ax + \frac{T}{2}\right)\sin\frac{aT}{2}.$$

Второй сомножитель не зависит от x, поэтому T найдем из условия $\sin\frac{aT}{2} = 0$. Это означает, что T должно удовлетворять уравнению $\frac{aT}{2} = \pi k$ или $T = \frac{2\pi k}{a}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Наименьшее положительное значение T получим при $k = 1$. Таким образом, $T = \frac{2\pi}{a}$.

Заметим, что 2π – период функции $\cos x$. Мы доказали, что период функции $\cos ax$ равен $\frac{2\pi}{a}$. Аналогичное утверждение имеет место и в общем случае: если $f(x)$ – периодическая функция с периодом T, то функция $f(ax+b)$, где $a > 0$, тоже периодическая с периодом $\frac{T}{a}$ (попробуйте доказать это утверждение самостоятельно).

2.6. Используя решение задачи 2.5, указать период функций:

$$1)\ f(x) = \cos\frac{x}{2}; \quad 2)\ f(x) = \sin 4x; \quad 3)\ f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{8}\right);$$
$$4)\ f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{3}; \quad 5)\ f(x) = \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Решение.

1) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ $\left(a=\frac{1}{2}\right)$, $T = 4\pi$;

2) $f(x) = \sin 4x$ $(a=4)$, $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;

3) $f(x) = \sin\left(4x+\frac{\pi}{8}\right)$ $(a=4)$, $T = \frac{\pi}{2}$;

4) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$ $\left(a=\frac{1}{3}\right)$, $T = \frac{\pi}{1/3} = 3\pi$;

5) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ $(a=2)$ $T = \frac{\pi}{2}$.

2.7. На промежутке $[0,2]$ задана функция

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, \text{ если } x \in [0,1], \\ \log_2 x, \text{если } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Построить график периодической функции с периодом $T = 2$, которая на промежутке $[0,2]$ совпадает с функцией $f(x)$.

Решение. Построим график $f(x)$ на промежутке $[0,2]$ и периодически с периодом $T = 2$ продолжим этот график на всю числовую ось (рис. 29).

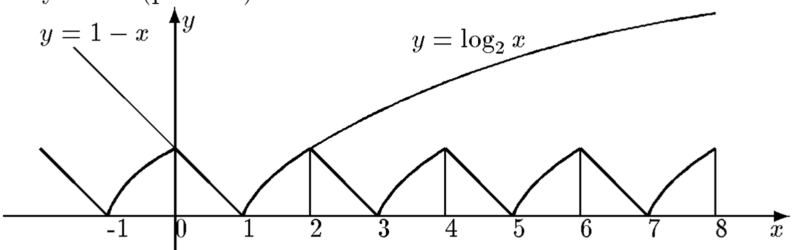


Рис. 29

2.8. Пример нетригонометрической периодической функции.

Пусть $x \in (-\infty, +\infty)$. Каждое значение x можно представить в виде $x = k + \lambda$, где k – целое число, $\lambda \in [0,1)$, например, $5.23 = 5 + 0.23$, $-3.76 = -4 + 0.24$, $\pi = 3 + 0.14159...$ Первое слагаемое называется целой частью x и обозначается $[x]$, второе – дробной частью x и обозначается $\{x\}$. Итак, $x = [x] + \{x\}$. Графики функций $y = [x]$, $y = \{x\}$ изображены на рис. 30 и 31.

$x \in [-1,0)$: $[x] = -1$
$x \in [0,1)$: $[x] = 0$
$x \in [1,2)$: $[x] = 1$ и т.д.

$y = \{x\}$ – периодическая функция с периодом $T = 1$, так как $\{x+1\} = \{x\}$.

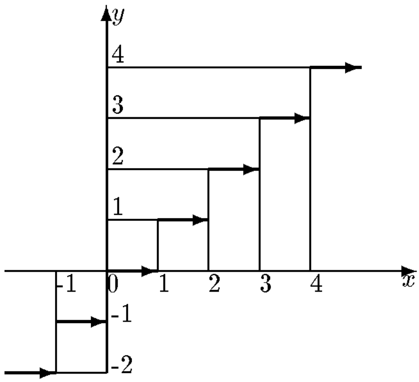


Рис. 30

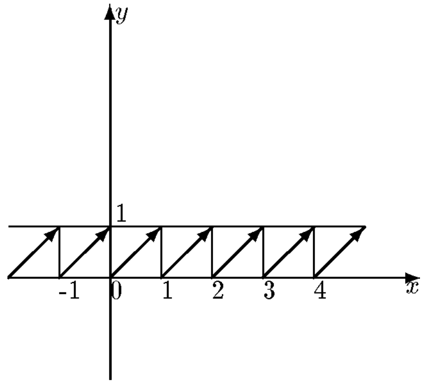


Рис. 31

2.9. Будет ли периодической функция Дирихле?

Функция Дирихле $D(x)$ определяется следующим образом:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ рационально,} \\ 0, \text{ если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

График этой функции изобразить невозможно. Он состоит из бесконечного множества точек оси Ox (для иррациональных x) и множества изолированных друг от друга точек прямой $y = 1$ (для рациональных x). Интересно, что при этом функция Дирихле – периодическая функция. Покажем, что ее периодом может служить любое рациональное число T. В самом деле, если T – рациональное число, тогда число $x+T$ будет рациональным, если x – рациональное число, и иррациональным, если x – иррациональное число. Тогда в силу определения функции Дирихле будем иметь

$$D(x+T) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ рационально,} \\ 0, \text{ если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

и, следовательно, $D(x+T) = D(x)$, то есть функция Дирихле – периодическая функция, периодом которой является любое рациональное число.

2.10. Исследовать на четность и нечетность следующие функции:

1) $f(x) = x^6 - 3x^2$; 2) $f(x) = x^5 - 4x^3$; 3) $f(x) = x^3 + x^2 - 2$;
4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; 5) $f(x) = \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2}$; 6) $f(x) = \lg \dfrac{1+x}{1-x}$.

Решение.

1) $f(x) = x^6 - 3x^2$;
$f(-x) = (-x)^6 - 3(-x)^2 = x^6 - 3x^2 = f(x) \Rightarrow f(x) = x^6 - 3x^2$ – четная функция.

2) $f(x) = x^5 - 4x^3$;
$f(-x) = (-x)^5 - 4(-x)^3 = -x^5 + 4x^3 = -(x^5 - 4x^3) = -f(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = x^5 - 4x^3$ – нечетная функция.

3) $f(x) = x^3 + x^2 - 2$;
$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 2 = -x^3 + x^2 - 2 \neq \left\{ \begin{array}{c} f(x) \\ -f(x) \end{array} \right. \Rightarrow f(x)$ не является ни четной, ни нечетной функцией.

4) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;
$f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{-\sin x}{-x} = \dfrac{\sin x}{x} = f(x) \Rightarrow f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ – четная функция.

5) $f(x) = \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2}$;
$f(-x) = \sqrt[3]{-x+2} + \sqrt[3]{-x-2} = -\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{x+2} = -f(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2}$ – нечетная функция.

6) $f(x) = \lg \dfrac{1+x}{1-x}$;
$f(-x) = \lg \dfrac{1-x}{1+x} = -\lg \dfrac{1+x}{1-x} = -f(x) \Rightarrow f(x) = \lg \dfrac{1+x}{1-x}$ – нечетная функция.

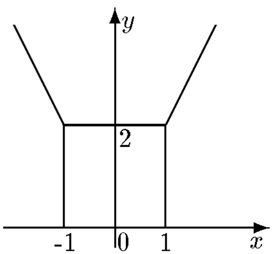


Рис. 32

2.11. Исследовать на четность и построить график функции $y = |x+1| + |x-1|$.

Решение. $y(-x) = |-x+1| + |-x-1| = |x-1| + |x+1| = y(x) \Rightarrow y = |x+1| + |x-1|$ – четная функция, ее график симметричен относительно оси Oy, поэтому достаточно исследовать функцию только для $x \geqslant 0$.

Пусть $x \in [0, 1]$, тогда $y = |x+1| + |x-1| = (x+1) - (x-1) = 2$.
Пусть $x \in [1, +\infty)$, тогда $y = |x+1| + |x-1| = (x+1) + (x-1) = 2x$.

График функции $y = |x+1| + |x-1|$ изображен на рис. 32.

2.12. Исследовать на четность и нечетность и построить графики функций

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ – гиперболический синус и}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ – гиперболический косинус.}$$

Решение.

1) $y(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

$y(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -y(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \operatorname{sh} x$ – нечетная функция, ее график симметричен относительно начала координат. При построении графика функции $f(x) = \operatorname{sh} x$ учтем, что $\operatorname{sh} 0 = 0$ и $\operatorname{sh} x$ – возрастающая на $(-\infty, +\infty)$ функция (рис. 33).

2) $y(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

$y(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = y(x) \Rightarrow y = \operatorname{ch} x$ – четная функция, ее график симметричен относительно оси Oy. При построении графика функции $f(x) = \operatorname{ch} x$ учтем, что $\operatorname{ch} 0 = 1$ и $\operatorname{ch} x$ – возрастающая на $[0, +\infty)$ функция (рис. 34).

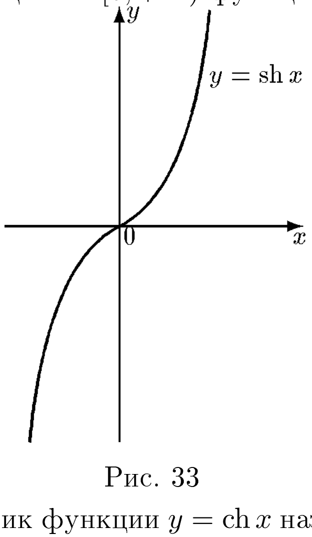


Рис. 33

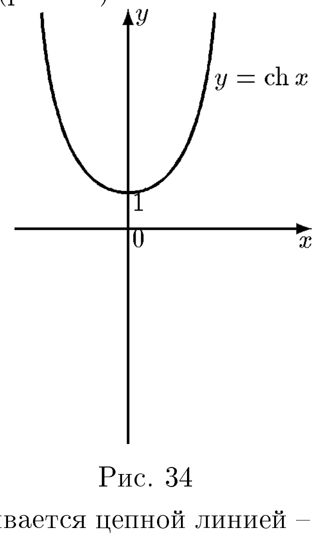


Рис. 34

График функции $y = \operatorname{ch} x$ называется цепной линией – именно такую форму принимает тяжелая, однородная и нерастяжимая цепь, подвешенная за концы.

2.13. Провести элементарное исследование заданных функций и построить их графики:

1) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; 2) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; 3) $y=x^4-2x^2+5$;

4) $y=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$; 5) $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$; 6) $y=\sqrt{x^2-6x+9}+10^{\lg x}$;

7) $y=\sqrt{\cos x}$; 8) $y=\sin\frac{\pi}{x}$.

Решение. Элементарное (без использования производной) исследование функции рекомендуем проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность.

3. Выяснить, является ли функция ограниченной, и, если это возможно, найти ее наименьшее и наибольшее значения.

4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно).

5. Для уточнения графика найти дополнительно значения функции в нескольких точках области определения.

1) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; $X=(-\infty,+\infty)$.

Очевидно, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ $f(-x)=\dfrac{1}{x^2+1}=f(x)\Rightarrow$ $\Rightarrow y=\dfrac{1}{x^2+1}$ – четная функция $\Rightarrow$ график функции симметричен относительно оси ординат. Очевидно, что $0<\dfrac{1}{x^2+1}\leqslant 1\Rightarrow$ $\Rightarrow y=\dfrac{1}{x^2+1}$ ограничена и снизу, и сверху. Наибольшее значение $y(0)=1$, наименьшего значения функция не имеет, но с увеличением абсолютной величины ее аргумента значения функции уменьшаются и стремятся к нулю. Это позволяет сделать вывод, что с увеличением x график функции прижимается к оси абсцисс. График функции изображен на рис. 35.

2) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Посмотрим, как изменит сомножитель x поведение функции. Очевидно, область определения осталась прежней: $X=(-\infty,+\infty)$. Но, в отличие от предыдущей функции, $y(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+1}=$ $=-\dfrac{x}{x^2+1}=-y(x)\Rightarrow$ функция $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ нечетная и ее график

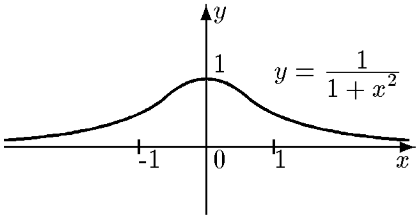


Рис. 35

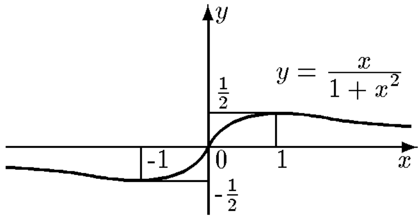


Рис. 36

симметричен относительно начала координат. При $x = 0$ функция равна 0. С увеличением x от 0 до 1 функция возрастает и при $x = 1$ принимает наибольшее значение, равное $\frac{1}{2}$. Далее с увеличением значений x значения функции уменьшаются и стремятся к нулю. График функции изображен на рис. 36.

3) $y = x^4 - 2x^2 + 5$; $X = (-\infty, +\infty)$.

Для данной функции $y(-x) = x^4 - 2x^2 + 5 = y(x) \Rightarrow$ функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат, поэтому достаточно провести исследование только для $x \in [0, +\infty)$. Дальнейшее исследование упростится, если выделить из трехчлена полный квадрат:

$$y = x^4 - 2x^2 + 5 = (x^2 - 1)^2 + 4.$$

Полученная запись функции позволяет сделать вывод, что $y \geqslant 4$. Таким образом, функция ограничена снизу, а ее наименьшее значение равно 4 и достигается в точках $x = \pm 1$. Очевидно, для $x \in [0, 1]$ функция $y = (x^2 - 1)^2 + 4$ убывает, а для $x \in [1, +\infty)$ возрастает. При $x = 0$ $y = 5$. График функции изображен на рис. 37.

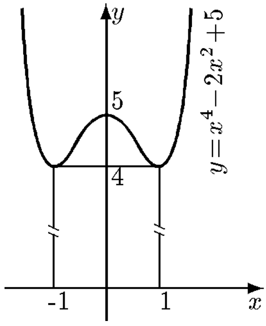


Рис. 37

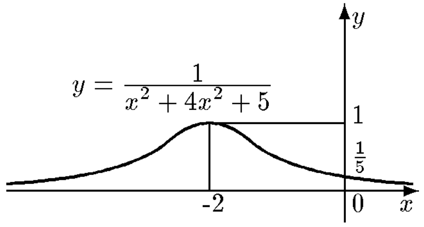


Рис. 38

4) $y = \dfrac{1}{x^2+4x+5}$.

Знаменатель функции отличен от 0 ($D=-4<0$) $\Rightarrow$ функция определена на всей числовой оси. Для данной функции

$$y(-x) = \frac{1}{(-x)^2+4(-x)+5} = \frac{1}{x^2-4x+5},$$

то есть $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x) \Rightarrow$ функция не является ни четной, ни нечетной.

Представим функцию в виде

$$y = \frac{1}{(x+2)^2+1}.$$

Очевидно, что функция ограничена сверху и свое наибольшее значение, равное 1, принимает в точке $x=-2$. При $x \in (-\infty,-2]$ функция возрастает, при $x \in [-2,+\infty)$ – убывает. При $x \to \pm\infty$ знаменатель функции увеличивается, а сама функция уменьшается и стремится к 0. При $x=0$ $y=\frac{1}{5}$. С осью Ox график не пересекается. График функции изображен на рис. 38. Рекомендуем полученный график сравнить с графиком функции $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ (рис. 35).

5) $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$; $X=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

Исследуем функцию на четность:

$$y(-x) = \frac{-2x-5}{-x-3} = \frac{2x+5}{x+3} \neq \begin{matrix} y(x) \\ -y(x) \end{matrix},$$

то есть функция не является ни четной, ни нечетной.

Запишем функцию в виде

$$y = \frac{2x-6+1}{x-3} = 2+\frac{1}{x-3}.$$

При $x \to \pm\infty$ второе слагаемое уменьшается, и значения функции будут мало отличаться от числа 2. Это означает, что при $x \to \pm\infty$ график функции будет прижиматься к прямой $y=2$. Легко убедиться, что на каждом из промежутков $(-\infty,3)$ и $(3,+\infty)$ функция $y=2+\dfrac{1}{x-3}$ убывает. При $x=0$ $y=\frac{5}{3}$, при $y=0$ $x=\frac{5}{2}$. График функции изображен на рис. 39.

6) $y=\sqrt{x^2-6x+9}+10^{\lg x}$.

$x^2-6x+9=(x-3)^2 \geqslant 0$ $\forall x \in R$, поэтому функция определена там, где определена функция $\lg x$, то есть при $x>0$. На основании свойства арифметического корня ($\sqrt{x^2}=|x|$) и основного логарифмического тождества ($a^{\log_a x}=x$) запишем функцию

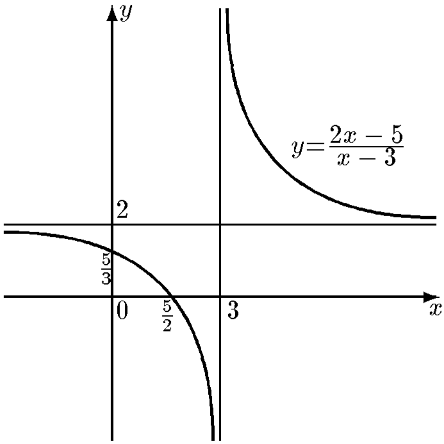


Рис. 39

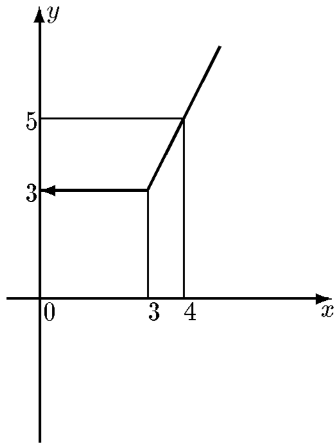


Рис. 40

в виде $y = |x-3|+x$. Разность $(x-3)$ изменяет знак при переходе через точку $x = 3$. При $0 < x \leqslant 3$ будем иметь $y = -(x-3)+x = -x+3+x = 3$, а при $x > 3$ – $y = (x-3)+x = 2x-3$.

Прямую $y = 2x-3$ проведем, например, через точки $M_1(3,3)$ и $M_2(4,5)$. График функции изображен на рис. 40.

7) $y = \sqrt{\cos x}$. Функция определена лишь при $\cos x \geqslant 0$, то есть на промежутках

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

В точках $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ функция принимает свои наименьшие значения, равные 0, при $x = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ функция принимает наибольшие значения, равные 1. Функция $y = \sqrt{\cos x}$ периодическая с периодом $T = 2\pi$ (рис. 41).

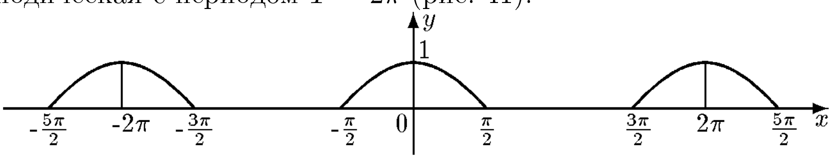


Рис. 41

8) $y = \sin\frac{\pi}{x}$; $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$y(-x) = \sin\left(-\frac{\pi}{x}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = -y(x) \Rightarrow$ функция $y = \sin\frac{\pi}{x}$ нечетная, поэтому ее дальнейшее исследование проведем для $x \in (0, +\infty)$. Функция ограничена, так как $-1 \leqslant \sin\frac{\pi}{x} \leqslant 1$. Найдем точки пересечения графика с осью Ox. С этой целью решим уравнение $\sin\frac{\pi}{x} = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{x} = \pi k \Rightarrow x = \frac{1}{k}$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$ для $x \in (0, +\infty)$. Очевидно, точки пересечения графика с осью Ox сгущаются к началу координат. С увеличением x дробь $\frac{\pi}{x}$ уменьшается, а с уменьшением аргумента $\frac{\pi}{x}$ будет уменьшаться и значение функции $y = \sin\frac{\pi}{x}$. График функции изображен на рис. 42.

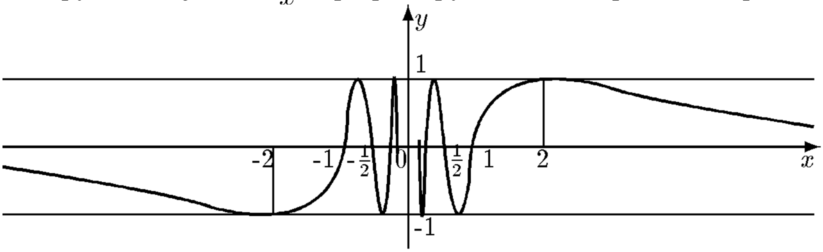


Рис. 42

Разумеется, вблизи $x = 0$ график изображен не полностью, так как бесконечное множество колебаний, которые происходят вблизи точки $x = 0$, воспроизвести невозможно.

3. Перечень задач для самостоятельной работы

3.1. На рис. 43 изображен график функции $y = f(x)$.

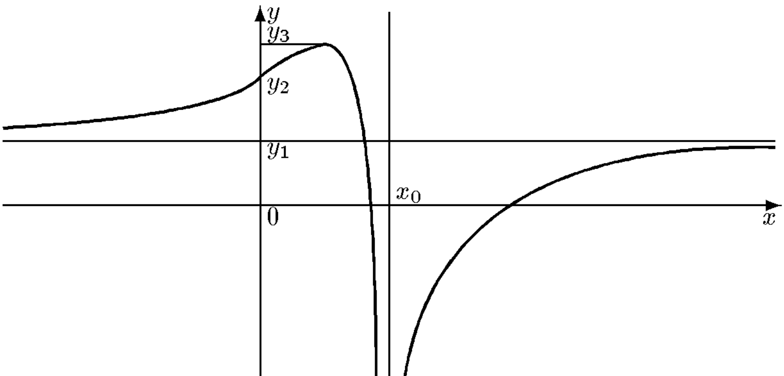


Рис. 43

Требуется:

1. Записать область определения и множество значений функции.

2. Указать промежутки монотонности функции.

3. Определить, сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

4.Указать верхнюю (нижнюю) границу функции (если таковые имеются).

3.2. Исходя из определения, показать, что функция
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
возрастает на всей числовой оси, а функция
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
убывает на множестве $(-\infty, 0]$ и возрастает на множестве $[0, +\infty)$.

3.3. Исследовать на монотонность и построить графики функций:
$$1)\ y = |x| \cdot x; \quad 2)\ y = x^3 + x; \quad 3)\ y = \frac{x}{x+1}.$$

3.4. Убедиться, что функция $y = [x^3]$ (целая часть x^3) является неубывающей на всей числовой оси. Построить график функции.

3.5. Убедиться, что функция $y = 2^{x^2}$ ограничена снизу и указать ее наименьшее значение.

3.6. Убедиться, что функция $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 10}$ ограничена сверху и указать ее наибольшее значение.

3.7. Указать наименьшее и наибольшее значения функций:
$$1)\ y = \cos^2 x; \qquad 2)\ y = \cos(x^2);$$
$$3)\ y = 1 - \cos x; \qquad 4)\ y = \cos x + \sin x.$$

3.8. Исследовать на четность и нечетность следующие функции:
$$1)\ y = 5^{-x^2}; \qquad 2)\ y = x^3 - 2x; \quad 3)\ y = x^3 - 2x + 1;$$
$$4)\ y = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}; \quad 5)\ y = \frac{|\sin x|}{x}; \quad 6)\ y = \lg(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

3.9. Какими будут функции $f(x) \cdot g(x)$, $f(x) \cdot \psi(x)$, $g(x) \cdot \phi(x)$, если функции $f(x)$, $\psi(x)$ – четные, $g(x)$, $\phi(x)$ – нечетные? Приведите соответствующие примеры.

3.10. Периоды простейших тригонометрических функций известны. Укажите периоды функций:

$$1)\ y=\sin\frac{x}{4};\qquad 2)\ y=2\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{3}\right);$$
$$3)\ y=\operatorname{tg}\frac{2x}{3};\qquad 4)\ y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}.$$

3.11. Постройте график периодической функции $y=|\sin x|$ и укажите ее период.

3.12. Задана функция
$$f(x)=\begin{cases} x^2\,, \text{ если } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1\,, \text{ если } 1\leqslant x<2.\end{cases}$$
Построить график периодической функции с периодом $T=3$, которая на промежутке $[-1,2]$ совпадает с функцией $f(x)$.

3.13. Задана функция
$$f(x)=\begin{cases} x^3\,, \text{ если } x\in[0,1],\\ 2-x\,, \text{ если } x\in(1,2].\end{cases}$$
Требуется:

1) Доопределить функцию $f(x)$ на промежутке $[-2,0)$ таким образом, чтобы вновь полученная функция оказалась четной на $[-2,2]$.

2) Полученную функцию периодически продолжить на всю числовую ось с периодом $T=4$.

3) Построить график полученной периодической функции.

3.14. Провести элементарное исследование и построить графики функций:

1) $y=x^2-2x+3$; 2) $y=\dfrac{1}{x^2-2x+3}$; 3) $y=\sqrt{x^2+10x+25}$;

4) $y=\dfrac{x}{x+1}$; 5) $y=\sin^2 x$; 6) $y=\sqrt{\sin^2 x}+\sin x$;

7) $y=10^{\lg(x^2-2x)}$; 8) $y=\lg\lg x$; 9) $y=\lg\sin x$;

10) $y=\sqrt{\lg\sin x}$; 11) $y=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; 12) $y=\sin(\arcsin x)$.

3.15. Построить график функции $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, если известно, что эта функция является обратной для функции $y = \operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

3.16. В курсе математики широко используется функция
$$y=\operatorname{sign} x=\begin{cases} 1\,, \text{ если } x>0,\\ 0\,, \text{ если } x=0,\\ -1\,, \text{ если } x<0.\end{cases}$$

Эта функция является носителем знака x (читается “знак x”). Аналогично определяется функция

$$y = \operatorname{sign} f(x) = \begin{cases} \;\;1\,, \text{ если } f(x) > 0, \\ \;\;0\,, \text{ если } f(x) = 0, \\ -1\,, \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Требуется построить графики функций $y = \operatorname{sign} x$, $y = \operatorname{sign}\sin x$, $y = \operatorname{sign}\sin\frac{\pi}{x}$. Какая из трех функций является периодической?

Тема 3. Простейшие преобразования графиков элементарных функций

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Известен график функции $y = f(x)$. Как построить графики функций $y = f(x + a)$, $y = f(x) + b$, $y = f(kx)$, $y = k \cdot f(x)$?

График функции $y = f(x+a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ его параллельным сдвигом вдоль оси Ox на $|a|$ единиц влево при $a > 0$ и вправо при $a < 0$.

График функции $y = f(x) + b$ получается путем параллельного сдвига графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на $|b|$ единиц вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$.

График функции $y = f(kx), k > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ его сжатием к оси Oy в k раз при $k > 1$ и растяжением в $\frac{1}{k}$ раз при $k < 1$.

График функции $y = k \cdot f(x), k > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ его растяжением от оси Ox в k раз при $k > 1$ и сжатием к оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз при $k < 1$.

1.2. Известен график функции $y = f(x)$. Как построить графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$?

Очевидно, функция $y = f(|x|)$ – четная. При $x \geqslant 0$ ее график будет совпадать с графиком функции $y = f(x)$. При $x < 0$ график $y = f(|x|)$ будет симметричен графику $y = f(x)$ относительно оси ординат (рис. 1).

При построении графика функции

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x)\,, \text{ если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x)\,, \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Часть графика, лежащая над осью Ox, останется без изменения, часть же графика $y = f(x)$, лежащая под осью Ox, симметрично отображается относительно оси Ox (рис. 2).

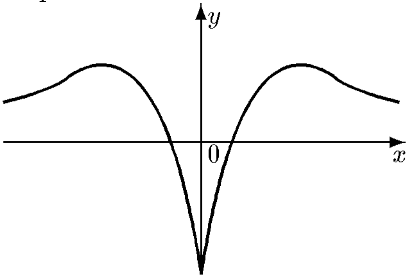


Рис. 1

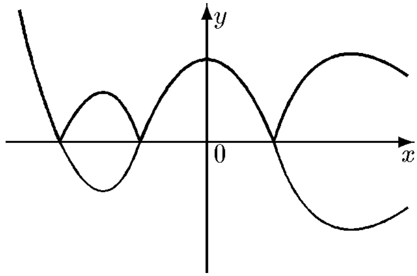


Рис. 2

2. Решение задач

2.1. Построить график функции $y = 3\sin\frac{x}{2}$.

Решение. График данной функции получится путем растяжения графика $y = \sin x$ в 2 раза вдоль оси Ox и в 3 раза вдоль оси Oy (рис. 3).

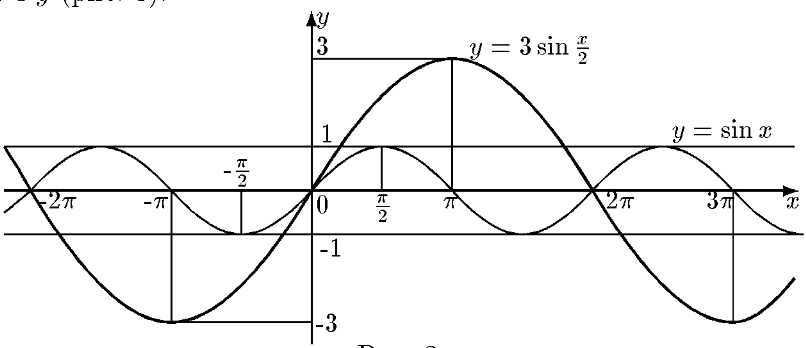


Рис. 3

2.2. Построить график функции $y = \dfrac{x+2}{x-2}$.

Решение. Преобразуем функцию таким образом, чтобы можно было воспользоваться графиком функции $y = \frac{k}{x}$:

$$y = \frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2+4}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}.$$

График заданной функции получим, если гиперболу $y = \frac{4}{x}$ (рис. 4) сместим вдоль оси Ox вправо на две единицы и затем сдвинем полученный график вверх вдоль оси Oy на одну единицу (рис. 5).

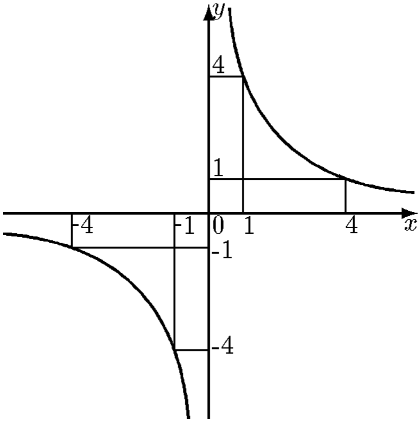


Рис. 4

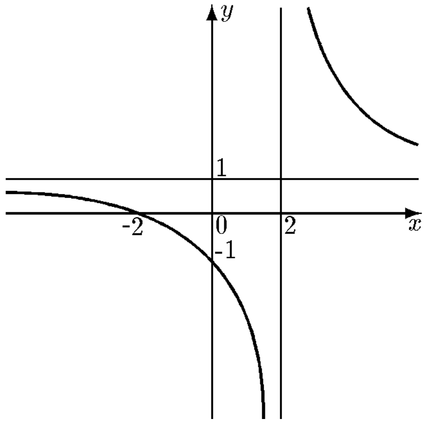


Рис. 5

2.3. Построить графики функций $y = \lg|x+2|$ и $y = |\lg|x+2||$.

Решение. График функции $y = \lg(x+2)$ получим смещением графика функции $y = \lg x$ на две единицы влево. График $y = \lg|x+2|$ для $x > -2$ будет совпадать с графиком функции $y = \lg(x+2)$, а для $x < -2$ будет симметричен графику

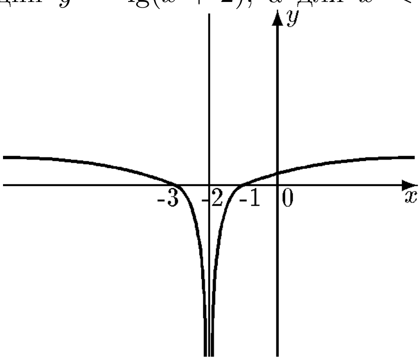


Рис. 6

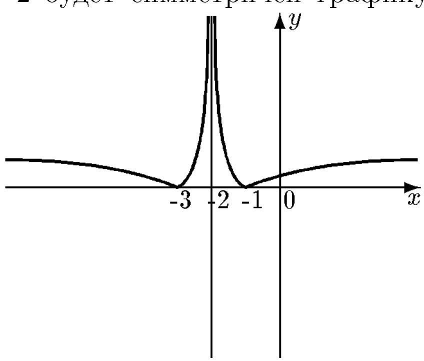


Рис. 7

$y = \lg(x+2)$ относительно прямой $x = -2$ (рис. 6).

График функции $y = |\lg|x+2||$ получим, если те части графика $y = \lg|x+2|$, которые расположены выше оси Ox, оставим без изменения, а те, которые расположены ниже оси Ox, зеркально отразим относительно оси Ox (рис. 7).

2.4. Решить уравнение $\log_5(x-3) = 9 - x$.

Решение. В некоторых случаях уравнения, содержащие трансцендентные и алгебраические функции, удается решить графически.

Построим графики функций $y = \log_5(x-3)$ и $y = 9 - x$ (рис. 8).

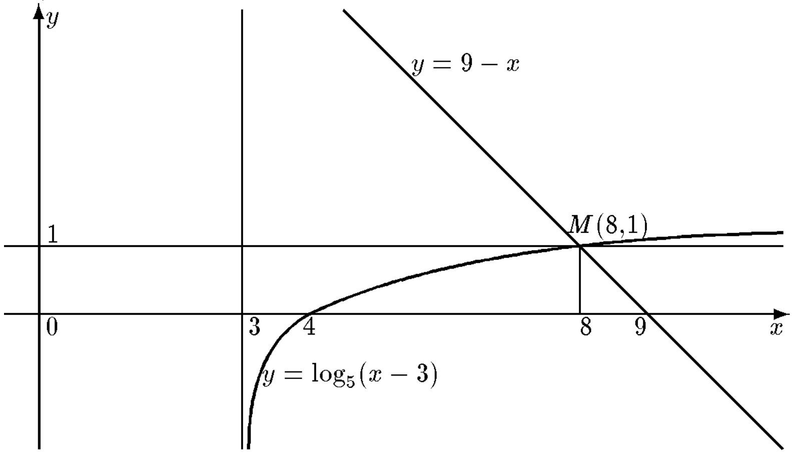


Рис. 8

Графики пересекаются в единственной точке $M(8,1)$, следовательно, уравнение имеет единственный корень $x = 8$.

3. Перечень задач для самостоятельной работы

В заданиях 1 – 25 требуется построить графики функций:

1) $y = (x-2)^2$; 2) $y = (x-2)^2 + 1$; 3) $y = x^2 + 4x$;

4) $y = x^2 + 4x + 5$; 5) $y = \dfrac{x}{x+3}$; 6) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$;

7) $y=\dfrac{4}{2^{x-1}}$; 8) $y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$; 9) $y=\log_{1/2}(x-1)$;

10) $y=\log_{1/2}(x-1)^3$; 11) $y=3\cos 2x$;12) $y=2\cos(x-\frac{\pi}{2})$;

13) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$;14) $y=2\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$; 15) $y=|x^2-4x+3|$;

16) $y=|x^2-4x|+3$; 17) $y=\lg(x^2)$; 18) $y=|\lg|x-3||$;

19) $y=|\cos x|+\cos x$; 20) $y=x+\sqrt{x^2+2x+1}$;

21) $y=\sqrt{\cos^2-4\cos x+4}$; 22) $y=\lg(x^2-1)-\lg(x-1)$;

23) $y=\begin{cases} 2^{-x}\text{, если } x\leqslant 0,\\ \log_2(x+2)\text{, если } x>0;\end{cases}$ 24) $y=\begin{cases} |x|\text{, если } x<1,\\ \dfrac{1}{x}\text{, если } x\geqslant 1;\end{cases}$

25) $y=\begin{cases} (x+1)^2\text{, если } x<-1,\\ \sqrt{1-x^2}\text{, если } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ (x-1)^2\text{, если } x>1.\end{cases}$

В заданиях 26 – 28 требуется графически решить трансцендентные уравнения:

26) $3^{x+1}=2x+3$; 27) $2\pi\cdot\cos x=2x-\pi$;

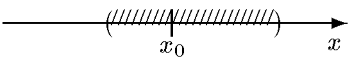
28) $3\log_2(x-1)=x$.

Тема 4. **Понятие предела функции**

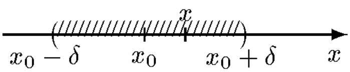
Приступая к изучению понятия предела, следует иметь в виду, что понятие предела функции относится к так называемым локальным понятиям математики. Это означает, что оно характеризует поведение функции в достаточно малой окрестности некоторой точки.

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

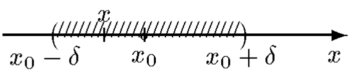
1.1. Виды окрестностей. Условие принадлежности точки заданной окрестности



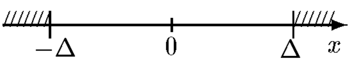
$O(x_0)$ – произвольная окрестность $(\cdot)x_0$;



$O(x_0, \delta)$ – окрестность $(\cdot)x_0$ радиуса δ, $x \in O(x_0, \delta) \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$;



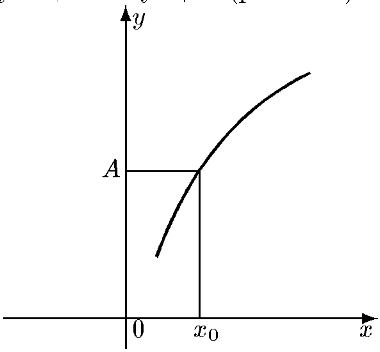
$\dot{O}(x_0, \delta)$ – проколотая окрестность $(\cdot)x_0$ радиуса δ, $x \in \dot{O}(x_0, \delta) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta$;



$O(\infty, \Delta)$ – окрестность радиуса Δ бесконечно удаленной точки, $x \in O(\infty, \Delta) \Leftrightarrow |x| > \Delta$.

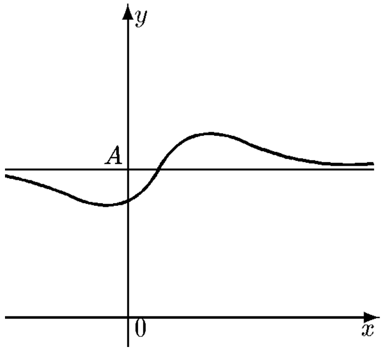
1.2. В связи с чем возникло понятие предела функции?

Одной из основных задач математического анализа является изучение поведения функции в достаточно малой окрестности некоторой точки x_0 или при $x \to \infty$. В связи с этим возникло понятие предела функции при $x \to x_0$ и при $x \to \infty$. В зависимости от поведения функции $y = f(x)$ геометрически возможны следующие ситуации (рис. 1–4).



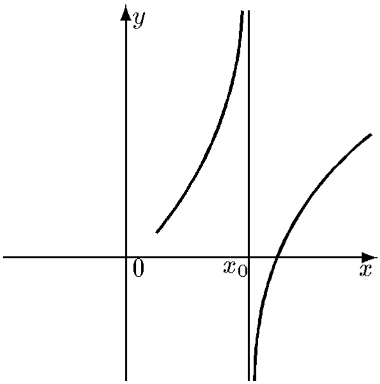
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Рис. 1



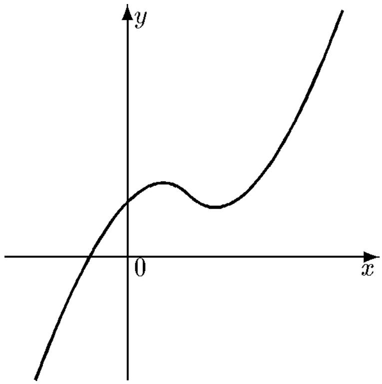
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

Рис. 2



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Рис. 3



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Рис. 4

Определение 1. $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\right)\overset{\text{def}}{=}(\,\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:$
$0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon)$.

Определение означает, что число A будет пределом функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$ в том случае, если для x, попавших в достаточно малую проколотую окрестность $(\cdot)x_0$ $(0<|x-x_0|<\delta)$, соответствующие значения $f(x)$ попадут в сколь угодно малую окрестность числа A $(|f(x)-A|<\varepsilon)$ (рис. 1).

Заметим, что в определении предела не требуется, чтобы функция была определена в самой $(\cdot)x_0$. Достаточно, чтобы функция была определена в проколотой окрестности $(\cdot)x_0$.

Определение 2. $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\right)\overset{\text{def}}{=}(\,\forall\varepsilon>0\,\exists\Delta>0:$
$|x|>\Delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon)$.

Определение означает, что для достаточно больших x $(|x|>\Delta)$ соответствующие значения $f(x)$ будут отличаться от A сколь угодно мало $(|f(x)-A|<\varepsilon)$ (рис. 2).

Определение 3. $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty\right)\overset{\text{def}}{=}(\,\forall E>0\,\exists\delta>0:$
$0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)|>E)$.

Определение означает, что для x, попавших в достаточно малую проколотую окрестность точки x_0 $(0<|x-x_0|<\delta)$, соответствующие значения функции становятся сколь угодно большими $(|f(x)|>E)$ (рис. 3).

Определение 4. $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\right)\overset{\text{def}}{=}(\,\forall E>0\,\exists\Delta>0:$
$|x|>\Delta\Rightarrow|f(x)|>E)$.

Определение означает, что для x достаточно больших $(|x|>\Delta)$ соответствующие значения $f(x)$ становятся сколь угодно большими $(|f(x)|>E)$ (рис. 4).

1.4. Определение односторонних пределов функции

В тех случаях, когда возникает необходимость в изучении поведения функции $y=f(x)$ или только в левосторонней $(x<x_0)$, или только в правосторонней $(x>x_0)$ полуокрестностях точки

x_0, используются так называемые односторонние пределы функции, для которых приняты обозначения $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ (обозначение предела слева) и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ (обозначение предела справа):

$$\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A\right) \overset{\text{def}}{=} (\,\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 :$$
$$0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon);$$
$$\left(\lim_{x\to x_0+0} f(x) = B\right) \overset{\text{def}}{=} (\,\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 :$$
$$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon).$$

Из определений предела следует

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A\right).$$

2. Решение задач

2.1. Исходя из определения 1, доказать что

$$\lim_{x\to 2} \frac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2} = 7.$$

Решение. $\left(\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2} = 7\right) \overset{\text{def}}{=} (\,\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 :$

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2} - 7\right| < \varepsilon).$$

Таким образом, задача сводится к доказательству существования числа $\delta > 0$ для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ (в частности сколь угодно малого):

$$\left|\frac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2} - 7\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{4x^2 - 9x + 2 - 7x + 14}{x - 2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{4x^2 - 16x + 16}{x - 2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{4(x^2 - 4x + 4}{x - 2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{4(x - 2)^2}{x - 2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |4(x - 2)| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, если взять $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, то $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \left|\dfrac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2} - 7\right| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2} = 7.$

Заметим, что величина δ зависит от ε ($\delta = \frac{\varepsilon}{4}$), причем чем меньше ε, тем меньше δ.

Чтобы проиллюстрировать определение геометрически, преобразуем данную функцию, разложив ее числитель на множители:

$$y = \frac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2} = \frac{4(x-2)(x-\frac{1}{4})}{x-2} = 4x - 1, \ x \neq 2.$$

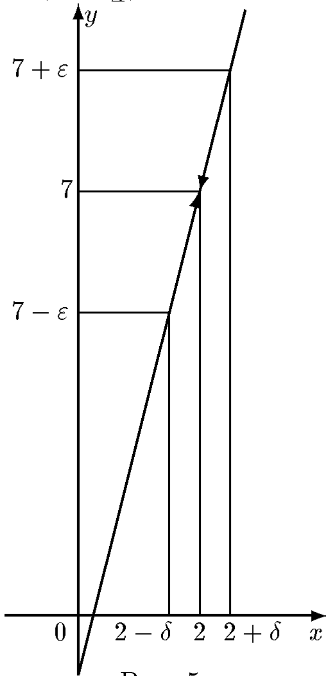


Рис. 5

График заданной функции при $x \neq 2$ будет совпадать с графиком линейной функции $y = 4x - 1$ (рис. 5). Стрелки на графике функции иллюстрируют тот факт, что функция не определена в точке $x_0 = 2$.

2.2. Исходя из определения, доказать, что

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{\pi}{x} = 0.$$

Решение. Воспользуемся определением 2:

$$\left(\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{\pi}{x} = 0\right) \stackrel{\text{def}}{=} (\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :$$
$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \left|x \cdot \sin\frac{\pi}{x}\right| < \varepsilon).$$

Чтобы найти зависимость δ от ε, воспользуемся тем, что $\left|\sin\frac{\pi}{x}\right| \leqslant 1$. Тогда $\left|x\sin\frac{\pi}{x}\right| \leqslant |x|$, и если взять $\delta = \varepsilon$, то $0 < |x| < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \left|x\sin\frac{\pi}{x}\right| < \varepsilon$, это и означает, что $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{x} = 0$. Пример интересен тем, что функция $y = x\sin\frac{\pi}{x}$ не определена в точке $x = 0$ и кроме того ее сомножитель $\sin\frac{\pi}{x}$ при $x \to 0$ вообще не имеет предела (строгое доказательство этого факта опустим), тем не менее $\exists \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{\pi}{x} = 0$. Существование предела объясняется стремлением к 0 сомножителя x и ограниченностью функции $\sin\frac{\pi}{x}$. График функции $y = x\sin\frac{\pi}{x}$ изображен на рис. 6.

График функции $y = x\sin\frac{\pi}{x}$ интересно сравнить с графиком функции $y = \sin\frac{\pi}{x}$ (с. 48, рис. 42). Сравнение графиков иллюстри-

Найдем зависимость Δ от ε, преобразуя последнее неравенство:

$$\left|\frac{2x-1}{x}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2x-1-2x}{x}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|}<\varepsilon \Leftrightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, если взять $\Delta=\frac{1}{\varepsilon}$, то $|x|>\Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \left|\dfrac{2x-1}{x}-2\right|<\varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x}=2$.

Заметим, что в этом случае зависимость Δ от ε иная – чем меньше ε, тем больше Δ.

Геометрически тот факт, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x}=2$, означает, что для больших по абсолютной величине значений x график функции будет прижиматься к прямой $y=2$ (рис. 7).

2.4. Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9}{(x-2)^2}=0 \text{ и } \lim_{x\to 2}\frac{9}{(x-2)^2}=+\infty.$$

Проиллюстрировать определения геометрически.

Решение. В первом случае воспользуемся определением 2, во втором – определением 3.

1) $$\left(\lim_{x\to\infty}\frac{9}{(x-2)^2}=0\right)\overset{\text{def}}{=}\Big(\,\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta>0:$$
$$|x|>\Delta\Rightarrow\frac{9}{(x-2)^2}<\varepsilon\Big).$$

Найдем зависимость Δ от ε. При $x\neq 2$

$$\frac{9}{(x-2)^2}<\varepsilon\Leftrightarrow(x-2)^2>\frac{9}{\varepsilon}\Leftrightarrow|x-2|>\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Последнее неравенство выполняется в двух случаях: при $(x-2)>\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}$ и при $(x-2)<-\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}$. В первом случае $x>2+\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}$, во втором $x<2-\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}$. Если взять $\Delta=2+\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}$, то $|x|>\Delta\Rightarrow$
$\Rightarrow\dfrac{9}{(x-2)^2}<\varepsilon$, это и означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{(x-2)^2}=0$.

2) $$\left(\lim_{x\to 2}\frac{9}{(x-2)^2}=\infty\right)\overset{\text{def}}{=}\Big(\,\forall E>0\ \exists\delta>0:$$
$$0<|x-2|<\delta\Rightarrow\frac{9}{(x-2)^2}>E\Big).$$

Преобразуем последнее неравенство:

$$\frac{9}{(x-2)^2}>E\Leftrightarrow 0<(x-2)^2<\frac{9}{E}\Leftrightarrow 0<|x-2|<\frac{3}{\sqrt{E}},$$

и, таким образом, $\delta=\dfrac{3}{\sqrt{E}}$.

Заметим, что с увеличением E число δ уменьшается. График функции $y = \dfrac{9}{(x-2)^2}$ изображен на рис. 8.

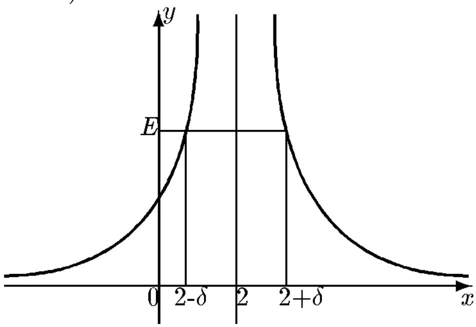


Рис. 8

Геометрически тот факт, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9}{(x-2)^2} = 0$, означает, что график для больших x прижимается к оси Ox. То, что

$$\lim_{x\to 2} \frac{9}{(x-2)^2} = +\infty,$$

означает, что график в окрестности точки $x = 2$ прижимается к прямой $x = 2$, устремляясь вверх.

2.5. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 x = +\infty$.

Решение. Воспользуемся определением 4. Так как при этом $x \to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, то знаки модулей в определении можно опустить:

$$\left(\lim_{x\to+\infty} \log_2 x = +\infty\right) \stackrel{\text{def}}{=} (\,\forall E > 0\ \exists \Delta > 0 : x > \Delta \Rightarrow \log_2 x > E).$$

Так как $\log_2 x > E \Leftrightarrow x > 2^E$, то, очевидно, в качестве Δ следует взять число 2^E, при этом чем большее E мы будем брать, тем большее Δ получать (рис. 9).

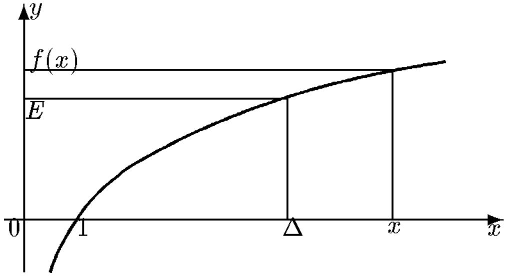


Рис. 9

2.6. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0$, $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$.

Решение. Используем определения односторонних пределов:

1) $\left(\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0\right) \stackrel{\text{def}}{=} (\,\forall\varepsilon > 0\; \exists\delta > 0:$

$$0 < 1 - x < \delta \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-1}} < \varepsilon).$$

Зависимость $\delta = \delta(\varepsilon)$ найдем, прологарифмировав обе части неравенства $2^{\frac{1}{x-1}} < \varepsilon$ по основанию 2:

$$\frac{1}{x-1} < \log_2\varepsilon \Leftrightarrow x - 1 > \frac{1}{\log_2\varepsilon} \Leftrightarrow 1 - x < -\frac{1}{\log_2\varepsilon}.$$

Если принять $\delta = -\dfrac{1}{\log_2\varepsilon}$ (предполагается, что ε мало, по крайней мере, $0 < \varepsilon < 1$, $\log_2\varepsilon < 0$ и $\delta = -\dfrac{1}{\log_2\varepsilon} > 0$), то $0 < 1 - x < \delta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x-1}} < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0$.

2) $\left(\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \infty\right) \stackrel{\text{def}}{=} (\,\forall E > 0\; \exists\delta > 0:$

$$0 < x - 1 < \delta \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-1}} > E).$$

Решим последнее неравенство относительно $(x-1)$:

$$2^{\frac{1}{x-1}} > E \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} > \log_2 E \Leftrightarrow x - 1 < \frac{1}{\log_2 E}.$$

Если принять $\delta = \dfrac{1}{\log_2 E}$, то $0 < x - 1 < \delta \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-1}} > E$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$.

Знание односторонних пределов позволяет схематично изобразить поведение функции $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ в окрестности точки $x_0 = 1$ (рис. 10).

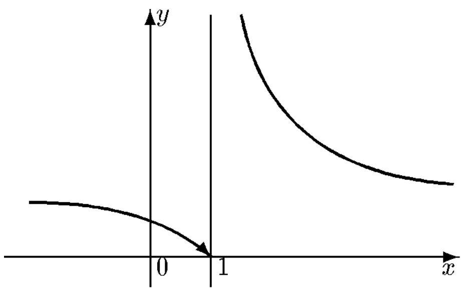


Рис. 10

2.7. Изобразить схематично график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям

$$D(y) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty),$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 2} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

$$f(-3) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(3) = 0.$$

Решение. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\infty \Rightarrow$ график функции $y = f(x)$ вблизи точки $x = -2$ прижимается к прямой $x = -2$, устремляясь вниз.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty \Rightarrow$ график функции $y = f(x)$ вблизи точки $x = 2$ прижимается к прямой $x = 2$, устремляясь вверх.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ график функции при $x \to \infty$ прижимается к оси Ox.

$f(-3) = 0$, $f(0) = 0$, $f(3) = 0 \Rightarrow$ график функции пересекает ось Ox в точках $x = 0$, $x = \pm 3$. Один из возможных вариантов графика такой функции изображен на рис. 11.

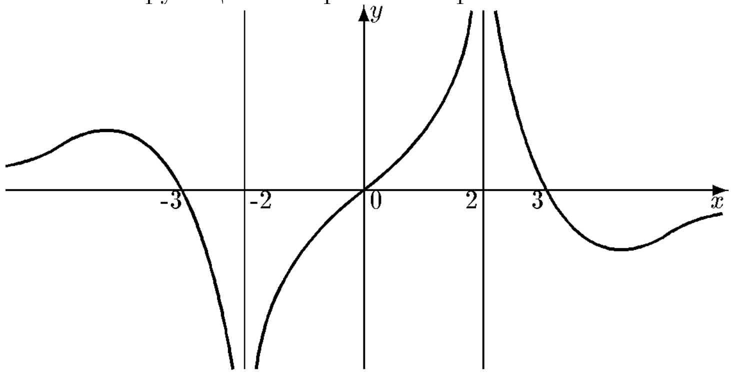


Рис. 11

2.8. Используя символику теории предела, записать особенности поведения функции $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 12.

Решение.

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to -1+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1-0} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 2, \quad f(0) = 0.$$

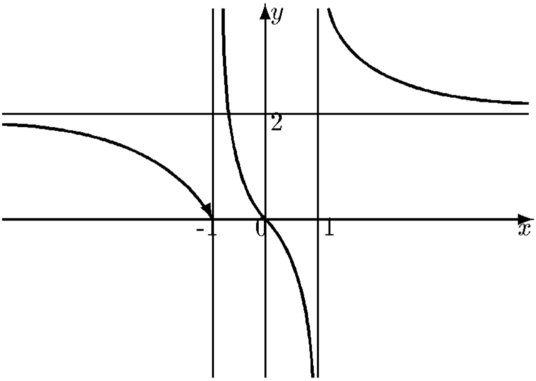


Рис. 12

3. Перечень задач для самостоятельной работы

3.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$\lim_{x\to -1}(3x-2) = -5, \qquad \lim_{x\to 3}\frac{2x^2-7x+3}{x-3} = 5,$$
$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\cos x = 1.$$

3.2. Исходя из определения предела, доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+3}{x} = 5, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{5x+3}{x} = \infty.$$

Построить график функции $y = \dfrac{5x+3}{x}$.

3.3. Исходя из определения предела, доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty.$$

Построить график функции $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

3.4. Привести пример функции, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = \infty.$$

3.5. Изобразить схематично график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям

$$D(y) = (-\infty, 3)\cup(3, +\infty),$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 3} f(x) = -\infty,$$
$$f(2) = f(4) = 0, \qquad f(0) = 1.$$

3.6. Изобразить схематично график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям

$D(y) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$,

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$, $\qquad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\qquad f(0) = 0$.

3.7. Изобразить схематично график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям

$D(y) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$,

$\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$, $\qquad f(-x) = f(x)$, $\qquad f(0) = 0$.

3.8. Используя символику теории предела, записать особенности поведения функции $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 13.

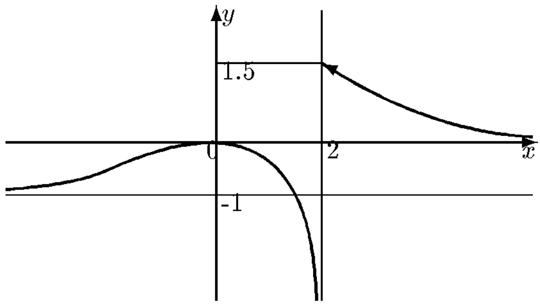


Рис. 13

Тема 5. **Числовая последовательность и ее предел**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Числовая последовательность как частный случай функции

Числовой последовательностью, или вариантной, называют функцию $y = f(n)$ натурального аргумента или отображение $N \to R$. Значения такой функции удобно обозначать y_1, y_2,..., y_n,..., где $y_n = f(n)$ – общий член последовательности.

Пример 1. $y_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ задает последовательность

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Сомножитель $(-1)^n$ используется при записи общего члена знакочередующихся последовательностей.

Пример 2. $y_n = \dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{4}$. Последовательность с таким общим членом имеет вид

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{25}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{36}, \ldots$$

Так как последовательность – частный случай функции, понятия монотонности и ограниченности для последовательности формулируются на основании соответствующих понятий для функции, естественно, с учетом того, что значениями аргумента последовательности являются натуральные числа.

Последовательность y_n называется

1) возрастающей, если $y_n < y_{n+1}$, $\forall n \in N$;

2) неубывающей, если $y_n \leqslant y_{n+1}$, $\forall n \in N$;

3) убывающей, если $y_n > y_{n+1}$, $\forall n \in N$;

4) невозрастающей, если $y_n \geqslant y_{n+1}$, $\forall n \in N$.

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ – убывающая последовательность;

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...$ – возрастающая последовательность.

Рассмотренные выше последовательности $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$ и $y_n = \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{4}$ монотонными не являются.

Последовательность y_n называется ограниченной сверху, если $\exists M \in R$ такое, что $y_n \leqslant M, \ \forall n \in N$.

Последовательность y_n называется ограниченной снизу, если $\exists m \in R$ такое, что $y_n \geqslant m, \ \forall n \in N$.

Последовательность, ограниченная и сверху, и снизу, называется ограниченной.

Обе последовательности $y_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = \frac{n}{n+1}$ ограниченные, так как $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$, $\frac{1}{2} \leqslant \frac{n}{n+1} < 1, \ \forall n \in N$.

Последовательность $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, ..., \frac{n^2}{n+1}, ...$ ограничена только снизу.

Последовательность $\lg 1, \ \lg \frac{1}{2}, \ \lg \frac{1}{3}, \ ..., \ \lg \frac{1}{n}, \ ...$ ограничена только сверху.

Последовательность $-1, 2, -3, 4, ..., n \cos \pi n, ...$ не является ограниченной ни снизу, ни сверху.

1.2. Определение предела числовой последовательности

Определение предела числовой последовательности при $n \to \infty$ естественно дать исходя из определения предела функции для случая $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Напомним:

$$\left(\lim_{x \to \infty} f(x) = A\right) \overset{\text{def}}{=} (\,\forall \varepsilon > 0 \, \exists \Delta > 0 : |x| > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

В определении предела числовой последовательности имеет смысл заменить Δ на N (не путать с обозначением множества натуральных чисел).

Определение 1. Число A называется пределом числовой последовательности $y_n = f(n)$ при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ (сколь бы мало оно ни было) существует номер N такой, что все значения y_n, у которых $n > N$, будут удовлетворять неравенству $|y_n - A| < \varepsilon$.

Итак,

$$\left(\lim_{n\to\infty} y_n = A\right) \stackrel{\text{def}}{=} (\, \forall\varepsilon > 0\, \exists N > 0 : n > N \Rightarrow |y_n - A| < \varepsilon).$$

Определение означает, что число A является пределом последовательности y_n при $n \to \infty$, если члены этой последовательности с достаточно большими номерами ($n > N$) будут отличаться от A сколь угодно мало ($|y_n - A| < \varepsilon$).

Пример 1. Докажем, исходя из определения, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-10}{n} = 2.$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и покажем, что, начиная с некоторого номера ($n > N$), члены последовательности будут отличаться от числа 2 менее чем на ε, то есть будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{2n-10}{n} - 2\right| < \varepsilon.$$

Преобразуя выражение под знаком модуля, получим равносильное неравенство

$$\frac{10}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{10}{\varepsilon}.$$

Таким образом, при $n > \dfrac{10}{\varepsilon}$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{2n-10}{n} - 2\right| < \varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-10}{n} = 2.$$

Очевидно, если число $\dfrac{10}{\varepsilon}$ целое, то $N = \dfrac{10}{\varepsilon}$, если же $\dfrac{10}{\varepsilon}$ не целое число, то $N = \left[\dfrac{10}{\varepsilon}\right]$ – целая часть числа $\dfrac{10}{\varepsilon}$.

Если, например, взять $\varepsilon = 0.7$, то $N = \left[\dfrac{10}{0.7}\right] = 14$. Это значит, что начиная с пятнадцатого члена, вся последовательность окажется в окрестности радиуса $\varepsilon = 0.7$ числа 2. При $\varepsilon = 0.1$ $N = 100$. В этом случае уже при $n > 100$ все члены последовательности окажутся в окрестности радиуса 0.1 числа 2. Очевидно, чем меньше ε мы будем брать, тем большим будет номер N, но такой номер обязательно будет существовать $\forall\varepsilon > 0$.

1.3. Для каких последовательностей гарантировано существование конечного предела?

Имеет место

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел.*

Согласно теореме Вейерштрасса, рассмотренные выше последовательности $y_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = \frac{n}{n+1}$ имеют конечные пределы (первая убывает и ограничена снизу, вторая возрастает и ограничена сверху). Легко доказать, что $\lim\limits_{n\to 0} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to 0} \frac{n}{n+1} = 1$. Заметим, что существуют и немонотонные последовательности, имеющие конечный предел. Ниже такие последовательности будут рассмотрены.

1.4. Самый замечательный из всех пределов?

В теории пределов замечательным пределом считается по праву предел последовательности

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Эта последовательность интересна тем, что ее общий член представляет собой степенно-показательную функцию, основание которой при $n \to \infty$ стремится к 1, а показатель степени стремится к ∞. Про такие выражения принято говорить, что они представляют собой неопределенность вида (1^∞). С помощью формулы бинома Ньютона доказывается (см. [2, 3, 4]), что последовательность

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

возрастает и ограничена сверху, причем $2 \leqslant y_n < 3$. Согласно теореме Вейерштрасса, этого достаточно, чтобы утверждать, что такая последовательность имеет конечный предел. Великий швейцарский математики Л. Эйлер (1707–1783) ввел обозначение

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

первым доказал иррациональность числа e и нашел его приближенное значение:

$$e = 2,718281828459045...$$

В настоящее время с помощью современной вычислительной техники у числа e удалось установить около 2000 цифр после запятой.

Число e имеет исключительную важность как для самого математического анализа, так и для его приложений. Замечательные свойства числа e, которые будут установлены впоследствии, делают особенно выгодным выбор этого числа в качестве основания показательной $y = e^x$ и логарифмической функций. Для логарифмической функции по основанию e принято обозначение $y = \ln x$, а логарифмы по основанию e принято называть натуральными. Функции $y = e^x$ и $y = \ln x$ взаимно обратные. Их графики изображены на рис. 1.

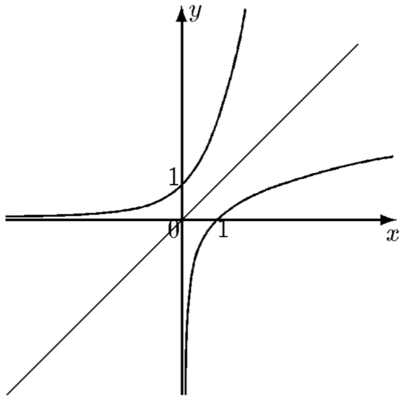


Рис. 1

2. Решение задач

2.1. Исследовать на монотонность последовательность
$$y_n = \lg \frac{n}{n+1}.$$

Решение. Рассмотрим разность
$$y_n - y_{n+1} = \lg \frac{n}{n+1} - \lg \frac{n+1}{n+2} = \lg \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \lg \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}.$$
Очевидно, $\forall n \ \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1 \Rightarrow \lg \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 0 \Rightarrow y_n < y_{n+1} \Rightarrow$ последовательность y_n возрастает.

2.2. Исследовать на монотонность последовательность
$$y_n = \frac{100^n}{n!}, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$
и найти наибольший член последовательности.

Решение. Рассмотрим частное
$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{100^{n+1} n!}{(n+1)! 100^n} = \frac{100}{n+1}.$$
Очевидно, $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{100}{n+1} > 1$ при $n < 99$ и $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{100}{n+1} < 1$

при $n > 99$. Это означает, что при $n < 99$ последовательность возрастает, при $n > 99$ – убывает. Это же означает, что $y_{99} = \dfrac{100^{99}}{99!}$ – наибольший член данной последовательности.

2.3. Доказать, что последовательность

$$y_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

ограничена сверху.

Решение. Преобразуем выражение общего члена последовательности

$$y_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}(n+1-n)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}.$$

Очевидно, $y_n < \dfrac{1}{2}\ \forall n \Rightarrow$ последовательность y_n ограничена сверху.

2.4. Исходя из определения предела, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 2.$$

Найти число членов последовательности, лежащих вне интервала $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.01$.

Решение. Исходя из определения предела, следует $\forall\varepsilon > 0$ указать номер N такой, что при $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left|2 + \frac{(-1)^n}{n} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Решая последнее неравенство относительно n, получим, что $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Если взять $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ – целая часть $\frac{1}{\varepsilon}$, то при $n > N$ члены данной последовательности будут удовлетворять неравенству $|y_n - 2| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 2$. При $\varepsilon = 0.1$ $N = 10$, это означает, что за пределами окрестности $(2 - 0.1; 2 + +0.1) = (1.9; 2.1)$ будет находиться только 10 членов последовательности. При $\varepsilon = 0.01$ $N = 100$, то есть за пределами окрестности $(1.99; 2.01)$ окажется только 100 первых членов последовательности, все остальные точки последовательности будут находиться внутри столь малого интервала. С уменьшением ε номер N увеличивается , но каким бы маленьким ни было число ε, все равно существует номер, начиная с которого все члены последовательности окажутся внутри окрестности $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$.

2.5. Задана последовательность

$$\frac{9}{10}, \frac{101}{100}, \frac{999}{1000}, \frac{10001}{10000}, \ldots$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$. Каким должно быть n, чтобы

$$|y_n - 1| < 10^{-6}?$$

Решение. Закономерность в записи членов последовательности позволяет записать ее общий член:

$$y_n = \frac{10^n + (-1)^n}{10^n}.$$

Требуется $\forall\varepsilon > 0$ указать номер N такой, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{10^n + (-1)^n}{10^n} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

Разрешая последнее неравенство относительно n, получим $n > \lg\frac{1}{\varepsilon}$. Это означает, что $N = \left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]$ (подразумевается, что ε мало, по крайней мере, $\varepsilon < 1$). При $\varepsilon = 10^{-6}$ $N = 6$ и, следовательно, при $n > 6$ будет иметь место неравенство $|y_n - 1| < 10^{-6}$.

2.6. Доказать, что число 0 не является пределом последовательности $y_n = \dfrac{n^2}{2n^2 - 3}$.

Решение. Рассмотрим $|y_n - 0| = \left|\dfrac{n^2}{2n^2 - 3}\right|$. Очевидно, при любом n имеет место неравенство $\left|\dfrac{n^2}{2n^2 - 3}\right| > \dfrac{1}{2}$. Это означает, что в окрестности радиуса $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ числа 0 нет ни одной точки данной последовательности, следовательно, число 0 пределом последовательности не является.

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2n^2 - 3} = \dfrac{1}{2}$.

С этой целью $\forall\varepsilon > 0$ требуется указать номер N такой, что при $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{n^2}{2n^2 - 3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n^2 - (2n^2 - 3)}{2(2n^2 - 3)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{3}{2(2n^2 - 3)}\right| < \varepsilon.$$

При $n > 1$ под знаком модуля положительное число и поэтому модуль можно опустить. Решим неравенство $\dfrac{3}{2(2n^2-3)} < \varepsilon$ относительно n:

$$\frac{3}{2(2n^2-3)} < \varepsilon \Leftrightarrow 3 < 2(2n^2-3)\varepsilon \Leftrightarrow 3 < (4n^2-6)\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 > \frac{3}{\varepsilon} + 6 \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{3}{4\varepsilon} + \frac{3}{2}}.$$

Таким образом, $N = \left[\sqrt{\dfrac{3}{4\varepsilon} + \dfrac{3}{2}}\right]$.

Существование нужного N доказано и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2-3} = \frac{1}{2}.$$

2.7. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^2 \dfrac{1}{n} = 1$.

Решение. Требуется $\forall\varepsilon > 0$ указать N такое, что при $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\cos^2 \frac{1}{n} - 1\right| < \varepsilon \text{ или } \sin^2 \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Так как $\sin \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n}$, то $\sin^2 \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n^2}$, и поэтому N найдем, разрешая неравенство $\dfrac{1}{n^2} < \varepsilon$:

$$n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right].$$

2.8. Дана последовательность

$$y_1 = \sqrt{6},\ y_2 = \sqrt{6 + y_1}, \ldots,\ y_n = \sqrt{6 + y_{n-1}}, \ldots$$

Доказать, что эта последовательность имеет предел, и найти его.

Решение. Очевидно, что данная последовательность возрастающая. По теореме Вейерштрасса возрастающая последовательность имеет конечный предел, если эта последовательность ограничена сверху. Очевидно, $y_1 < 3$, $y_2 < 3$. Методом индукции докажем, что $y_n < 3$. Пусть $y_k < 3$. Тогда $y_{k+1} = \sqrt{6 + y_k}$ тоже будет меньше 3, а это по методу индукции и означает, что $y_n < 3$ $\forall n$. Итак, согласно теореме Вейерштрасса, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Обозначим этот предел через A. Так как по условию $y_n = \sqrt{6 + y_{n-1}}$, для нахождения A будем иметь уравнение $A = \sqrt{6 + A}$, решая которое, найдем $A_1 = 3$, $A_2 = -2$. Отрицательный корень не подходит $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 3$.

3. Перечень задач для самостоятельной работы

3.1. Записать по пять первых членов заданных последовательностей:

1) $y_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; 2) $y_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$;

3) $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; 4) $y_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

3.2. Записать выражение для общего члена заданных последовательностей:

1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \ldots$ 2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13}, \frac{1}{18}, \ldots$

3) $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \ldots$ 4) $\frac{2}{1}, \frac{4}{1\cdot 2}, \frac{8}{1\cdot 2\cdot 3}, \frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \ldots$

5) $\lg 1, \lg\frac{3}{5}, \lg\frac{4}{10}, \lg\frac{5}{17}, \ldots$

3.3. Исследовать на монотонность последовательности
$$y_n = \frac{n+1}{n+5} \quad \text{и} \quad y_n = 2^{1/n}.$$

3.4. Доказать, что последовательности
$$y_n = \frac{n^2}{n^2+1}, \quad y_n = n\cdot\sin\frac{\pi}{n}, \quad y_n = n(\sqrt{n^2+1}-n)$$
ограничены сверху.

3.5. Исходя из определения предела, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = 1.$$
Начиная с какого номера, члены последовательности окажутся в окрестности радиуса 0.01 числа 1?

3.6. Исходя из определения предела, доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right) = 3$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{3\cdot 2^n} = \dfrac{1}{3}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2} = 0$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 0$.

3.7. Сформулировать определение предела числовой последовательности для случая
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty.$$
Исходя из определения, доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} 3^{\sqrt{n}} = \infty.$$

3.8. Привести примеры бесконечно малых ($\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$) и бесконечно больших ($\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$) последовательностей.

3.9. Доказать, что если y_n – бесконечно малая, то $\dfrac{1}{y_n}$ – бесконечно большая величина. Сформулировать и доказать обратное утверждение.

3.10. Доказать, что последовательность

$$y_1 = \frac{3}{8}, \quad y_2 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}y_1^2, \quad \ldots, \quad y_n = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}y_{n-1}^2, \quad \ldots$$

имеет конечный предел и найти этот предел.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}$.

3.11. Доказать, что последовательность

$$y_1 = \sin x_0, \quad y_2 = \sin y_1, \quad \ldots, \quad y_n = \sin y_{n-1}, \quad \ldots,$$

где x_0 – любое действительное число, имеет предел и найти его.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

3.12. Установить, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ $(a > 0)$ существует, и найти его.

Указание. Существование предела доказать на основании теоремы Вейерштрасса. Для нахождения предела воспользоваться соотношением $y_{n+1} = \dfrac{a}{n+1} y_n$.

Тема 6. **Понятие непрерывности функции в точке**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Три определения непрерывной в точке x_0 функции

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

1) функция $y = f(x)$ определена в самой точке x_0 и в некоторой ее окрестности;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Заметим, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не всегда совпадает со значением функции $y = f(x)$ в точке x_0 (даже в тех случаях, когда этот предел существует). Функции, для которых $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (непрерывные функции), – это наиболее используемые как в самой математике, так и в ее приложениях функции.

В основе понятия непрерывности лежит понятие предела функции. Используя определение предела "на языке $\varepsilon - \delta$", можно дать "на языке $\varepsilon - \delta$" и определение непрерывной функции.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности и для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что

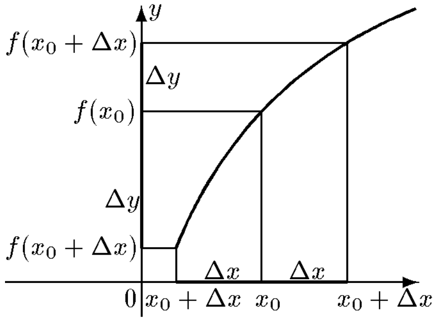
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Если ввести обозначения: $x - x_0 = \Delta x$, $f(x) - f(x_0) = \Delta y$, то можно дать еще одно определение непрерывной в точке x_0 функции, равносильное двум данным определениям.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если бесконечно малому приращению ее аргумента в точке x_0 будет соответствовать бесконечно малое приращение функции, то есть если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

1.2. Геометрическая иллюстрация поведения функции в случаях

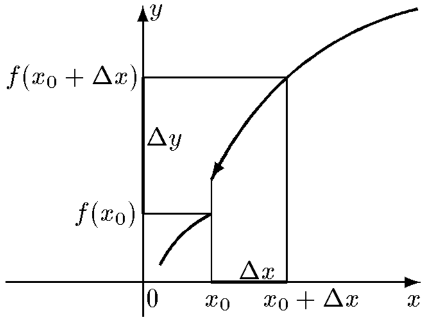
1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$,



$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$
$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0+0} \Delta y = 0$$

$y = f(x)$ непрерывна в точке x_0

2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y \neq 0$,



$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$
$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \Delta y \neq 0$$

График функции $y = f(x)$ терпит в точке x_0 разрыв

1.3. В каком случае функция $y = f(x)$ называется непрерывной на замкнутом промежутке $[a, b]$?

Функция должна быть непрерывна в каждой внутренней точке промежутка $[a, b]$. При этом в граничных точках промежутка должна иметь место так называемая односторонняя непрерывность:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x \to b-0} f(x) = f(b).$$

1.4. В каком случае будут непрерывны функции $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$?

Сумма, произведение и частное двух функций будут непрерывными в точке x_0 функциями, если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ будет непрерывна в точке x_0, причем в случае функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ должно быть выполнено условие $g(x_0) \neq 0$.

Это утверждение следует из определения 1 непрерывной в точке x_0 функции и теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух функций.

1.5. Что можно сказать о непрерывности простейших элементарных функций?

Каждая из простейших элементарных функций непрерывна в каждой точке своей области определения. Непрерывность каждой элементарной функции доказывается отдельно. Мы сделаем это, когда перейдем к решению задач.

1.6. Перечислить условия, при которых сложная функция $y = f(g(x))$ будет непрерывна в точке x_0

1. Функция $y = f(g(x))$ должна быть определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности.

2. Функция $q(x)$ должна быть непрерывна в точке x_0.

3. Функция $y = f(z)$ должна быть непрерывна в точке z_0, причем $z_0 = g(x_0)$.

1.7. Как много непрерывных функций?

Все простейшие элементарные функции (рациональные, дробно-рациональные, степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические) непрерывны в каждой точке своей области определения.

Любая суперпозиция из простейших элементарных функций, последовательно примененная конечное число раз, непрерывна в каждой точке своей области определения (на основании теоремы о непрерывности сложной функции – п. 1.6).

Любая функция, полученная из непрерывных функций с помощью четырех арифметических действий, непрерывна в каждой точке своей области определения.

2. Решение задач

2.1. Используя определение непрерывной функции на языке приращений, доказать, что $f(x) = x^3 - 2x^2$ непрерывна $\forall x \in R$.

Решение. Дадим аргументу x приращение Δx и найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - 2(x+\Delta x)^2 - (x^3 - 2x^2) =$$
$$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - 2x^2 - 4x\Delta x - 2\Delta x^2 - x^3 + 2x^2 =$$
$$= 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - 4x\Delta x - 2\Delta x^2.$$

Каждое слагаемое полученного для Δy выражения является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$ величиной, поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = x^3 - 2x^2$ непрерывна при любом действительном x.

2.2. Используя это же определение непрерывности, доказать непрерывность функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 16$.

Решение. Составим и затем преобразуем приращение функции в точке $x_0 = 16$:

$$\Delta y = \sqrt{16+\Delta x} - 4 = \frac{(\sqrt{16+\Delta x} - 4)(\sqrt{16+\Delta x} + 4)}{\sqrt{16+\Delta x} + 4} =$$
$$= \frac{16 + \Delta x - 16}{\sqrt{16+\Delta x} + 4} = \Delta x \frac{1}{\sqrt{16+\Delta x} + 4}.$$

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \frac{1}{\sqrt{16+\Delta x} + 4} = 0.$$

Предел равен 0 на основании теоремы, утверждающей, что произведение бесконечно малой величины (в нашем случае Δx) на ограниченную функцию (в нашем случае $\dfrac{1}{\sqrt{16+\Delta x} + 4} \leqslant \dfrac{1}{4}$) есть величина бесконечно малая.

2.3. Доказать непрерывность функции $y = 2^x \ \ \forall x \in R$.

Решение. Воспользуемся определением на языке приращений:
$$\Delta y = 2^{x+\Delta x} - 2^x = 2^x(2^{\Delta x} - 1).$$
Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$ такое, что
$$0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow |2^{\Delta x} - 1| < \varepsilon.$$
Преобразуем неравенство $|2^{\Delta x} - 1| < \varepsilon$:
$$-\varepsilon < 2^{\Delta x} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < 2^{\Delta x} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2(1-\varepsilon) < \Delta x < \log_2(1+\varepsilon).$$
При малых ε $(0 < \varepsilon < 1)$
$$\log_2(1+\varepsilon) > 0, \quad \log_2(1-\varepsilon) < 0.$$
Если в качестве δ взять наименьшее из чисел $\log_2(1+\varepsilon)$ и $|\log_2(1-\varepsilon)|$, то будем иметь
$$0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow |2^{\Delta x} - 1| < \varepsilon.$$
Таким образом, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} 2^{\Delta x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Непрерывность функции $y = 2^x$ доказана.

2.4. Доказать непрерывность функции $y = \cos x \ \ \forall x_0 \in R$, используя определение непрерывной функции на языке “$\varepsilon - \delta$”.

Решение. Требуется доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\cos x - \cos x_0| < \varepsilon.$$
Преобразуем $|\cos x - \cos x_0|$ так, чтобы в результате преобразования появился сомножитель $|x - x_0|$ и тогда мы смогли бы найти нужное нам δ:
$$|\cos x - \cos x_0| \begin{array}{l} = \left|-2\sin\dfrac{x-x_0}{2}\sin\dfrac{x+x_0}{2}\right| \leqslant \\ \leqslant 2\dfrac{|x-x_0|}{2}1 = |x - x_0| < \varepsilon. \end{array}$$
Если взять δ равным ε, то $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$, а это и доказывает непрерывность функции $y = \cos x$ при любом действительном x.

2.5. Доказать непрерывность функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Требуется доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что
$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |\sqrt[3]{x} - 1| < \varepsilon.$$
Преобразуем $|\sqrt[3]{x} - 1|$:

$$|\sqrt[3]{x}-1|=\left|\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right|=$$
$$=\frac{|x-1|}{(\sqrt[3]{x}+1/2)^2+3/4}\leqslant\frac{|x-1|}{3/4}<\varepsilon.$$

При $\delta=\dfrac{3}{4}\varepsilon$ будем иметь $|x-1|<\delta\Rightarrow|\sqrt[3]{x}-1|<\varepsilon$. Это и доказывает непрерывность функции $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $x_0=1$. Аналогично можно доказать непрерывность данной функции $\forall x\in R$.

2.6. Доказать непрерывность функции

$$f(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\,, \text{ если } x\neq 0,\\ 0\,, \text{ если } x=0,\end{cases}$$

в точке $x_0=0$.

Решение. Требуется доказать, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что

$$|x|<\delta\Rightarrow\left|x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right|<\varepsilon.$$

Воспользуемся тем, что $\left|\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. Тогда $\left|x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right|\leqslant$ $\leqslant|x|\dfrac{\pi}{2}<\varepsilon$. Неравенство будет выполняться при $\delta=\dfrac{2\varepsilon}{\pi}$.

В заданиях 2.7 – 2.9 требуется найти область определения функции и обосновать непрерывность каждой из них в своей области определения.

2.7. $y=2^{\cos x}$.

Решение. $D(y)=(-\infty,+\infty)$.

Функция $y=2^{\cos x}$ является композицией двух простейших элементарных функций $y=2^z$, $z=\cos x$. При этом $z=\cos x$ непрерывна $\forall x\in R$, $y=2^z$ непрерывна $\forall z\in R$. По теореме о непрерывности сложной функции (п. 1.6.) заданная функция $y=2^{\cos x}$ непрерывна на всей числовой оси.

2.8. $y=\sqrt{\arcsin\ln x}$.

Решение. Область определения функции найдем из условия

$$\arcsin(\ln x)\geqslant 0\Leftrightarrow 0\leqslant\ln x\leqslant 1\Leftrightarrow 1\leqslant x\leqslant e.$$

Итак, $D(y)=[1,e]$.

Заданная функция является композицией трех простейших элементарных функций: $y=\sqrt{z}$, $z=\arcsin u$, $u=\ln x$.

При любом $x\in[1,e]$ каждая из этих функций непрерывна в соответствующей точке своей области определения и, следовательно, сложная функция тоже непрерывна $\forall x\in[1,e]$.

2.9. $y = \dfrac{x}{\ln x} + \sqrt{2x - x^2}$.

Решение. Функция определена при выполнении условий: $x > 0$, $\ln x \neq 0$, $2x - x^2 \geqslant 0$. Область определения будет решением системы неравенств:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \\ 2x - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \in [0, 2] \end{cases} \Rightarrow D(y) = (0, 1) \cup (1, 2].$$

Заданная функция непрерывна в любой точке области определения по теореме о непрерывности суммы непрерывных функций. Первое слагаемое непрерывно $\forall x \in D(y)$ по теореме о непрерывности частного непрерывных функций. Второе слагаемое является непрерывной функцией $\forall x \in D(y)$ по теореме о непрерывности сложной функции.

3. Перечень задач для самостоятельной работы

В заданиях 3.1 – 3.7 доказать непрерывность функций в указанных точках, используя одно из определений непрерывной функции.

3.1. $y = ax + b$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.
3.2. $y = ax^2 + bx + c$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.
3.3. $y = 2x^3 + x^2 + 5$, $x_0 = -1$.
3.4. $y = \sqrt{x + 7}$, $x_0 = 2$.
3.5. $y = \sin x$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.
3.6. $y = a^x$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.
3.7. $y = \ln x$, $x_0 = 1$.

В заданиях 3.8 – 3.14 найти область определения функций и обосновать непрерывность каждой из них в своей области определения.

3.8. $y = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 1}}$.

3.9. $y = 5^{3x - x^2}$.

3.10. $y = \dfrac{3}{4 - x^2} + \lg(x^3 - x)$.

3.11. $y = \lg(\sin x)$.

3.12. $y = \dfrac{1}{\ln(x^2 - 2x + 1)}$.

3.13. $y = \arccos(1 - 2x)$.

3.14. $y = \arcsin(x - 2) + \sqrt{\dfrac{2 - x}{\sqrt{1 + x}}}$.

3.15. Доказать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то функция $y = |f(x)|$ тоже будет непрерывна в точке x_0.

3.16. Доказать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на множестве $[a, +\infty)$ и существует конечный $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, то эта функция ограничена на $[a, +\infty)$.

3.17. Постройте пример разрывной в некоторой точке функции, квадрат которой является непрерывной функцией.

Тема 7. Техника вычисления пределов

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. *Как найти* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *если* $f(x)$ *непрерывная в* $(\cdot)x_0$ *функция?*

По определению функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это означает, что при нахождении предела непрерывной функции достаточно вычислить значение этой функции в точке x_0. Напомним, что любая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

Например,

$$\lim_{x\to 2} \lg\sin\frac{\pi x}{4} = \lg\sin\frac{\pi}{2} = \lg 1 = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg} e^x = \operatorname{arctg} e^0 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Функция $y = \lg\sin\frac{\pi x}{4}$ непрерывна в точке $x_0 = 2$, а функция $y = \operatorname{arctg} e^x$ непрерывна в точке $x_0 = 0$ как суперпозиции непрерывных в соответствующих точках простейших элементарных функций.

1.2. *Как найти* $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$*?*

Указанные пределы при условии существования $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ находятся на основании теоремы о пределе суммы, произведения и частного. В частности, если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = f(x_0)+g(x_0),$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = f(x_0)\cdot g(x_0),$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \text{ при } g(x_0)\neq 0.$$

Например,

$$\lim_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}+\cos\pi x\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\cos\pi = 1-1 = 0,$$
$$\lim_{x\to 0}(e^{\sin x}\cdot\arccos x) = e^{\sin 0}\cdot\arccos 0 = e^0\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{8-1}{4-1} = \frac{7}{3}.$$

1.3. Перечислить теоремы, на основании которых $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\alpha(x)}=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{U(x)}{\alpha(x)}=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{U(x)}=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{U(x)}=0$, где $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=C\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}U(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\alpha(x)}\left(\dfrac{C}{0}\right)=\infty$ по теореме, которая утверждает, что величина, обратная бесконечно малой при $x\to x_0$, является бесконечно большой при $x\to x_0$.

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{U(x)}{\alpha(x)}\left(\dfrac{\infty}{0}\right)=\lim\limits_{x\to x_0}U(x)\cdot\dfrac{1}{\alpha(x)}=(\infty\cdot\infty)=\infty$, так как произведение двух бесконечно больших при $x\to x_0$ величин есть величина бесконечно большая при $x\to x_0$.

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{U(x)}\left(\dfrac{C}{\infty}\right)=0$ по теореме, утверждающей, что величина, обратная бесконечно большой при $x\to x_0$, является бесконечно малой при $x\to x_0$ величиной.

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{U(x)}\left(\dfrac{0}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\dfrac{1}{U(x)}=(0\cdot 0)=0$, так как произведение двух бесконечно малых при $x\to x_0$ величин есть величина бесконечно малая при $x\to x_0$.

Итак:

$$\frac{C}{0}\to\infty,\quad \frac{\infty}{0}\to\infty,\quad \frac{C}{\infty}\to 0,\quad \frac{0}{\infty}\to 0.$$

1.4. Что можно сказать о $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{U(x)}{V(x)}$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$, $U(x)$ и $V(x)$ – бесконечно большие при $x \to x_0$?

К выражениям $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ и $\dfrac{U(x)}{V(x)}$ перечисленные выше теоремы при $x \to x_0$ неприменимы. Такие выражения принято называть неопределенными выражениями соответственно вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Например, $\dfrac{x^3-8}{x-2}$ – неопределенное выражение вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ при $x \to 2$; $\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$ – неопределенное выражение вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ при $x \to 1+0$.

Для нахождения пределов вида

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \left(\frac{0}{0}\right) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{U(x)}{V(x)} \left(\tfrac{\infty}{\infty}\right)$$

нужно знать специальные приемы, которые будут рассмотрены при решении задач.

1.5. Что можно сказать о произведении бесконечно малой при $x \to x_0$ величины на ограниченную в окрестности точки x_0 функцию?

Такое произведение является бесконечно малой при $x \to x_0$ величиной, то есть

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) \cdot f(x) = 0,$$

если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, а $|f(x)| \leqslant M$ в некоторой окрестности точки x_0. Например, $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x} = 0$, несмотря на то, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ не существует.

1.6. В каком случае произведение двух функций представляет собой неопределенное выражение?

Только в одном случае – когда одна из функций является бесконечно малой при $x \to x_0$, другая бесконечно большой. В этом случае при $x \to x_0$ произведение $\alpha(x) \cdot U(x)$ называют неопределенным выражением вида $(0 \cdot \infty)$.

Например, произведение $x \cdot \lg x$ является при $x \to 0+$ неопределенным выражением вида $(0 \cdot \infty)$.

1.7. Что можно сказать о $\lim\limits_{x \to x_0} (U(x) + V(x))$, если $U(x)$ и $V(x)$ – бесконечно большие при $x \to x_0$?

Если $U(x)$ и $V(x)$ – бесконечно большие одного знака, то их сумма тоже будет бесконечно большой величиной того же знака.

Если же $U(x)$ и $V(x)$ являются при $x \to x_0$ бесконечно большими разных знаков, тогда их сумма представляет собой неопределенное выражение вида $(\infty - \infty)$. Например, $\left(\frac{1}{x} + \lg x\right)$ – неопределенное выражение вида $(\infty - \infty)$ при $x \to 0+$; выражение $\left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right)$ является неопределенным выражением вида $(\infty - \infty)$ при $x \to \frac{\pi}{2}$.

1.8. Как найти предел степенно-показательной функции?

Степенно-показательной называется функция вида

$$y = (f(x))^{g(x)}.$$

Эта функция определена при $f(x) > 0$, $f(x) \neq 1$ и произвольной $g(x)$. Чтобы иметь право такую функцию отнести к элементарным, ее принято записывать в виде

$$y = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x) \ln f(x)}.$$

В случае, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, будем иметь

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)} =$$
$$= e^{g(x_0)\ln f(x_0)} = (f(x_0))^{g(x_0)} \text{ при условии, что } f(x_0) > 0.$$

Например, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} (\sin x)^{\cos 2x} = \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\cos\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

1.9. В каких случаях $(f(x))^{g(x)}$ будет при $x \to x_0$ неопределенным выражением?

Так как $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, неопределенность при $x \to x_0$ будет иметь место в тех случаях, когда произведение $g(x)\ln f(x)$ будет неопределенным выражением вида $(0\cdot\infty)$. Такая ситуация будет иметь место, если

1) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0,\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0;$
2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0,\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty;$
3) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty,\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1.$

Итак, при вычислении пределов степенно-показательных функций могут встретиться неопределенные выражения трех видов: (0^0); (∞^0); (1^∞).

Например,

x^x – неопределенное выражение вида (0^0) при $x \to 0+$;

$\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)^{x-1}$ – неопределенное выражение вида (∞^0) при $x \to 1-0$;

$(\cos x)^{1/x}$ – неопределенное выражение вида (1^∞) при $x \to 0$.

1.10. На основании вышеизложенного перечислите все возможные неопределенные выражения

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} U(x) = \infty$,

$$\lim_{x\to x_0} V(x) = \infty, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = 1.$$

Тогда неопределенными при $x \to x_0$ будут следующие выражения:

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\left(\frac{0}{0}\right), \quad \frac{U(x)}{V(x)}\left(\frac{\infty}{\infty}\right), \quad U(x)\cdot\alpha(x)(\infty\cdot 0), \qquad (\alpha(x))^{\beta(x)}(0^0),$$

$$U(x)-V(x)(\infty-\infty), \quad (U(x))^{\alpha(x)}(\infty^0), \qquad (f(x))^{U(x)}(1^\infty).$$

Заметим, что все вышесказанное имеет место и при $x \to \infty$. Поэтому, в частности, приведенные теоремы можно использовать и при нахождении предела числовой последовательности.

На основании изложенного выше рекомендуется следующий порядок нахождения предела функции:

1. Если заданная функция непрерывна в $(\cdot)x_0$, нахождение предела сводится к вычислению значения функции в $(\cdot)x_0$.

2. Если при подстановке значения x_0 в выражение функции оказалось, что имеет место одна из ситуаций, которые рассмотрены в п. 1.3, 1.5 и 1.6, нужно воспользоваться соответствующими теоремами о пределах и свойствами бесконечно малых и бесконечно больших величин.

3. Если оказалось, что при $x \to x_0$ имеет место неопределенное выражение (п. 1.4, 1.6, 1.7, 1.9), следует, установив вид неопределенности, найти специальный прием, позволяющий, как принято говорить, раскрыть данное неопределенное выражение. Специальные приемы раскрытия неопределенностей будут рассмотрены при решении задач.

2. Решение задач

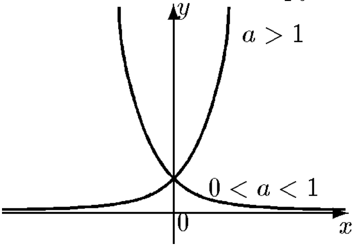
Приступая к решению задач на вычисление пределов, следует помнить предельные значения простейших элементарных функций:

1. Степенная функция

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty, n\in N, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ при } n \text{ четном}, \\ -\infty \text{ при } n \text{ нечетном}, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty \text{ при } \alpha > 0, \\ 0 \text{ при } \alpha < 0. \end{cases}$$

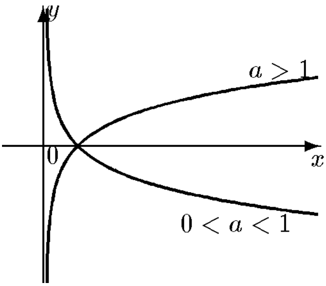
2. Показательная функция



$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{при } a > 1, \\ 0 & \text{при } 0 < a < 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{при } a > 1, \\ +\infty & \text{при } 0 < a < 1. \end{cases}$$

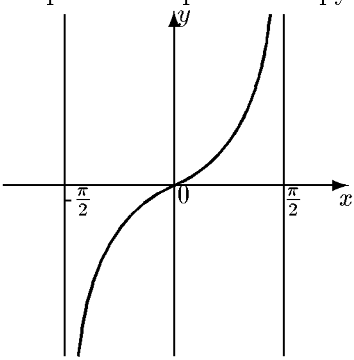
3. Логарифмическая функция

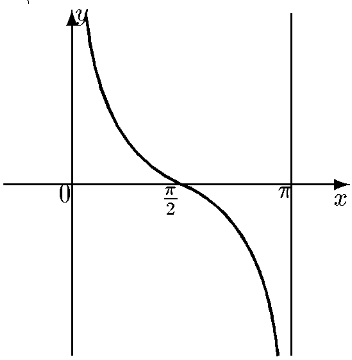


$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{при } a > 1, \\ -\infty & \text{при } 0 < a < 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0+0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{при } a > 1, \\ +\infty & \text{при } 0 < a < 1. \end{cases}$$

4. Тригонометрические функции





$y = \operatorname{tg} x$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$$

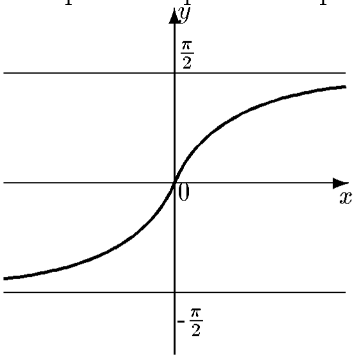
$y = \operatorname{ctg} x$

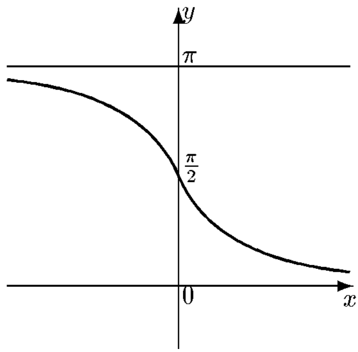
$$\lim_{x\to0+} \operatorname{ctg} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pi-0} \operatorname{ctg} x = -\infty$$

Пределы тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ при $x \to \pm\infty$ не существуют.

5. Обратные тригонометрические функции





$$y = \operatorname{arctg} x$$
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

$$y = \operatorname{arcctg} x$$
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$$

2.1. Нахождение пределов в случае отсутствия неопределенности

В примерах 1 – 19 требуется найти пределы заданных функций, используя понятие непрерывности функции, теоремы о пределах или свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 1} \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right) = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \ln 1 = 0.$ (п. 1.1)

Использована непрерывность функции в точке $x = 1$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0} \cos x \cdot e^{\sin \pi x} = \cos 0 \cdot e^{\sin 0} = 1 \cdot e^0 = 1.$

Использована теорема о пределе произведения и непрерывность перемножаемых функций. (п. 1.2)

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 4} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 5x + 6)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2 + 3x - 4)} = \dfrac{0}{6} = 0.$

Использована теорема о пределе частного.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 4} \left(\dfrac{2}{0}\right) = \infty.$

Использовали то, что величина, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой. (п. 1.3)

Пример 5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 5x}{\cos 2x} = \dfrac{\sin\frac{5\pi}{2}}{\cos\pi} = \dfrac{1}{-1} = -1.$ (п. 1.2)

Пример 6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 5x}{\cos 2x} = \dfrac{\sin\frac{5\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\sqrt{2}/2}{0}\right) = \infty.$ (п. 1.3)

Пример 7. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{x} \left(\dfrac{-\infty}{0}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0+} \ln x \cdot \dfrac{1}{x}(-\infty \cdot +\infty) = -\infty.$ (п. 1.3)

Пример 8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3-x}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} \left(\dfrac{2}{\infty}\right) = 0.$ (п. 1.3)

Использовали то, что величина, обратная бесконечно большой, является бесконечно малой.

Пример 9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} \left(\dfrac{0}{\infty}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 1} (1-x) \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} (0 \cdot 0) = 0.$ (п. 1.3)

Пример 10. $\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{2-x}{\lg(3-x)} \left(\dfrac{-1}{-\infty}\right) = 0.$ (п. 1.3)

Пример 11. $\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{3-x}{\lg(3-x)} \left(\dfrac{+0}{-\infty}\right) = 0.$ (п. 1.3)

Пример 12. $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\dfrac{\pi}{x} = 0.$ (п. 1.5)

Использована теорема о пределе произведения бесконечно малой величины на ограниченную функцию.

Пример 13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}(1-\cos x) = 0,$

так как при $x\to\infty$ $\dfrac{1}{x} \to 0$, $|1-\cos x| \leqslant 2$. (п. 1.5)

Пример 14. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x = +\infty.$

Использовано то, что произведение бесконечно большой величины на функцию, имеющую конечный отличный от 0 предел ($\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$), есть величина бесконечно большая.

Пример 15. $\lim\limits_{x\to\infty} x(2+\sin x) = \infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$, а $(2+\sin x)$ – ограниченная функция, причем $1 \leqslant 2+\sin x \leqslant 3$.

Пример 16. $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \sin x.$

Этот предел не существует, несмотря на то, что здесь $\sin x$ тоже ограниченная функция, но, в отличие от функции $2+\sin x$, которая $\forall x$ отлична от 0, функция $\sin x$ при $x\to\infty$ обращается в 0 во всех точках вида $x = k\pi$.

Пример 17. $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\dfrac{1}{x-1}-\lg(x-1)\right)=+\infty-(-\infty)=+\infty.$ По теореме о сумме двух бесконечно больших одного знака. (п. 1.8)

Пример 18. $\lim\limits_{x\to\pi-0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{\sin x}\right)(-\infty-(+\infty))=-\infty.$

Пример 19. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5^x+4}{3^x+2}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$ при $a>1$, то в данном случае при $x\to+\infty$ дробь $\dfrac{5^x+4}{3^x+2}$ будет представлять собой неопределенное выражение вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Если же $x\to-\infty$, то $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5^x+4}{3^x+2}=\dfrac{0+4}{0+2}=\dfrac{4}{2}=2.$

2.2. Банк задач для самостоятельной работы

В заданиях 1 – 18 требуется найти пределы заданных функций:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\log_2(x^2+3x)$; 2. $\lim\limits_{x\to\pi}x\cdot 2^{\cos x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x+4}}$; 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}{\lg\frac{10}{x}}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+x-6}$; 6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2+x-6}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\ln x}$; 8. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\ln(x-1)}{x-1}$;

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}$; 10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}x}$;

11. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1+\cos x}{\ln x}$; 12. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1-\cos x}{\ln x}$;

13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg}2x}$; 14. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\operatorname{ctg}(2x-\pi)}$;

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{arctg}x-\lg x)$; 16. $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\lg x}\right)$;

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\sin x}{x}$; 18. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{x}}{\ln x}$.

19. Объяснить, почему $\lim\limits_{x\to\infty}x(2+\cos x)=\infty$, а $\lim\limits_{x\to\infty}x(1+\cos x)$ не существует.

20. Будут ли бесконечно большими следующие неограниченные функции:

1) $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ при $x\to 0$;
2) $f(x)=x\,\mathrm{arctg}\,x$ при $x\to\infty$;
3) $f(x)=\sin x\cdot\lg x$ при $x\to+\infty$;
4) $f(x)=(2+\sin x)\lg x$ при $x\to+\infty$.

Ответ: 1) и 3) – нет; 2) и 4) – да.

2.3. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right)$

Рассмотрим несколько специальных приемов, которые используются при раскрытии неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Разложение числителя и знаменателя на множители

Напомним, что если число x_1 является корнем многочлена $P_n(x)$, то этот многочлен можно представить в виде
$$P_n(x)=(x-x_1)Q_{n-1}(x).$$
В частности, если x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, то
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-4}\left(\frac{0}{0}\right)$. Найдем корни трехчленов и разложим числитель и знаменатель на множители. Тогда
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{3(x-2)(x+2/3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{3(x+2/3)}=-\frac{1}{8}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3-2x+1}\left(\frac{0}{0}\right)$. По формуле для разности кубов
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$
Чтобы разложить на множители знаменатель, разделим столбиком (x^3-2x+1) на разность $(x-1)$:
$$\begin{array}{rrr|l}
x^3 & -2x & +1 & x-1 \\
\underline{x^3-x^2} & & & \overline{x^2+x-1} \\
x^2 & -2x & +1 & \\
\underline{x^2} & \underline{-\ x} & & \\
 & -\ x & +1 & \\
 & \underline{-\ x} & \underline{+1} & \\
 & & 0 &
\end{array}$$

В результате будем иметь

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x-1)}=\frac{3}{1}=3.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+x^3+2x-4}{x^2+4x+4}$. Разделим числитель на разность $(x-(-2))=x+2$:

$$\begin{array}{llll|l}
x^4+ & x^3+ & 2x- & 4 & x+2 \\ \cline{5-5}
\underline{x^4+2x^3} & & & & x^3-x^2+2x-2 \\
 & -x^3+ & 2x & & \\
 & \underline{-x^3-2x^2} & & & \\
 & & 2x^2+2x & & \\
 & & \underline{2x^2+4x} & & \\
 & & -2x & -4 & \\
 & & \underline{-2x} & \underline{-4} & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

Тогда

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+x^3+2x-4}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^3+x^2+2x-2)}{(x+2)^2}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x+2}=\frac{-18}{0}=-\infty.$$

Преобразование, позволяющее использовать формулы:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2,$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3,$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

Пример 1. Найти

$$\lim_{x\to 3}\frac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-2x-3}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(1-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x-2})}{(x^2-2x-3)(1+\sqrt{x-2})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1-(x-2)}{(x-3)(x+1)(1+\sqrt{x-2})}=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+1)(1+\sqrt{x-2})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{(x+1)(1+\sqrt{x-2})}=\frac{-1}{4\cdot 2}=-\frac{1}{8}.$$

Пример 2. Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2+\sqrt{5-x})}{(2-\sqrt{5-x})(2+\sqrt{5-x})(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2+\sqrt{5-x})}{(4-(5-x))(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2+\sqrt{5-x})}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2+\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{2+2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Пример 3. Найти

$$\lim_{x\to -8} \frac{2+\sqrt[3]{x}}{x^2+7x-8} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -8} \frac{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(x^2+7x-8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} =$$

$$= \lim_{x\to -8} \frac{8+x}{(x-1)(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} =$$

$$= \lim_{x\to -8} \frac{1}{(x-1)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} = \frac{1}{-9\cdot 12} = -\frac{1}{108}.$$

Первый замечательный предел и его следствия

Первым замечательным пределом принято называть:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (1) \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1, \qquad (2)$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Предел замечателен тем, что он позволяет сделать вывод: для значений аргумента, близких к 0, величина синуса практически не отличается от величины своего аргумента.

Подчеркнем (это важно!), что предел отношения синуса некоторого аргумента к своему аргументу равен 1, лишь когда аргумент синуса стремится к 0.

Например, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$, $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{\pi} = 0$,

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x_0}{x_0}$ $(x_0 \neq 0)$ и только $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \left(\frac{0}{0}\right) = 1$.

Заметим, что необходимо иметь навык использования первого замечательного предела не только в записи (1), но и в записи (2). Следует понимать, что если, например, $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x} = = \frac{0}{\pi} = 0$ (это не первый замечательный предел), то $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} = 1$ – это первый замечательный предел (2), где $\alpha(x) = (\pi - x)$ – бесконечно малая при $x \to \pi$ величина.

На конкретных примерах покажем, как формально просто используется замечательный предел при раскрытии тригонометрических неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = 5.$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{3}}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\cdot\frac{x}{3}}=6$, так как

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}=1 \text{ и } \lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}=1.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2 4x}{x^2}=$

$$=2\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2 16=32.$$

Использована формула $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ и первый замечательный предел.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x-\sin 2x}{x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin 2x\cos 4x}{x^2}=$

$$=4\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\cos 4x}{x}=\infty,$$

так как $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 4x}{x}\left(\dfrac{1}{0}\right)=\infty$.

Пример 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\frac{1}{4}\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{4},$$

так как $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$, а $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\dfrac{1}{2}$.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos 6x}}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{2\sin^2 3x}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to0}\frac{x}{|\sin 3x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{3|\sin 3x|}{3x}}=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \text{при } x\to0+0,\\ -\dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \text{при } x\to0-0.\end{cases}$$

Обратите внимание на то, что потеря знака модуля при извлечении $\sqrt{\sin^2 3x}$ привела бы при $x\to0-0$ к неверному ответу.

Пример 7. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

В этом примере аргумент у $\sin x$ не является бесконечно малой величиной и поэтому, чтобы использовать первый замечательный предел, воспользуемся тем, что $\sin x=\sin(\pi-x)$. Тогда

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}\frac{1}{\pi+x}=\frac{1}{2\pi}.$$

Здесь $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1$, так как $\alpha(x)=(\pi-x)$ – бесконечно малая при $x\to\pi$.

Пример 8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\pi-6x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2(\frac{1}{2}-\sin x)}{\pi-6x}=$

$$=2\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\frac{\pi}{6}-\sin x}{\pi-6x}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}+x}{2}}{\pi-6x}=$$

$$=4\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\frac{\pi-6x}{12}}{12\frac{\pi-6x}{12}}\cos\frac{\pi+6x}{12}=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\frac{\pi-6x}{12}}{\frac{\pi-6x}{12}}=1$, а $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos\dfrac{\pi+6x}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{2(\frac{\pi}{2}-x)}=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x}=\frac{1}{2},$$

так как здесь $\alpha(x)=\dfrac{\pi}{2}-x$ – бесконечно малая при $x\to\frac{\pi}{2}$.

Примеры 10 – 12 решены с использованием следствий первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1.$$

Пример 10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cdot\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}}{5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}=\dfrac{2}{5}$.

Пример 11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7x-\operatorname{arctg}2x}{5x+\arcsin 3x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7-\frac{\operatorname{arctg}2x}{x}}{5+\frac{\arcsin 3x}{x}}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{7-2\cdot\frac{\operatorname{arctg}2x}{2x}}{5+3\cdot\frac{\arcsin 3x}{3x}}=\frac{7-2}{5+3}=\frac{5}{8}.$$

Пример 12. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin 3x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-\operatorname{tg}(\pi-x)}{\sin(3\pi-3x)}=$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{-\frac{\operatorname{tg}(\pi-x)}{\pi-x}\cdot(\pi-x)}{\frac{\sin(3\pi-3x)}{3\pi-3x}\cdot3(\pi-x)}=-\frac{1}{3}.$$

Введение новой переменной

Во многих случаях, чтобы найти $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, имеет смысл сделать замену $x=g(t)$, при этом если $\lim\limits_{t\to t_0}g(t)=x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=$ $=\lim\limits_{t\to t_0}f(g(t))$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{\sin 6x}\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Введем новую переменную $t=\pi-x$ или $x=\pi-t$. Очевидно, при $x\to\pi$ переменная $t\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(5\pi-5t)}{\sin(6\pi-6t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{-\sin 6t}=-\frac{5}{6}.$$

Использованы формулы приведения и первый замечательный предел.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}{x-1}\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Введем переменную $t=x-1$ или $x=t+1$. При $x\to 1$ переменная $t\to 0$ и тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}(t+1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}}{t}=-\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi t}{2}}\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Введем переменную $t=\sqrt[12]{x}\Rightarrow x=t^{12}$. При $x\to 1$ переменная $t\to 1$ и тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^4-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{4}{3}.$$

2.4. Банк задач для самостоятельной работы

Найти пределы:	Ответы:
1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$,	$\dfrac{4}{5}$;
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^3+1}$,	-1;
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x}$,	2;
4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^3+x-2}{x^4-8x^2+16}$,	∞;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,	$\dfrac{1}{2}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$,	$\dfrac{1}{3}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, 3;

8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{1+x}}$, 0;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$, $\dfrac{\alpha}{\beta}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x-\sin 2x}{x}$, 6;

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 8x-\cos 2x}{x}$, 0;

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 4x}}{x}$, $2\sqrt{2}$ при $x\to 0+0$; $-2\sqrt{2}$ при $x\to 0-0$;

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$;

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$, ∞;

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+2\operatorname{arctg} x}{5x-\arcsin x}$, $\dfrac{5}{4}$;

16. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$, $-\dfrac{3}{2}$;

17. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$, $\dfrac{1}{2\pi}$;

18. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{x-\frac{\pi}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$, 2;

19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\operatorname{ctg} x}$, 1;

20. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-2x)}{\cos x}$, 2.

2.5. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

При нахождении $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены, используется метод деления числителя и знаменателя на x^k, где k – наибольшее из чисел m и n. Аналогичный прием используется и при нахождении пределов иррациональных неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-3}{x^3+x^2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^3. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x-3}{x^3+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{1+\frac{1}{x}}=2,$$

так как $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{1}{x^3}$ – бесконечно малые величины при $x\to\infty$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+100x}{x^5+1}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^5. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+100x}{x^5+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{100}{x^4}}{1+\frac{1}{x^5}}=\frac{0}{1}=0.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^2+10x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^3. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{x^2+10x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}}=\frac{2}{0}=\infty.$$

Сравнивая результаты, полученные в примерах 1 – 3, можно сделать следующий вывод:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_n}\,, \text{ если } n=m,\\ \quad 0\,, \text{ если } n<m,\\ \infty\,, \text{ если } n>m\end{cases}$$

(a_n и b_n – коэффициенты при x^n многочленов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ соответственно).

Этот вывод позволяет в простейших случаях находить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ без каких-либо преобразований.

Например, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x-1}{x^4+1}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^3-2)}{x^3-1}=\infty$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{5x^3+2}=\frac{1}{5}.$$

Перейдем к решению более сложных примеров.

Пример 4. Найти
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Решение. Разделим все слагаемые числителя и знаменателя на x^{10}:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^{10}+(1+\frac{2}{x})^{10}+\ldots+(1+\frac{100}{x})^{10}}{1+(\frac{10}{x})^{10}}=\frac{100}{1}=100.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{4x+1}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на $\sqrt{x}$:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{4x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}.$$

Заметим, что в этом примере наивысшие степени переменной в числителе и знаменателе равны (и там, и там это $\frac{1}{2}$), поэтому ответ оказался равным отношению коэффициентов при $\sqrt{x}$.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{\sqrt{7+4x^6}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение.

1) Пусть $x\to+\infty$. Разделим числитель и знаменатель на x^3:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\sqrt{7+4x^6}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{7+4x^6}}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{x^6}+4}}=\frac{1}{2}.$$

2) Пусть $x\to-\infty$.
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{\sqrt{7+4x^6}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{7+4x^6}}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{\frac{7}{x^6}+4}}=-\frac{1}{2}.$$

Знак $(-)$ перед корнем объясняется тем, что при внесении x^3 под корень четной степени при $x<0$ теряется отрицательный знак дроби.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^4-1}+x^2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^4-1}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^6}}}{\sqrt{\frac{x^4-1}{x^4}}+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n}\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{n^6+1}{n^6}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1)^2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}}}=\frac{4}{1}=4.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1+n}{2}\cdot n.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+n)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

Решение. Напомним, что $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$. Разделим почленно числитель на знаменатель:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)!}{(n+3)!}+\frac{(n+1)!}{(n+3)!}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right)=0.$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+n!}{(n+2)!-n!}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на $(n+2)!$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+n!}{(n+2)!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n!}{(n+2)!}}{1-\frac{n!}{(n+2)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{1-\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=1.$$

Пример 12. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+1}{3^n-1}\,\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на 3^n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{3^n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{2}{3})^n + \frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3^n}} = 0,$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0 \;\left(a = \dfrac{2}{3} < 1\right)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{\infty} = 0$.

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x+1}{3^x-1}$.

Решение.

1) Пусть $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x+1}{3^x-1}\,\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{3^x}}{1-\frac{1}{3^x}} = 1.$$

2) Пусть $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^x+1}{3^x-1} = -1$, так как $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x = 0$ $(a = 3 > 1)$.

Пример 14. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{2x^2}{x^2+1}}$

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2x^2}{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}}} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

На последнем этапе решения использована непрерывность показательной функции.

2.6. Банк задач для самостоятельной работы

Найти пределы:	Ответы:
1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+x-3}{1-7x^2}$,	$-\dfrac{5}{7}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(x^3+2x)}{x^5-1}$,	0;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^4}+x}$,	∞;
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$,	1;
5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,	±1;

6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{\sqrt{25x^6+1}+7}$, $\quad \pm\dfrac{1}{5}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty} 4^{\frac{x+3}{2x-5}}$, $\quad 2$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(2x+1)(3x+1)\ldots(10x+1)}{x^{10}+1}$, $\quad 10!$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+1}}{n+\sqrt{n^2-7}}$, $\quad 1$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$, $\quad 0$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)!+(n+1)!}{(n+3)!-(n+1)!}$, $\quad 1$;

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n-1}{3n+2}\right)^n$, $\quad \infty$;

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+n+1}{3n^2+3n}\right)^n$, $\quad 0$;

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{16n-3}{n+1}\right)^{\frac{n}{2n-1}}$, $\quad 4$;

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+5^n}{3^n+4^n}$, $\quad \infty$.

2.7. Раскрытие неопределенностей вида $(\infty-\infty)$ *и* $(0\cdot\infty)$

Каждую из неопределенностей $(\infty-\infty)$ и $(0\cdot\infty)$ стараются свести к неопределенностям $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Далее используют соответствующий способ раскрытия неопределенного выражения полученного вида.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)(\infty-\infty)$.

Решение. Приведем разность к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=-\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{x^3-1}=-\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)(\infty-\infty)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}.$$

Осталось воспользоваться первым замечательным пределом

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{x^2}{4}}{\frac{\sin x}{x}\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=0.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\infty-\infty)$.

Решение. Умножим и разделим заданное выражение на сумму $(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2}{\infty}=0.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})(\infty-\infty)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2};$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = -\infty\cdot(+\infty) = -\infty.$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{\pi}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{\pi}{x}(\infty\cdot 0) = \pi\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\left(\frac{0}{0}\right) = \pi.$$

Использован первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} = 1 \qquad \left(\alpha(x) = \frac{\pi}{x}\to 0 \quad \text{при } x\to\infty\right).$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}\left(\frac{0}{0}\right)$.

Введем переменную $t = 1-x$. При $x\to 1$ переменная $t\to 0$.

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{ctg}\frac{\pi(1-t)}{2}} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\pi}{2}t} = \frac{\pi}{2}$,

так как $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t} = 1$ (следствие первого замечательного предела).

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0+0}(\lg\sin x - \lg\operatorname{tg}10x)$.

Решение. Воспользуемся тем, что $\lg\sin x - \lg\operatorname{tg}10x =$ $= \lg\frac{\sin x}{\operatorname{tg}10x}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0+0}(\lg\sin x - \lg\operatorname{tg}10x) = \lg\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg}10x}\right) = \lg\frac{1}{10} = -1.$$

Использованы непрерывность логарифмической функции и первый замечательный предел.

2.8. Банк задач для самостоятельной работы

Найти пределы:	Ответы:
1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}\right)$,	-1;
2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$,	∞;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})$,	0;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})$, ∞;

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+5}-x)$, $\frac{5}{2}$;

6. $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+5}-x)$, $-\infty$;

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$, 1;

8. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$, 1;

9. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (1-2x)\operatorname{tg}\pi x$, $\frac{2}{\pi}$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$, π;

11. $\lim\limits_{x\to 0+0} (\lg\sin 10x-\lg x)$, 1.

2.9. Раскрытие неопределенностей вида (1^∞)

Неопределенности вида (1^∞) раскрываются с помощью второго замечательного предела, который можно записывать двумя способами:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad (1) \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \quad (2)$$

Напомним, что второй замечательный предел получен на основании равенства

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e, \quad e\simeq 2.718281828459045\ldots,$$

полученного в теории последовательностей.

Особенность пределов (1) и (2) состоит в том, что в основании степени и в (1), и в (2) к числу 1 прибавляется бесконечно малая величина, а в показателе степени стоит бесконечно большая, в точности обратная той, которая прибавляется к 1. В результате имеет место неопределенное выражение (1^∞). Это наблюдение позволяет записать (1) и (2) в виде

$$\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e, \quad \text{где } \alpha(x)\to 0 \text{ при } x\to x_0. \qquad (3)$$

Запись (3) позволяет формально достаточно просто использовать второй замечательный предел при раскрытии неопределенностей вида (1^∞).

Перейдем к вычислению пределов.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right]^{5x\cdot\frac{2}{x}} = e^{10}$, так как $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}} = e$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-\frac{3}{x}\cdot 2x} = e^{-6}$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}} = e$.

Использованный при решении примеров прием очень прост: показатель степени умножают и делят на одно и то же выражение, играющее в примере роль $\alpha(x)$. В первом примере $\alpha(x)=5x$, во втором $\alpha(x) = -\dfrac{3}{x}$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{\frac{1}{x}}(1^{\infty}) = \lim_{x\to 0}\left[(1-\sin 2x)^{-\frac{1}{\sin 2x}}\right]^{-\frac{\sin 2x}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1-\sin 2x)^{-\frac{1}{\sin 2x}}\right]^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}} = e^{-2}.$$

Использованы непрерывность степенно-показательной функции и второй и первый замечательные пределы.

При вычислении $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, используют следующий прием:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\left[(1+f(x)-1)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)(f(x)-1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)}.$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}(1^{\infty}) =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin^2 x}{x^2} = -2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Пример 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$.

Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x-2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 1$.

Это означает, что имеет место неопределенность (1^{∞}), и мы имеем право использовать второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-2}-1\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{\frac{3\cdot 2x}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{x-2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=e^{6}.$$

Пример 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+2}\right)^{2x^2-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+3}{x^2+2}-1\right)^{2x^2-x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2+2}\right)^{x^2+2}\right]^{\frac{2x^2-x}{x^2+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=e^{2}.$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{3x-1}\right)^{2x}$.

В этом примере, в отличие от всех предыдущих, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{3x-1}=\dfrac{1}{3}\neq 1$. Это означает, что второй замечательный предел применять нельзя, тем более что заданное выражение никакой неопределенности при $x\to\infty$ не представляет:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{3x-1}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}=\begin{cases}0\,, & \text{если } x\to+\infty,\\ +\infty\,, & \text{если } x\to-\infty.\end{cases}$$

Примеры 8 – 13 решены с помощью следствий второго замечательного предела:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\dfrac{1}{\ln a}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\ln a$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$.

Заметим, что следствие 2 является частным случаем следствия 1, а следствие 4 – частным случаем следствия 3.

Все следствия легко доказываются. Докажем, например, следствие 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\ln a}.$$

Использованы непрерывность логарифмической функции и второй замечательный предел.

Следствия 1 – 4 позволяют раскрывать неопределенные выражения вида $\dfrac{0}{0}$, содержащие логарифмическую и показательную функции.

Пример 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{a+x}{a}}{x}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{x}{a})}{\frac{x}{a}}\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a}$. Использовали следствие 2.

Пример 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\sin x}-1}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\sin x}-1}{\sin x}\dfrac{\sin x}{x}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\sin x}-1}{\sin x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\ln a$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\sin x}-1}{\sin x}=\ln a$ (следствие 3), а $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Пример 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Использовали следствие 4 и первый замечательный предел.

Пример 11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e\cdot(e^{x-1}-1)}{x-1}=e$. Здесь $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}=1$ по следствию 4, роль бесконечно малого аргумента играет разность $(x-1)$ при $x\to 1$. Можно было бы сделать замену $x-1=t$. Тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1.$$

Пример 12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\log_3\sin x}{\cos^2 x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\log_3(1+\sin x-1)}{\cos^2 x}=$
$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\log_3(1+\sin x-1)}{\sin x-1}\dfrac{\sin x-1}{\cos^2 x}=-\dfrac{1}{2\ln 3}$, так как

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\log_3(1+\sin x-1)}{\sin x-1}=\frac{1}{\ln 3}$$

(использовано следствие 1, роль бесконечно малого аргумента играет разность $(\sin x-1)$ при $x\to\frac{\pi}{2}$), а

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{1-\sin^2 x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th} x}{x}$.

Решение. Напомним, что
$\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ – гиперболический синус,
$\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ – гиперболический косинус,

$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ – гиперболический тангенс.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{2x} =$

$$= \lim_{x\to 0} e^{-x} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 1;$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{th} x}{x} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x \cdot \operatorname{ch} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} = 1.$

В результате мы наблюдаем еще одно замечательное совпадение свойств тригонометрических и гиперболических функций:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} = 1,$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{th} x}{x} = 1.$

2.10. Банк задач для самостоятельной работы

Найти пределы:	Ответы:
1. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x+2}{x+5}\right)^{2x}$,	$\dfrac{1}{4}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x+2}{x+5}\right)^{2x}$,	1;
3. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+2}{x+5}\right)^{2x}$,	e^{-6};
4. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$,	e^2;
5. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}\right)^{3x^2}$,	$\begin{cases} 0 & \text{при } x\to+\infty, \\ +\infty & \text{при } x\to-\infty; \end{cases}$
6. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^{x}$,	$\begin{cases} +\infty & \text{при } x\to+\infty, \\ 0 & \text{при } x\to-\infty; \end{cases}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$,	e;
8. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$,	1;
9. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$,	1;
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{2x}-1}{5x}$,	$\dfrac{2}{5}\ln a$;

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$, $\qquad a-b$;

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$, $\qquad 2$;

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3(1+x)}{\sin x}$, $\qquad \dfrac{1}{\ln 3}$;

14. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot(\ln(a+x)-\ln x)$, $\qquad a$;

15. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$, $\qquad e^{-1}$;

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$, $\qquad -\dfrac{1}{2}$;

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$, $\qquad \dfrac{3}{2}$.

Указание. В числителе следует отнять и прибавить 1.

3. Перечень задач для самостоятельной работы

3.1. Задания 1 – 20 предназначены для устного решения. Назовите ответы.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$; $\qquad$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x^2-1}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{3x+1}$; $\qquad$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+10}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$; $\qquad$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{x+1}\right)^{x^2}$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7}{n!}$; $\qquad$ 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+1}{(n+1)!}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$; $\qquad$ 10. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{x}$;

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin x}$; $\qquad$ 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$;

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cos x$; $\qquad$ 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{e^{x^2}}$;

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi x}{2x+1}$; $\qquad$ 16. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{\pi x}{2x+1}$;

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x}{x+5}$; $\qquad$ 18. $\lim\limits_{x\to\infty}\lg\dfrac{10x}{x+5}$;

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1}$; 20. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$.

Ответы: $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{3}$, ∞, 1, ∞, 0, 0, 3, 0, 6, $\frac{2}{3}$, 0, 0, $\frac{\pi}{2}$, 1, 10, 1, $\frac{1}{2}$, ∞.

3.2. Применяя различные методы, найти указанные пределы.

Найти пределы:	Ответы:
1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$,	$\frac{7}{4}$;
2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$,	$\frac{12}{5}$;
3. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$,	∞;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$,	∞;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$,	1;
6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$,	∞;
7. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-4x^2+4x)^{10}}$,	$\frac{3^{20}}{2^{10}}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-4x^2+4x)^{10}}$,	∞;
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$,	$\frac{1}{4}$;
10. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-5x}$,	$\frac{1}{20}$;
11. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{x-8}$,	$\frac{1}{36}$;
12. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$,	-2;
13. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}$,	$\frac{1}{2}$; $-\infty$;
14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$,	1;
15. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$,	$\frac{1}{2}$;

16. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-1})$, $\qquad 1;$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!+10^{10}}{(n+1)!}$, $\qquad 0;$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n \dfrac{\pi n}{3n+1}$, $\qquad 0;$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin 2x}{x}$, $\qquad 0;$

20. $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\sin 2x)$, $\qquad \infty;$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 4x}$, $\qquad \dfrac{7}{4};$

22. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 7x}{\sin 4x}$, $\qquad -\dfrac{7}{4};$

23. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$, $\qquad \cos a;$

24. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$, $\qquad 0;$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$, $\qquad \dfrac{1}{4};$

26. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{x-\frac{\pi}{3}}{1-2\cos x}$, $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{3}};$

27. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x\cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$, $\qquad \dfrac{1}{2};$

28. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\cdot \operatorname{tg} x$, $\qquad 0;$

29. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$, $\qquad 1;$

30. $\lim\limits_{x\to 1} (1+\sin \pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$, $\qquad e^{-1};$

31. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$, $\qquad e^{-2};$

32. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$, $\qquad 0;$

33. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}$, $\qquad e^{x+1};$

34. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin 3x}$, $\qquad \dfrac{1}{3};$

35. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$, $\qquad 0;$

36. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\lg\dfrac{x^2+100}{100x^2+1}\right)$, $\qquad -2;$

37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x}-1}{x}$, 2;

38. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$, 1;

39. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1+\cos x}{e^{x}}$, 0, не существует;

40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^{x}-4^{x}}{x^2+x}$, $\ln\dfrac{5}{4}$;

41. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{1/x}}{5^{1/x}+2}$, 0;

42. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{1/x}+4}{5^{1/x}+2}$, не существует;

43. $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{1+7+13+\ldots+(6n-5)}{n^2+1}$, 3;

44. $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{3+12+48+\ldots+3\cdot 4^{n-1})}{5(4^{n}-2)}$, $\dfrac{1}{5}$;

45. $\lim\limits_{x\to \infty} (2x+1)\ln\dfrac{x+1}{x}$, 2.

Тема 8. Сравнение бесконечно малых (бесконечно больших) величин. Главная часть и порядок бесконечно малой (бесконечно большой) величины

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Какие ситуации возможны в результате раскрытия неопределенных выражений вида $\left(\frac{0}{0}\right)$?

При раскрытии неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ предел может оказаться равен числу, отличному от 0, нулю, бесконечности или вообще может не существовать. Например,

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=0$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\cos x}=\infty$; $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$ не существует.

Объясняется это, как принято говорить, порядком малости бесконечно малых величин, стоящих в числителе и знаменателе.

1.2. Как сравнить порядок малости двух бесконечно малых величин?

Это осуществляется с помощью предела отношения бесконечно малых. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$ и при этом

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k$.

1. Если $k \neq 0$ и $k \neq \infty$, то величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми одного порядка малости при $x \to x_0$. В частном случае, когда $k = 1$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют эквивалентными при $x \to x_0$ и пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

2. Если $k = 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$ ($\alpha(x)$ стремится к нулю "быстрее", чем $\beta(x)$ при $x \to x_0$). Для этого случая принято обозначение $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to x_0$.

3. Если $k = \infty$, то $\beta(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\alpha(x)$, и пишут $\beta(x) = o(\alpha(x))$ при $x \to x_0$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют несравнимыми бесконечно малыми при $x \to x_0$.

В приведенных выше примерах

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{1-x^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha(x) = 1 - x$ и $\beta(x) = 1 - x^2$ – бесконечно малые одного порядка малости при $x \to 1$;

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x} = 0 \Rightarrow \sin^2 x = o(x)$ при $x \to 0$;

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow (1 - \cos x) = o(x)$ при $x \to 0$;

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin \frac{1}{x}}{x}$ не существует $\Rightarrow$ $\alpha(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ и $\beta(x) = x$ – несравнимые при $x \to 0$ бесконечно малые.

1.3. Перечень основных эквивалентных бесконечно малых величин среди простейших элементарных функций

Этот перечень следует из первого замечательного предела и его следствий и следствий второго замечательного предела.

Напомним, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Это означает, что при $x \to 0$

$\sin x \sim x, \qquad \operatorname{tg} x \sim x, \qquad \arcsin x \sim x,$

$\operatorname{arctg} x \sim x, \qquad e^x - 1 \sim x, \qquad \ln(1+x) \sim x.$

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, тогда при $x \to x_0$

$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x), \qquad \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x), \qquad \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x),$

$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x), \quad e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x), \quad \ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x).$

Например,

$\sin(\pi - x) \sim (\pi - x)$ при $x \to \pi$,

$\operatorname{arctg}(x-2) \sim (x-2)$ при $x \to 2$,

$\ln(1+\sin x) \sim \sin x \sim x$ при $x \to 0$,

$e^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x)} - 1 \sim \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sim \left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ при $x \to \frac{\pi}{4}$.

1.4. В чем заключается необходимое и достаточное условие эквивалентности двух бесконечно малых величин?

Имеет место следующая

Теорема 1. *Для того чтобы $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентными бесконечно малыми при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы их разность $(\alpha(x) - \beta(x))$ была при $x \to x_0$ бесконечно малой более высокого порядка малости, чем каждая из функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.*

На основании приведенной теоремы и п. 1.3 будем иметь, что при $x \to 0$

$\sin x = x + o(x), \qquad \operatorname{tg} x = x + o(x), \qquad \arcsin x = x + o(x),$

$\operatorname{arctg} x = x + o(x), \quad e^x - 1 = x + o(x), \quad \ln(1+x) = x + o(x),$

где $o(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости при $x \to 0$, чем x.

1.5. Какой вид имеет простейшая бесконечно малая при $x \to 0$, при $x \to x_0$, при $x \to \infty$?

Очевидно, Cx^p $(p > 0)$ – простейшая бесконечно малая при $x \to 0$, $C(x - x_0)^p$ $(p > 0)$ – простейшая бесконечно малая при $x \to x_0$, $\dfrac{C}{x^p}$ $(p > 0)$ – простейшая бесконечно малая при $x \to \infty$.

1.6. Что принято называть главной частью и порядком бесконечно малой величины?

Если $\alpha(x) \sim C(x-x_0)^p$ при $x \to x_0$, тогда величину $C(x-x_0)^p$ называют главной частью бесконечно малой $\alpha(x)$, а число p – порядком $\alpha(x)$ относительно $(x-x_0)$.

Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to \infty$ и при этом $\alpha(x) \sim \dfrac{C}{x^p}$, то $\dfrac{C}{x^p}$ называют главной частью $\alpha(x)$ при $x \to \infty$.

Пример 1. При $x \to 0$ $\alpha(x) = 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{x^2}{2}$ – главная часть бесконечно малой $\alpha(x) = 1 - \cos x$, порядок которой равен 2.

Пример 2. При $x \to \infty$ $\alpha(x) = \sin^3 \frac{\pi}{x} \sim \frac{\pi^3}{x^3} \Rightarrow$ главной частью бесконечно малой $\alpha(x) = \sin^3 \frac{\pi}{x}$ является бесконечно малая $\frac{\pi^3}{x^3}$, порядок $\alpha(x)$ относительно $\frac{1}{x}$ равен 3.

1.7. Как сравниваются бесконечно большие величины? Как выглядит главная часть бесконечно большой величины при $x \to x_0$? Как она выглядит при $x \to \infty$?

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} U(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0} V(x) = \infty$ и при этом

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{U(x)}{V(x)} = k.$$

1. При $k \neq 0$, $k \neq \infty$ $U(x)$ и $V(x)$ называются бесконечно большими одного порядка роста при $x \to x_0$. В частном случае при $k = 1$ $U(x) \sim V(x)$ при $x \to x_0$.

2. При $k = 0$ функция $V(x)$ называется бесконечно большой более высокого порядка роста, чем $U(x)$ при $x \to x_0$ ($V(x)$ стремится к ∞ "быстрее", чем $U(x)$).

3. При $k = \infty$ функция $U(x)$ называется бесконечно большой более высокого порядка роста, чем $V(x)$ при $x \to x_0$ ($U(x)$ стремится к ∞ "быстрее", чем $V(x)$).

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{U(x)}{V(x)}$ не существует, то $U(x)$ и $V(x)$ называют несравнимыми бесконечно большими при $x \to x_0$.

Главная часть бесконечно большой при $x \to x_0$ величины имеет вид $\dfrac{C}{(x-x_0)^p}$ $(p>0)$. Если же $U(x)$ – бесконечно большая при $x\to\infty$, то ее главная часть имеет вид $C\cdot x^p$ $(p>0)$. Например, главной частью $U(x)=2x^3+10x^2+100x$ является слагаемое $2x^3$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+10x^2+100x}{2x^3}=1$. Интересно, что эта же функция является бесконечно малой при $x\to 0$. В этом случае главной частью является слагаемое $100x$, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+10x^2+100x}{100x}=1.$$

Таким образом, порядок бесконечно большой при $x\to\infty$ величины $2x^3+10x^2+100x$ равен 3, а порядок бесконечно малой при $x\to 0$ величины $2x^3+10x^2+100x$ равен 1.

1.8. Необходимое и достаточное условие эквивалентности двух бесконечно больших величин?

Теорема 2. Для того чтобы $U(x)$ и $V(x)$ были эквивалентными бесконечно большими при $x\to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы их разность $(U(x)-V(x))$ была при $x\to x_0$ либо бесконечно большой более низкого порядка, чем каждая из функций $U(x)$ и $V(x)$, либо величиной ограниченной.

1.9. Что дает знание главной части бесконечно малой (бесконечно большой) величины?

На основании теорем 1 и 2 будут иметь место приближенные формулы:

$$\alpha(x)\approx C(x-x_0)^p;\quad U(x)\approx\frac{C}{(x-x_0)^p}\qquad \text{при } x\to x_0,$$

$$\alpha(x)\approx\frac{C}{x^p};\qquad\qquad U(x)\approx Cx^p\qquad \text{при } x\to\infty.$$

Многие задачи математики и ее приложений решаются путем замены бесконечно малой (бесконечно большой) величины на ее главную часть. Этим приемом широко пользуются и при вычислении пределов. При раскрытии неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0\cdot\infty)$ бесконечно малые и бесконечно большие можно заменять на эквивалентные им величины.

2. Решение задач

В заданиях 2.1 – 2.3 требуется сравнить порядок малости заданных пар бесконечно малых величин.

2.1. $\alpha(x)=1-\sqrt{x}$, $\beta(x)=1-\sqrt[3]{x}$, $x\to 1$.

Решение. Найдем

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(1+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые одного порядка малости.

2.2. $\alpha(x)=1-\sqrt{\cos x}$, $\beta(x)=\sqrt{1-\cos x}$, $x\to 0$.

Решение. Найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{1-\cos x}(1+\sqrt{\cos x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}}=0\Rightarrow 1-\sqrt{\cos x}=o(\sqrt{1-\cos x})$$

при $x\to 0$.

2.3. $\alpha(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x\to +\infty$.

Решение. Найдем $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1\Rightarrow$$

$\Rightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\sim\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x\to +\infty$.

В заданиях 2.4 – 2.6 следует убедиться, что для заданных функций Δy и Δx являются бесконечно малыми одного порядка малости при $\Delta x\to 0$.

2.4. $y = x^3 + 2x$, $x_0 = 1$.

Решение. $\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = (1+\Delta x)^3 + 2(1+\Delta x) - 3 = 1 + 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2 + 2\Delta x - 3 = \Delta x^3 + 3\Delta x^2 + 5\Delta x$.
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^3+3\Delta x^2+5\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x^2+3\Delta x+5) = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta y$ и Δx одного порядка малости.

2.5. $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

Решение. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+\Delta x}-2}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+\Delta x-4}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x}+2)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta y$ и Δx одного порядка малости.

2.6. $y = 2^x$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Решение. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2^{x+\Delta x}-2^x}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2^x(2^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = 2^x \cdot \ln 2.$$

Предел оказался равен отличной от нуля константе, следовательно, Δy и Δx одного порядка малости $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

В заданиях 2.7 – 2.12 требуется выделить главную часть вида $C(x-x_0)^p$ и определить порядок малости относительно $(x-x_0)$ заданных бесконечно малых.

2.7. $\alpha(x) = x^5 - 3x^3 + 7x^2$, $x \to 0$.

Решение. Главная часть $\alpha(x)$ имеет вид Cx^p. Значения C и p найдем из условия

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5-3x^3+7x^2}{Cx^p} = 1.$$

Очевидно, $C = 7$, $p = 2$.

Таким образом, $x^5 - 3x^3 + 7x^2 \sim 7x^2$ при $x \to 0$.

2.8. $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$, $x \to 0$.

Решение. Главная часть $\alpha(x)$ также имеет вид Cx^p. Значения C и p найдем из условия

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{Cx^p} = 1$$

или из условия, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{Cx^p(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = 1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})=2$, то, очевидно, $C=1$ и $p=1$. Таким образом, $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x$ при $x\to 0$.

2.9. $\alpha(x)=\operatorname{tg}x-\sin x$, $x\to 0$.

Решение. $\alpha(x)=\operatorname{tg}x-\sin x=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x=$ $=\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}=\dfrac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x}\sim x\cdot 2\cdot\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{x^3}{2}$. Использовано то, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, $\sin x\sim x$, $\sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}$, $x\to 0$.

Таким образом, $\operatorname{tg}x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{2}$ $(C=\frac{1}{2},\ p=3)$.

2.10. $\alpha(x)=x^3-2x^2-4x+8$, $x\to 2$.

Решение. Главная часть $\alpha(x)$ имеет вид $C(x-2)^p$. Значения C и p найдем из условия

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{C(x-2)^p}=1.$$

Разлагая числитель на множители, будем иметь

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x+2)}{C(x-2)^p}=1\Rightarrow C=4,\ p=2.$$

Итак, $x^3-2x^2-4x+8\sim 4(x-2)^2$ при $x\to 2$.

2.11. $\alpha(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$, $x\to 1$.

Решение. Главная часть $\alpha(x)$ имеет вид $C(x-1)^p$. Найдем C и p из условия

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{C(x-1)^p}=1\Leftrightarrow\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}}{C(\sqrt{x}-1)^p(\sqrt{x}+1)^p}=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow C=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ p=\frac{1}{3}.$$

Итак, $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\sim-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(x-1)^{\frac{1}{3}}$ или $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}$.

2.12. $\alpha(x)=\ln(x+5)$, $x\to -4$.

Решение. Так как $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$, то $\ln(x+5)=$ $=\ln(1+(x+4))\sim x+4$ при $x\to -4$. Таким образом, $(x+4)$ – главная часть бесконечно малой $\alpha(x)=\ln(x+5)$ при $x\to -4$.

В заданиях 2.13 – 2.16 выделить главную часть заданной бесконечно большой.

2.13. $U(x) = x^2 + 10x + 10^{10}$, $x \to \infty$.

Решение. Главную часть вида $C \cdot x^p$ найдем из условия
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 10x + 10^{10}}{Cx^p} = 1.$$
Очевидно, $C = 1$, $p = 2$. Таким образом, $x^2 + 10x + 10^{10} \sim x^2$ при $x \to \infty$.

2.14. $U(x) = \dfrac{3x^5}{6x^2 + x + 1}$, $x \to \infty$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5}{(6x^2 + x + 1)cx^p} = 1$ при $C = \dfrac{1}{2}$, $p = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{3x^5}{6x^2 + x + 1} \sim \dfrac{1}{2}x^3$ – главная часть $U(x)$ при $x \to \infty$.

2.15. $U(x) = \dfrac{\ln x}{(x-1)^3}$, $x \to 1$.

Решение. $\dfrac{\ln x}{(x-1)^3} = \dfrac{\ln(1 + x - 1)}{(x-1)^3} \sim \dfrac{x-1}{(x-1)^3} \sim \dfrac{1}{(x-1)^2}$. Использовали то, что $\ln(1 + x - 1) \sim x - 1$ при $x \to 1$. Таким образом, главной частью бесконечно большой $\dfrac{\ln x}{(x-1)^3}$ является функция $\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

2.16. $U(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$, $x \to -1$.

Решение. Главная часть $U(x)$ должна иметь вид $\dfrac{C}{(x+1)^p}$. Очевидно, что
$$U(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x+1)(x^2 - x + 1)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3}(x+1)^{1/3}}.$$
Использовали то, что $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^2 - x + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

В заданиях 2.17 – 2.23 требуется найти указанные пределы.

2.17. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$.
Использовали то, что при $x \to +\infty$
$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x},\ \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} \sim 2\sqrt{x}.$$

2.18. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + x\sqrt[3]{x^4+1}}{\sqrt{x^4+1}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x \cdot x^{4/3}}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/3} = +\infty.$

Использовали то, что при $x \to +\infty$

$$x^2 + x\sqrt[3]{x^4+1} \sim x \cdot x^{4/3}, \ \sqrt{x^4+1} \sim x^2.$$

2.19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\cos x - 1)}{\operatorname{tg}^2 x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2(\frac{x}{2})^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Использовали то, что при $x \to 0$

$$\ln(1+\cos x - 1) \sim \cos x - 1, \ \operatorname{tg} x \sim x, \ \sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}.$$

2.20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - \cos x}{\operatorname{arctg} 2x} \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(e^{\sin x} - 1) + (1 - \cos x)}{\operatorname{arctg} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\operatorname{arctg} 2x} + \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\operatorname{arctg} 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} + \lim_{x\to 0} \frac{2(\frac{x}{2})^2}{2x} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Использовали то, что при $x \to 0$

$$e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x, \operatorname{arctg} 2x \sim 2x, \sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}.$$

2.21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\ln^3(1+x)} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \dfrac{1}{2}$. Использовали то, что $\operatorname{tg} x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$ (пример 2.6) и $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$.

Заметим, что замена функций $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ на их эквивалентную величину x в разности $(\operatorname{tg} x - \sin x)$ привела бы к ошибочному результату.

2.22. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\ln(x+3)}{e^{x+4} - e^2} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\ln(1+x+2)}{e^2(e^{x+2} - 1)} =$

$= \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{e^2(x+2)} = \dfrac{1}{e^2}.$

Использовали то, что при $x \to -2$

$$\ln(1+x+2) \sim x+2, \ e^{x+2} - 1 \sim x+2.$$

2.23. $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \sin\dfrac{\pi x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} x\dfrac{\pi x}{x^2+1} = \pi.$

Использовали то, что при $x \to \infty$

$$\sin\frac{\pi x}{x^2+1} \sim \frac{\pi x}{x^2+1} \sim \frac{\pi}{x}.$$

3. Перечень задач для самостоятельной работы

3.1. Задания 1 – 12 предназначены для устного решения. В заданиях 1 – 7 укажите главную часть бесконечно малой, в заданиях 8 – 12 – главную часть бесконечно большой величины.

1) $\alpha(x) = 2x^5 + x^4 + 7x^3, \qquad x \to 0;$
2) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2} + x, \qquad x \to 0;$
3) $\alpha(x) = x \cdot \sin x, \qquad x \to 0;$
4) $\alpha(x) = \sin \frac{\pi}{x^2}, \qquad x \to \infty;$
5) $\alpha(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), \qquad x \to \infty;$
6) $\alpha(x) = e^{x-3} - 1, \qquad x \to 3;$
7) $\alpha(x) = \ln(x+7), \qquad x \to -6;$
8) $U(x) = 2x^5 + x^4 + 7x^3, \qquad x \to \infty;$
9) $U(x) = \sqrt[3]{x^2} + x, \qquad x \to \infty;$
10) $U(x) = \dfrac{10x^2}{2x+5}, \qquad x \to \infty;$
11) $U(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{x-5}, \qquad x \to +\infty;$
12) $U(x) = \dfrac{x}{x^2-1}, \qquad x \to \infty.$

3.2. Докажите, что

$$\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim x^{\frac{1}{8}} \text{ при } x \to 0,$$

$$U(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim x^{\frac{1}{2}} \text{ при } x \to +\infty.$$

3.3. Докажите, что при $x \to 1$ функции $\alpha(x) = 1 - x$ и $\beta(x) = = 1 - \sqrt[3]{x}$ являются бесконечно малыми одного порядка малости.

3.4. Дана функция $y = x^3$. Покажите, что при $\Delta x \to 0$ величины Δy и Δx являются бесконечно малыми одного порядка (при $x \neq 0$).

3.5. Дана функция $y = \log_2 x$. Покажите, что в точке $x_0 = 4$ величины Δy и Δx при $\Delta x \to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка малости.

3.6. Докажите, что при $x \to 0$ бесконечно малые $(e^{2x} - e^{x})$ и $(\sin 2x - \sin x)$ будут эквивалентными.

3.7. Сравните порядок роста бесконечно больших $U(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ и $V(x) = \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$ при $x \to 1 - 0$.

3.8. Докажите, что функции $U(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x}$ и $V(x) = \dfrac{1}{x-1}$ являются бесконечно большими одного порядка при $x \to 1$.

3.9. Определить порядок относительно x следующих бесконечно малых при $x \to 0$ величин:

1) $\alpha(x) = x \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$; 2) $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt{x \cdot \sin x})$;

3) $\alpha(x) = e^{\cos x} - e$; 4) $\alpha(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$.

Ответы: 2; 1; 2; 2.

3.10. Определить порядок относительно x следующих бесконечно больших величин:

1) $U(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2 - x}$, $x \to +\infty$;

2) $U(x) = \dfrac{x^5}{x^3 + x + 1}$, $x \to \infty$;

3) $U(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \operatorname{arctg} x$, $x \to \infty$;

4) $U(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$, $x \to +\infty$;

5) $U(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, $x \to +\infty$.

Ответы: $\dfrac{2}{3}$; 2; 1; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{2}$.

3.11. Найдите устно пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 3x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{x}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin \frac{x}{2}}{\operatorname{arctg} 2x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+7x)}{x}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-2x)}{\sin 2x}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$; 10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x} - 1}{e^{10x} - 1}$.

3.12.

Найти пределы:	Ответы:
1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2-x}}{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}$,	1;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{\pi x^2}{2x^2+1}$,	1;
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{\sqrt{9x^2+x+1}}$,	$\pm\sqrt{3}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sqrt{x\cdot\sin x}}{\operatorname{arctg}2x}$,	$-\frac{1}{2}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\arcsin 3x}-1}{\operatorname{tg}5x}$,	$\frac{3}{5}$;
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$,	2;
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\ln(x+1)-\sin\ln x)$,	0;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$,	$\frac{a^2}{b^2}$;
9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{x-2}-e}{x^3-27}$,	$\frac{e}{27}$;
10. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln(x-4)}{1-\sqrt{x-4}}$,	-2;
11. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\dfrac{x-3}{x}$,	-3.

Заключение. Мы довольно подробно рассмотрели способы нахождения пределов с использованием понятия непрерывности, теорем о пределах, свойств бесконечно малых и бесконечно больших величин, замечательных пределов и их следствий, то есть, другими словами, с использованием материала, который является содержанием главы “Введение в математический анализ”. Внимательный студент должен был заметить, что мы не решали примеров на раскрытие неопределенностей вида (0^0) и (∞^0), а также на сравнение порядка роста таких основных в курсе математики пар функций, как x^n и a^x, x^n и $\log_a x$ и многих других. Перечисленные задачи гораздо проще решаются методами, которые будут рассмотрены в главе 3, чем вышеприведенными. Кроме того, в третьей главе будет рассмотрен еще один метод выделения главной части бесконечно малой величины, основанный на так называемой формуле Тейлора.

Тема 9. **Классификация точек разрыва функции**

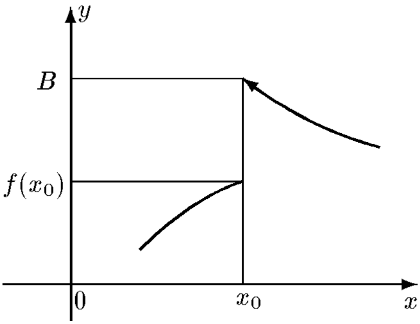
1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. В чем заключается необходимое и достаточное условие непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0?

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда

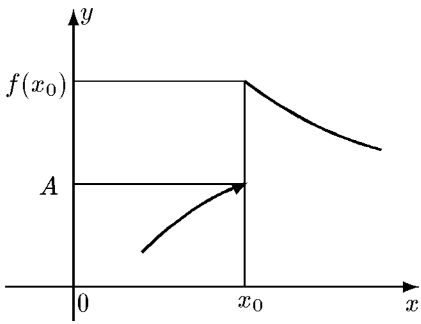
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \qquad (*)$$

1.2. Геометрическая иллюстрация (рис. 1 – 7) возможных нарушений условия (*)



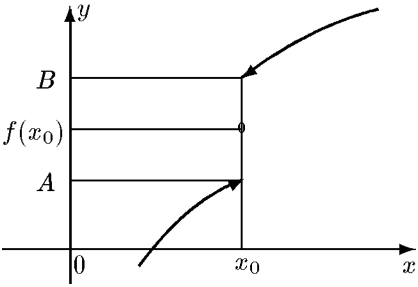
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B \neq f(x_0)$$

Рис. 1



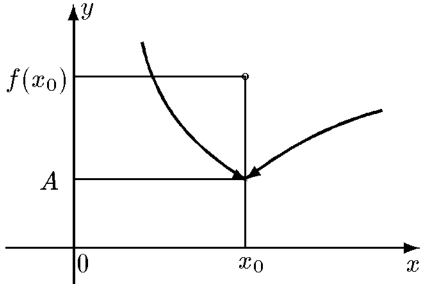
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \neq f(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Рис. 2



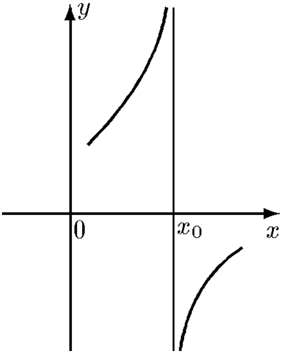
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A \neq f(x_0)$$
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = B \neq f(x_0)$$

Рис. 3



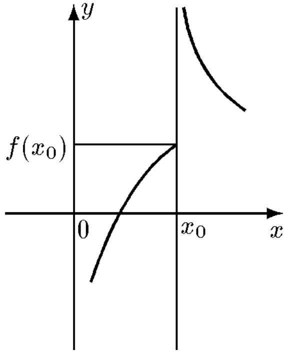
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$$

Рис. 4



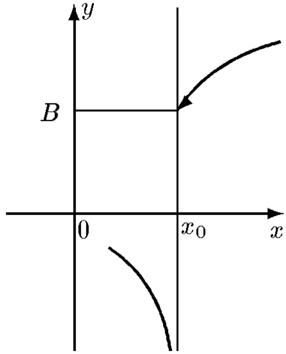
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty$$

Рис. 5



$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$$
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$$

Рис. 6



$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = B$$

Рис. 7

Возможна еще ситуация, когда один или оба односторонних предела вообще не существуют. Иллюстрацией этого случая может служить график функции $y = \sin\frac{\pi}{x}$ в окрестности точки $x = 0$ (Тема 2, рис. 42).

1.3. Определение точки разрыва 1 рода

Точка x_0 называется точкой разрыва 1 рода функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют и конечны оба односторонних предела функции, но при этом хотя бы один из них отличен от значения $f(x_0)$. Точки разрыва 1 рода изображены на рис. 1 – 4. Функция, изображенная на рис. 1, называется непрерывной слева, на рис. 2 – непрерывной справа.

1.4. Как устранить разрыв, изображенный на рис. 4?

Разрыв устраняется, если изменить значение функции $y = f(x)$ в точке x_0, приняв $f(x_0) = A$. В связи с этим точку x_0 называют точкой устранимого разрыва.

1.5. Определение точки разрыва 2 рода

Точка x_0 называется точкой разрыва 2 рода функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке равен ∞ (рис. 5 – 7) или вообще не существует.

1.6. Как обнаружить у функции, заданной аналитически, точки разрыва?

Если функция $y = f(x)$ элементарная, то ее точками разрыва будут лишь те точки, в которых эта функция не определена (при условии, что в окрестности этих точек функция определена). Например, функция $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ имеет две точки разрыва $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$. В остальных точках функция определена и, следовательно, непрерывна, так как любая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

Если функция задана с помощью нескольких элементарных функций, то разрыв у такой функции может оказаться в точке перехода от одной элементарной функции к другой. Например, если функция $y = f(x)$ задана таким образом:

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\,, \text{ если } x < x_0, \\ \phi(x)\,, \text{ если } x \geqslant x_0, \end{cases}$$

где $g(x)$ и $\phi(x)$ – непрерывные функции, то у функции $y = f(x)$ разрыв может оказаться в точке x_0 в случае, когда

$$\lim_{x \to x_0 - 0} g(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} \phi(x).$$

Если же $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \phi(x) = \phi(x_0)$, то функция $y = f(x)$ будет в точке x_0 непрерывной. Геометрически в этом случае в точке $M_0(x_0, y_0)$ произойдет "стыковка" графиков функций $g(x)$ и $\phi(x)$.

1.7. Если обнаружена точка разрыва функции или точка, в которой может оказаться разрыв, как выяснить характер точки разрыва?

Следует найти односторонние пределы функции в этой точке. Если пределы конечны, их следует сравнить между собой и со значением функции в рассматриваемой точке. Если же хотя бы один из односторонних пределов равен ∞ или вообще не существует, то в точке разрыв 2 рода.

1.8. Что дает знание характера точек разрыва функции?

Зная характер точек разрыва, можно схематично изобразить график функции в окрестности точек разрыва.

2. Решение задач

На основании вышеизложенного можно предложить следующий порядок решения задач на классификацию точек разрыва функции:

1. Найти область определения функции. Точки, в которых функция не определена, будут точками разрыва функции (конечно, при условии, что функция определена в окрестности этих точек).

2. Найти односторонние пределы функции в точках разрыва. При отыскании односторонних пределов необходимо помнить теоремы о пределе, свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин (в частности, что $\frac{c}{0} \to \infty$, $\frac{c}{\infty} \to 0$, $\frac{\infty}{0} \to \infty$, $\frac{0}{\infty} \to 0$) и владеть техникой раскрытия неопределенных выражений.

3. На основании найденных односторонних пределов изобразить схематично поведение функции в окрестности точек разры-

ва. Довольно часто небольшое дополнительное исследование поведения функции (в частности, при $x \to \pm\infty$) позволяет схематично изобразить поведение функции во всей области определения.

4. Если функция задана с использованием нескольких элементарных функций, необходимо найти односторонние пределы в точках перехода от одной элементарной функции к другой.

Переходим к решению задач.

2.1. Задан график функции $y = f(x)$ (рис. 8).

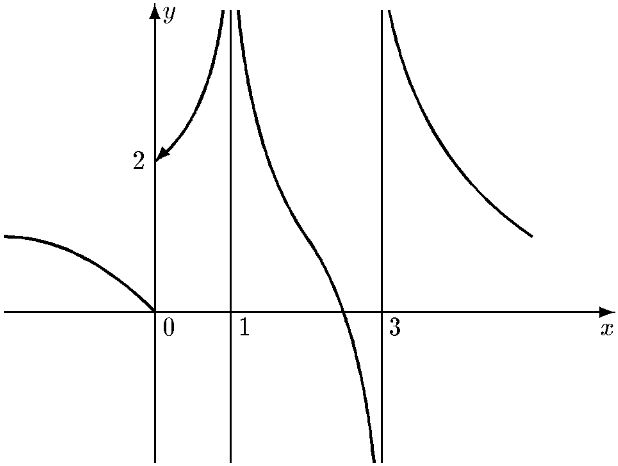


Рис. 8

Требуется: указать точки разрыва функции; указать односторонние пределы и характер точек разрыва.

Решение. На рис. 8 изображена функция, имеющая три точки разрыва: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

1) $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 2$. Пределы конечны, но различны $\Rightarrow$ $x_1 = 0$ – точка разрыва 1 рода. Так как $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = f(0)$, то функция в точке $x_1 = 0$ непрерывна слева.

2) $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = +\infty \Rightarrow x_2 = 1$ – точка разрыва 2 рода.

3) $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = +\infty \Rightarrow x_3 = 3$ – точка разрыва 2 рода.

2.2. Изобразить схематично график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям:

1) $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = 1$, $f(-1) = 1$;

2) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = -\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$;

4) $f(0) = 0$.

График функции $y = f(x)$ изображен на рис. 9.

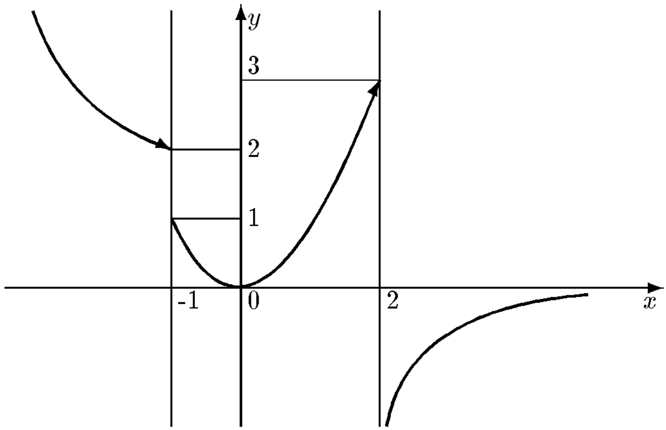


Рис. 9

Очевидно, $x = -1$ – точка разрыва 1 рода. Так как $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = f(-1)$, то функция непрерывна в точке $x = -1$ справа. В точке $x = 2$ разрыв 2 рода.

В заданиях 2.3 – 2.8 требуется найти точки разрыва функции, установить их характер и изобразить схематично график функции в окрестности точек разрыва (а если удастся, и во всей области определения).

2.3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$.

Решение. Функция определена и, следовательно, непрерывна на всей числовой оси за исключением точек $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$. В этих точках функция терпит разрыв. Найдем односторонние пределы функции в этих точках:

$$\lim_{x\to -3-0} \frac{x}{x^2 - 9} \left(\frac{-3}{+0}\right) = -\infty.$$

Поясним полученный результат. Знаменатель функции $\dfrac{x}{x^2-9}$ при $x \to -3-0$ будет стремиться к нулю, но так как при этом левее точки $x = -3$ величина x^2 будет все время оставаться больше числа 9, то разность (x^2-9) будет стремиться к нулю, оставаясь все время положительной. Здесь и далее $+0$ – обозначение бесконечно малой величины, которая стремится к нулю, оставаясь положительной; -0 – обозначение бесконечно малой, которая, стремясь к нулю, остается отрицательной.

Закончим нахождение односторонних пределов:

$$\lim_{x\to -3+0} \frac{x}{x^2-9} \left(\frac{-3}{-0}\right) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{x}{x^2-9} \left(\frac{3}{-0}\right) = -\infty; \quad \lim_{x\to 3+0} \frac{x}{x^2-9} \left(\frac{3}{+0}\right) = +\infty.$$

Все односторонние пределы оказались равны $\infty \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 = -3$, $x_2 = 3$ – точки разрыва 2 рода. Изобразим поведение функции в окрестности точек разрыва на основании проведенного исследования (рис. 10).

В данном случае легко построить график функции полностью, если найти

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-9} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{9}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Полученный результат означает, что при $x \to \pm\infty$ график функции будет прижиматься к оси Ox.

Кроме этого, используя то, что данная функция нечетная и при этом $f(0) = 0$, можно достроить график функции на всей области определения (рис. 11).

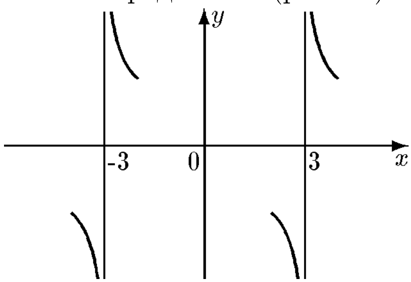


Рис. 10

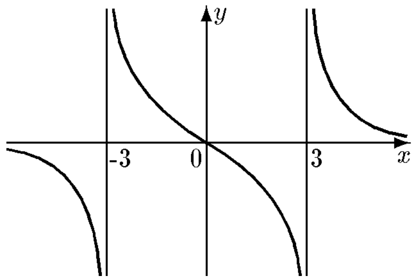


Рис. 11

2.4. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{1-x}}$.

Решение. Функция не определена только в точке $x = 1 \Rightarrow$ эта точка является точкой разрыва функции. Выясним характер разрыва:

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{1-x}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{+0}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{1-x}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{-0}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty} = +\infty.$$

Один из пределов оказался равен $\infty \Rightarrow x = 1$ – точка разрыва 2 рода.

Изобразим поведение функции в окрестности точки $x = 1$, при этом учтем, что показательная функция принимает только положительные значения (рис. 12).

Чтобы достроить график функции, найдем $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{1-x}} =$ $= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{\infty}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0} = 1 \Rightarrow$ график функции при $x \to \pm\infty$ прижимается к прямой $y = 1$. При построении графика учтем, что $f(0) = \frac{2}{3}$ (рис. 13).

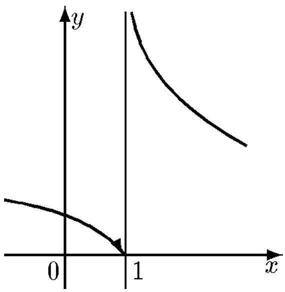


Рис. 12

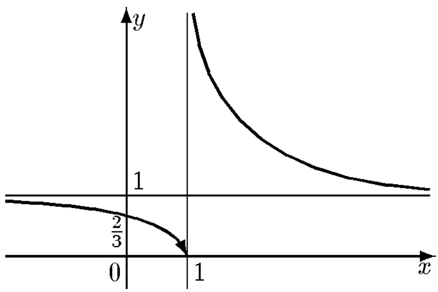


Рис. 13

2.5. $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3^{\frac{x}{x+2}}}$.

Решение. Так как показательная функция $3^{\frac{x}{x+2}}$ принимает только положительные значения, знаменатель $1 + 3^{\frac{x}{x+2}} \neq 0$ и, следовательно, данная функция определена всюду, за исключением точки $x = -2$. Выясним характер разрыва функции в точке $x = -2$:

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{1}{1+3^{\frac{x}{x+2}}}=\frac{1}{1+3^{\frac{-2}{-0}}}=\frac{1}{1+3^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0;$$
$$\lim_{x\to-2+0}\frac{1}{1+3^{\frac{x}{x+2}}}=\frac{1}{1+3^{\frac{-2}{+0}}}=\frac{1}{1+3^{-\infty}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Оба односторонних предела конечны, $x=-2$ – точка разрыва 1 рода.

Для уточнения графика функции найдем $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1+3^{\frac{x}{x+2}}}=$ $=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{1+2/x}}}=\dfrac{1}{1+3}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow$ график функции при $x\to\pm\infty$ будет прижиматься к прямой $y=\dfrac{1}{4}$ (рис. 14).

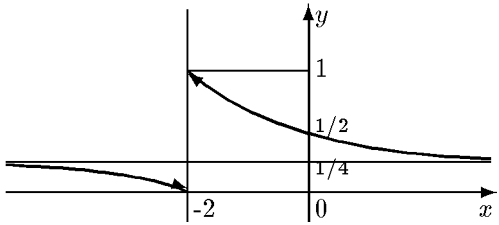


Рис. 14

График функции в точке $x=-2$ имеет конечный скачок величины 1.

2.6. $f(x)=e^{\frac{2x}{1-x^2}}$.

Решение. Функция не определена и, следовательно, терпит разрыв в точках $x=\pm1$. Исследуем характер точек разрыва:

$$\lim_{x\to-1-0}e^{\frac{2x}{1-x^2}}=e^{\frac{-2}{-0}}=e^{+\infty}=+\infty;$$

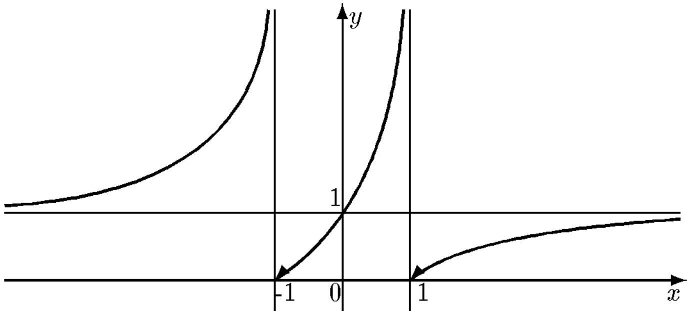


Рис. 15

$$\lim_{x\to-1+0} e^{\frac{2x}{1-x^2}} = e^{\frac{-2}{+0}} = e^{-\infty} = 0;$$
$$\lim_{x\to1-0} e^{\frac{2x}{1-x^2}} = e^{\frac{2}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty;$$
$$\lim_{x\to1+0} e^{\frac{2x}{1-x^2}} = e^{\frac{2}{-0}} = e^{-\infty} = 0.$$
$x = \pm 1$ – точки разрыва 2 рода.

Для уточнения графика найдем $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{2x}{1-x^2}} = e^0 = 1$, график будет при $x \to \pm\infty$ прижиматься к прямой $y = 1$ (рис. 15).

2.7. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x-1}$.

Решение. Функция, очевидно, терпит разрыв в точке $x = 1$. Найдем односторонние пределы в точке $x = 1$:
$$\lim_{x\to1-0} \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to1+0} \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Пределы конечны, но различны, следовательно, в точке $x=1$ разрыв 1 рода. Для уточнения графика найдем
$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

График функции $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x-1}$ изображен на рис. 16.

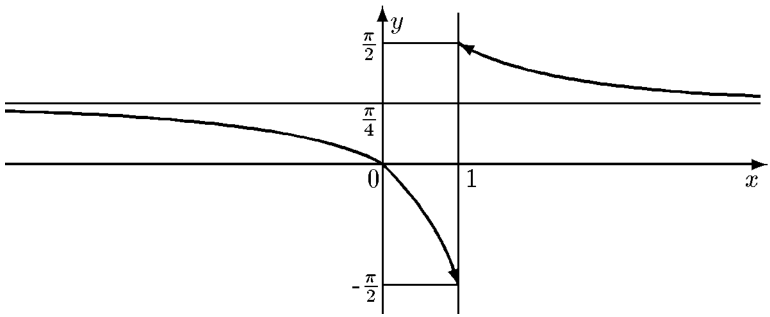


Рис. 16

2.8. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

Решение. Функция определена при выполнении условий: $x > 0$ и $\ln x \neq 0$, то есть на множестве $X = (0,1) \cup (1,+\infty)$. Таким образом, $x = 1$ – точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-0} = -\infty; \quad \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Для уточнения графика найдем

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Четыре найденных предела позволяют схематично построить график функции (рис. 17).

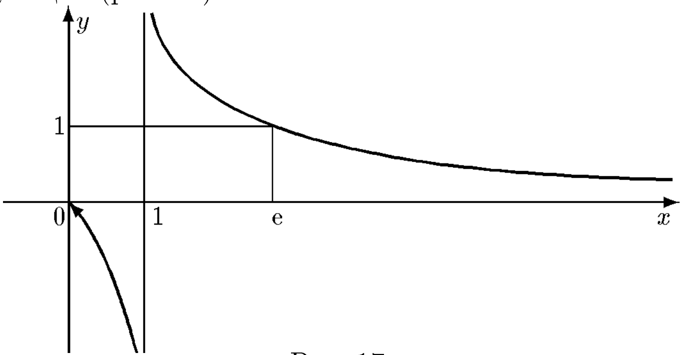


Рис. 17

Обратите внимание на то, что теория предела и непрерывности позволяет во многих случаях строить графики достаточно сложных функций даже без привлечения производной.

2.9. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leqslant 2, \\ 6 - x & \text{при } x > 2. \end{cases}$

Решение. Данная функция определена на всей числовой оси. Так как каждая из функций x^2 и $(6 - x)$ – хорошо известные непрерывные функции, то разрыв у функции $f(x)$ может оказаться только в точке перехода от функции x^2 к функции $(6 - x)$, то есть в точке $x = 2$. Найдем односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} x^2 = 4;$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} (6 - x) = 4.$$

Односторонние пределы равны между собой, кроме того, по условию $f(2) = 4$. Следовательно, для заданной функции в точке $x = 2$ выполнено условие непрерывности

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} f(x) = f(2)$$

и функция разрыва в точке $x = 2$ не имеет (произошла "стыковка" параболы $y = x^2$ и прямой $y = 6 - x$) (рис. 18).

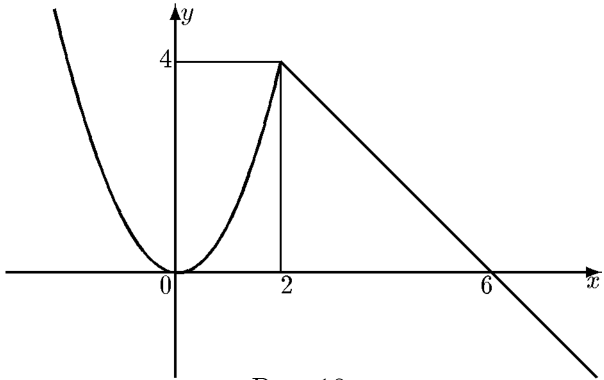


Рис. 18

$$\mathbf{2.10.}\ f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{при } x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ \dfrac{1}{3-x} & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Каждая из функций $e^{\frac{1}{x}}$, $(x-1)^2$ и $\dfrac{1}{3-x}$ в своей области определения непрерывна, следовательно, функция $f(x)$ может иметь разрыв только в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. Найдем односторонние пределы функции $f(x)$ в этих точках:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} (x-1)^2 = 1.$$

Пределы конечны и различны $\Rightarrow$ в точке $x_1 = 0$ разрыв 1 рода. Так как $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 1$ и по условию $f(0) = 1$, делаем заключение, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ справа:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0} (x-1)^2 = 4,$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Один из пределов оказался равен $-\infty \Rightarrow$ функция $f(x)$ имеет в точке $x_2 = 3$ разрыв 2 рода.

График функции $f(x)$ получим, если для $x \in (-\infty, 0)$ построим график функции $y = e^{\frac{1}{x}}$, на промежутке [0,3] это будет соответствующая часть параболы $y = (x-1)^2$, для $x \in (3, +\infty)$ – соответствующая ветвь гиперболы $y = \dfrac{1}{3-x}$ (рис. 19).

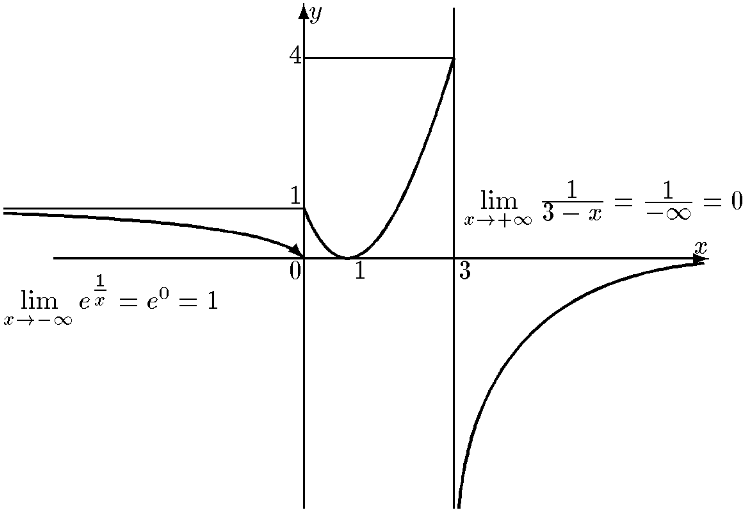


Рис. 19

2.11. При каком значении a функция

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{при } x \leqslant 3, \\ 7a - 2x & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

будет непрерывной в точке $x = 3$?

Решение. Функция $y = f(x)$ будет непрерывной в точке $x = 3$, если в этой точке будет выполнено условие непрерывности, то есть если

$$\lim_{x\to3-0} f(x) = \lim_{x\to3+0} f(x) = f(3).$$

По условию $f(3) = 2^3 = 8$.

Найдем односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to3-0} f(x) = \lim\limits_{x\to3-0} 2^x = 2^3 = 8,$

$\lim\limits_{x\to3+0} f(x) = \lim\limits_{x\to3+0} (7a - 2x) = 7a - 6.$

Таким образом, функция $f(x)$ будет непрерывной, если $7a - 6 = 8 \Rightarrow a = 2$. Геометрически это означает, что в точке $x = 3$ произойдет “стыковка” графика показательной функции $y = 2^x$ и прямой $y = 14 - 2x$ (рис. 20).

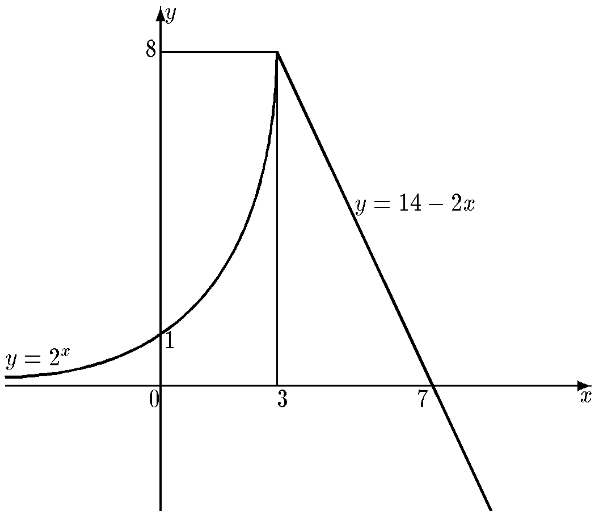


Рис. 20

2.12. Сравнить характер разрыва функций
$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x - 2} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{x^3 - 2x}{|x - 2|}$$
и построить их графики. Какую из этих функций можно доопределить в точке $x = 2$ таким образом, чтобы в результате получилась непрерывная функция?

Решение. Каждая из функций не определена в точке $x = 2$ и, следовательно, терпит в этой точке разрыв. Выясним характер разрыва функции $f(x)$:
$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} \frac{x^3 - 2x}{x - 2} \left(\frac{-0}{-0}\right) = \lim_{x \to 2-0} \frac{x^2(x - 2)}{x - 2} = 4,$$
$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} \frac{x^3 - 2x}{x - 2} \left(\frac{+0}{+0}\right) = \lim_{x \to 2-0} \frac{x^2(x - 2)}{x - 2} = 4.$$

Односторонние пределы оказались равными, следовательно, разрыв функции $f(x)$ можно устранить, если эту функцию доопределить в точке $x = 2$, приняв $f(2) = 4$. Итак, функция
$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x}{x - 2}, & \text{если } x \neq 2, \\ 4, & \text{если } x = 2, \end{cases}$$
уже будет непрерывной.

Графики функций $f(x)$ и $f^*(x)$ будут отличаться только в точке $x = 2$ (рис. 21 и 22).

Перейдем к выяснению характера разрыва функции $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{|x-2|}$. Воспользуемся тем, что

$$|x-2| = -x+2 \quad \text{при } x < 2,$$
$$|x-2| = x-2 \quad \text{при } x > 2,$$

и запишем функции $g(x)$ в виде

$$g(x) = \begin{cases} -x^2\,, & \text{если } x < 2; \\ \ \ x^2\,, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Найдем односторонние пределы функции в точке $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2-0} g(x) = \lim_{x\to 2-0} -x^2 = -4,$$
$$\lim_{x\to 2+0} g(x) = \lim_{x\to 2+0} x^2 = 4.$$

Функция $g(x)$ имеет в точке $x = 2$ разрыв 1 рода, причем такой разрыв уже устранить нельзя. Изобразим график функции $y = g(x)$ (рис. 23):

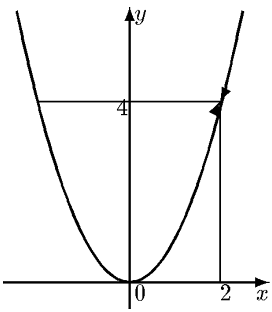


Рис. 21

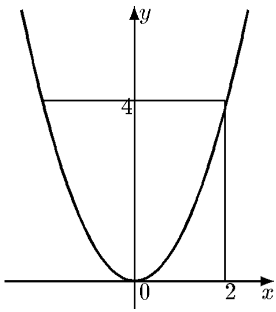


Рис. 22

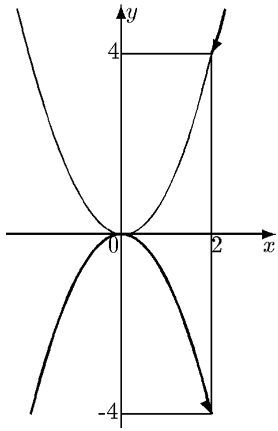


Рис. 23

2.13. Сравнить точки разрыва функций

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{\sin x}{x}$$

и построить их графики. Какую из этих функций можно доопределить в точке $x = 0$ таким образом, чтобы в результате получилась непрерывная функция?

Решение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ не определены в точке $x = 0$ и, следовательно, обе в этой точке терпят разрыв.

Выясним характер разрыва функции $f(x) = \frac{\cos x}{x}$:

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{-0} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+0} \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Таким образом, у функции $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ в точке $x = 0$ разрыв 2 рода. Чтобы построить график функции, заметим, что $f(x) = 0$ в тех же точках, что и $\cos x = 0$, то есть при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Кроме того, очевидно, что с увеличением абсолютной величины x амплитуда колебаний будет уменьшаться и постепенно стремиться к нулю (рис. 24). Очевидно, устранить такой разрыв нельзя.

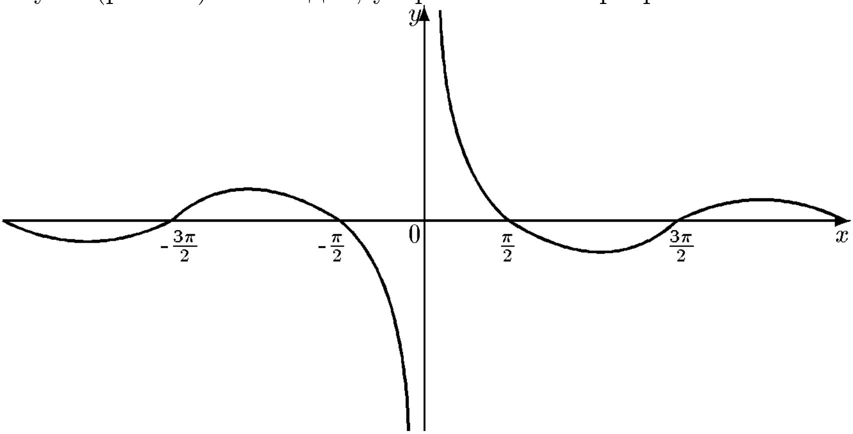


Рис. 24

Перейдем к исследованию характера разрыва функции $g(x) = \frac{\sin x}{x}$:

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(воспользовались первым замечательным пределом) и, следовательно, разрыв функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ устраняется, если функцию доопределить в точке $x=0$, приняв ее равной в этой точке числу 1.

График функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ в окрестности точки $x = 0$ будет существенно отличаться от графика функции $f(x) = \frac{\cos x}{x}$. Пересекать ось Ox график функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ будет в точках $x=k\pi$ ($\sin x=0$ в этих точках), амплитуда колебаний при $x\to\pm\infty$ будет, как и у графика $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, уменьшаться (рис. 25).

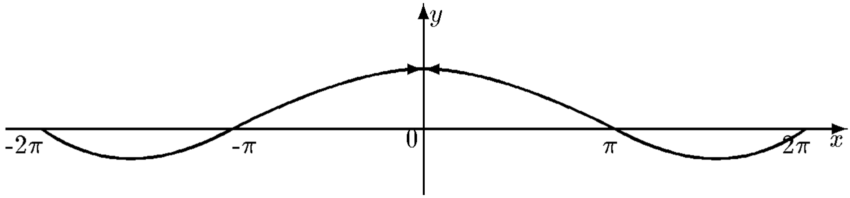


Рис. 25

2.14. Исследовать характер точек разрыва функции $y = \left[\dfrac{1}{x}\right]$ – целая часть $\dfrac{1}{x}$.

Решение. Напомним, что любое $a \in R$ можно представить в виде $a = k + \alpha$, где k – целое число, $0 \leqslant \alpha < 1$. Слагаемое k называют целой частью a и обозначают $[a]$. Например, $2.7 = 2 + 0.7 \Rightarrow [2.7] = 2$, $-2.7 = -3 + 0.3 \Rightarrow [-2.7] = -3$.

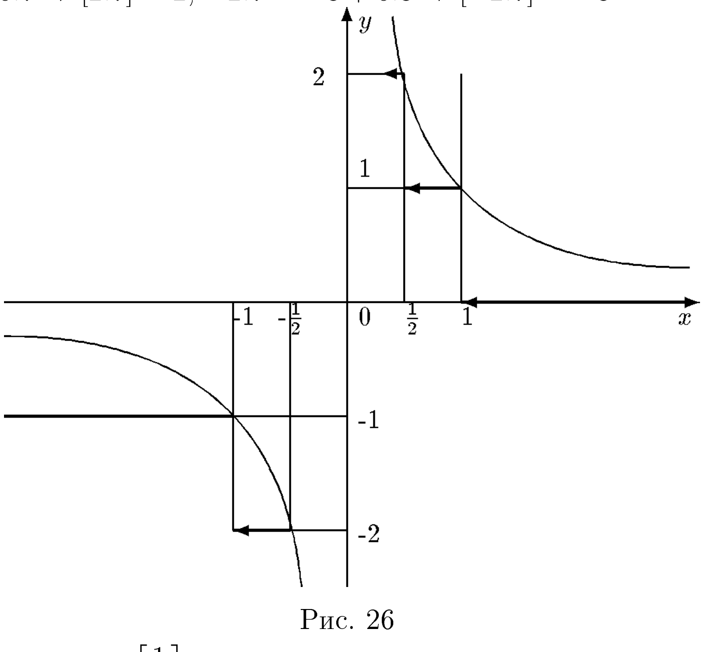


Рис. 26

Очевидно, $\left[\dfrac{1}{x}\right]$ изменяет свои значения при переходе через точки $x_k = \dfrac{1}{k}$, где $k \in Z$. Исследуем характер разрыва функции $y = \left[\dfrac{1}{x}\right]$ в точках $x_k = \dfrac{1}{k}$:

$$\lim_{x\to\frac{1}{k}-0}\left[\frac{1}{x}\right] = k,\ \lim_{x\to\frac{1}{k}+0}\left[\frac{1}{x}\right] = k-1 \Rightarrow \text{в точках } x_k = \frac{1}{k}$$

функция терпит разрыв первого рода. В точке $x = 0$ функция не определена, следовательно, $x = 0$ – тоже точка разрыва. Так как $\lim\limits_{x\to 0-0}\left[\frac{1}{x}\right] = -\infty$, а $\lim\limits_{x\to 0+0}\left[\frac{1}{x}\right] = +\infty$, то в точке $x = 0$ разрыв 2 рода. График функции $y = \left[\frac{1}{x}\right]$ изображен на рис. 26.

2.15. Пример функции, которая терпит разрыв в каждой точке своей области определения.

Такой функцией, например, является функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ рациональное число;} \\ 0, \text{ если } x \text{ иррациональное число.} \end{cases}$$

Функция $D(x)$ терпит разрыв в каждой точке $x_0 \in R$ потому, что предел этой функции при $x \to x_0$ не существует.

Строгому доказательству этого утверждения мы предпочтем следующие достаточно убедительные рассуждения.

Пусть x_0 – любое действительное число (рациональное или иррациональное). Известно, что в любой окрестности любого действительного числа находится бесконечно много как рациональных, так и иррациональных чисел. Это означает, что в любой окрестности точки x_0 функция $D(x)$ будет бесконечно много раз принимать как равное 1, так и равное 0 значения и, следовательно, предел такой функции при $x \to x_0$ не может быть равен ни нулю, ни единице.

Итак, $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ не существует и, следовательно, функция Дирихле терпит разрыв 2 рода при любом действительном значении x.

3. Перечень задач для самостоятельной работы

3.1. В заданиях 1 – 16 требуется найти точки разрыва функции, установить их характер и схематично изобразить график функции.

1. $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$;

2. $f(x)=5^{\frac{x}{x+2}}$;

3. $f(x)=\dfrac{1}{1+5^{\frac{x}{x+2}}}$;

4. $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$;

5. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$;

6. $f(x)=e^{\frac{1}{x^2-2x}}$;

7. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$;

8. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}$;

9. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

10. $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-2)}$;

11. $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{при } x\leqslant 0,\\ \ln x & \text{при } x>0;\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{при } x<0,\\ x^2-x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 2,\\ \log_2 x & \text{при } x>2;\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{при } |x|<2,\\ \dfrac{1}{x} & \text{при } |x|>2;\end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{при } |x|\leqslant 1,\\ 2\sqrt{x^2-1} & \text{при } |x|>1;\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{|x|} & \text{при } x\neq 0,\\ 3 & \text{при } x=0;\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} \sin\pi x & \text{для рационального } x,\\ 0 & \text{для иррационального } x.\end{cases}$

Без построения графика.

3.2. В заданиях 17 – 22 функция $f(x)$ не определена при $x=0$. Требуется доопределить функцию $f(x)$ при $x=0$ так, чтобы $f(x)$ стала непрерывной в точке $x=0$.

17. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}$;

18. $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

19. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$;

20. $f(x)=(1+x)^{1/x}$;

21. $f(x)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$;

22. $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$;

Ответы: 17) $f(0)=2$; 18) $f(0)=\frac{1}{2}$; 19) $f(0)=1.5$; 20) $f(0)=e$; 21) $f(0)=0$; 22) нельзя.

3.3. При каком a будет непрерывна функция
$$f(x)=\begin{cases} 2-ax\,, \text{ если } x<4, \\ \log_{\frac{1}{2}} x\,, \text{ если } x\geqslant 4. \end{cases}$$
Ответ: $a=1$.

3.4. При каких a и b будет непрерывна функция
$$f(x)=\begin{cases} x^3-a\,, \text{ если } x<2, \\ \dfrac{4}{x}\,, \text{ если } 2\leqslant x\leqslant 4, \\ 2x+b\,, \text{ если } x>4. \end{cases}$$
Ответ: $a=6$, $b=-7$.

3.5. Сравнить характер точки разрыва функций
$$f(x)=\frac{x^3+1}{x+1} \quad \text{и} \quad f(x)=\frac{x^3+1}{|x+1|}$$
и построить их графики. Какую из этих функций можно доопределить в точке $x=-1$ таким образом, чтобы в результате получилась непрерывная функция?

3.6. Сравнить характер точки разрыва функций
$$f(x)=\sin\frac{\pi}{x} \quad \text{и} \quad f(x)=x\cdot\sin\frac{\pi}{x}$$
и построить их графики. Какую из этих функций можно доопределить в точке $x=0$ таким образом, чтобы в результате получилась непрерывная функция?

3.7. Выяснить характер точек разрыва и построить графики функций
$$f(x)=[x] \quad \text{и} \quad f(x)=x\cdot[x],$$
где $[x]$ – целая часть x.

3.8. Исследовать на непрерывность и построить графики следующих функций:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$, $x\geqslant 0$.

Ответ: $x=1$ – точка разрыва 1 рода.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

Ответ: $y=\operatorname{sign} x$, $x=0$ – точка разрыва 1 рода.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

Ответ: функция непрерывна на всей числовой оси.

Глава 2

Производная и дифференциал

Тема 1. Понятие производной. Ее механический и геометрический смысл

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Две основные задачи, необходимость решения которых приводит к понятию производной

Понятие производной от функции $y = f(x)$ возникло в связи с решением:

1) задачи нахождения скорости изменения функции $y = f(x)$ в зависимости от значения аргумента x;
2) задачи нахождения углового коэффициента касательной в точках графика функции $y = f(x)$.

1.2. Показать, как решение той и другой задачи приводит к нахождению $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

1. Если функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности, то вопрос о скорости изменения функции при

переходе от точки x_0 к соседней с ней точке $x_0 + \Delta x$ решается с помощью рассмотрения отношения

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

В общем случае это отношение зависит от величины Δx, и его естественно назвать средней скоростью изменения функции $y = f(x)$ на промежутке, расположенном между точками x_0 и $x_0 + \Delta x$. За скорость изменения функции в самой точке x_0 естественно принять $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (если, конечно, этот предел существует).

2. Если функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности, то касательной к графику функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ называется предельное положение, которое займет секущая M_0M, если точка M будет стремиться к точке M_0 вдоль графика функции (рис. 1).

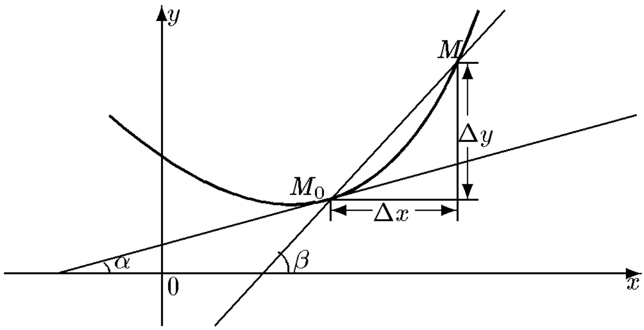


Рис. 1

Угловой коэффициент секущей, равный, как известно, $\operatorname{tg}\beta$, будет зависеть от Δx. Очевидно (рис. 1), эта зависимость имеет вид $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. На основании определения касательной, для ее углового коэффициента $k = \operatorname{tg}\alpha$, будем иметь

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

1.3. Определение производной. Ее механический и геометрический смысл?

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности. Если существует предел отношения приращения функции $y = f(x)$ в точке x_0 к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, то этот предел называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается одним из символов:

$$y', \quad f'(x_0), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Итак,

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad y' \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Задачи, приведенные в п. 1.2, позволяют сделать следующий вывод:

1) $f'(x_0)$ – скорость изменения функции $y = f(x)$ в точке x_0 (механический смысл производной);

2) $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ – угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ (геометрический смысл производной). Знание углового коэффициента позволяет записать уравнение касательной в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{или} \quad y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

1.4. К чему сводится нахождение производной непрерывной в точке x_0 функции $y = f(x)$?

Так как для непрерывной функции $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то нахождение производной, которая по определению равна $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, сводится к раскрытию неопределенного выражения вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

1.5. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, означает ли это, что она имеет в этой точке производную?

Нет, не означает, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \left(\dfrac{0}{0}\right)$ может и не существовать в точке x_0.

1.6. Какова геометрическая иллюстрация поведения функции $y = f(x)$ в случаях, когда $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$?

Если пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'_-(x_0)$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'_+(x_0)$ существуют, то их называют односторонними производными функции $y = f(x)$ (соответственно слева и справа) в точке x_0.

Очевидно, если $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, то функция $y = f(x)$ будет иметь производную $f'(x_0)$, совпадающую с односторонними производными, и график такой функции будет иметь в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ касательную.

Если же $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, то функция $y = f(x)$ не будет иметь касательной в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, но при этом будут существовать две односторонние касательные (рис. 2).

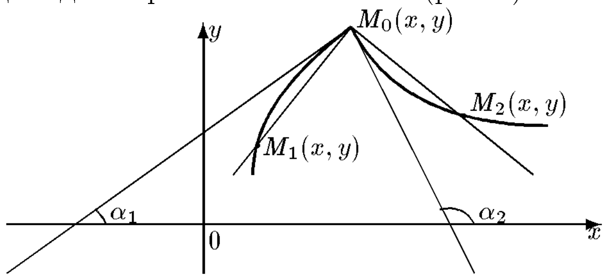


Рис. 2

$$f'_-(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_1, \; f'_+(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_2$$

Касательная слева – предельное положение секущей M_0M_1; касательная справа – предельное положение секущей M_0M_2.

В случае, когда $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, соответствующую точку графика функции $y = f(x)$ называют угловой точкой.

График функции, изображенной на рис. 2, является геометрической иллюстрацией поведения функции, непрерывной в точке x_0, но не имеющей в этой точке производной.

1.7. Как схематично изобразить поведение функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 в каждом из следующих случаев:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = -\infty$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x) = -\infty$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x) = +\infty$.

Во всех четырех случаях касательная, проведенная в точке $M_0(x_0, y_0)$, будет перпендикулярна оси Ox (рис. 3–6).

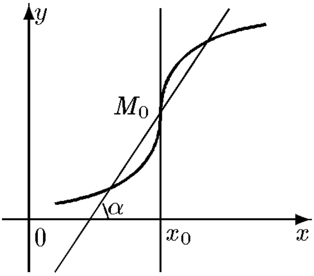


Рис. 3

$\operatorname{tg} \alpha > 0$, $f'(x_0) = +\infty$

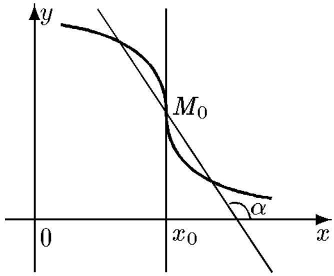


Рис. 4

$\operatorname{tg} \alpha < 0$, $f'(x_0) = -\infty$

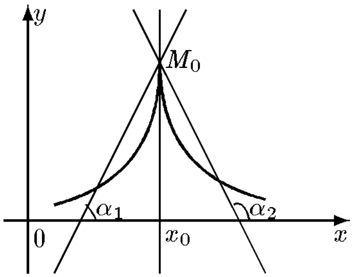


Рис. 5

$\operatorname{tg} \alpha_1 > 0$, $f'_-(x_0) = +\infty$

$\operatorname{tg} \alpha_2 < 0$, $f'_+(x_0) = -\infty$

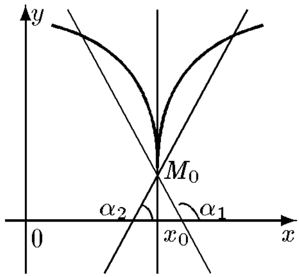


Рис. 6

$\operatorname{tg} \alpha_1 < 0$, $f'_-(x_0) = -\infty$

$\operatorname{tg} \alpha_2 > 0$, $f'_+(x_0) = +\infty$

Заметим, что в случаях, изображенных на рис. 3 и 4, принято считать, что производная существует и равна ∞. В случаях, изображенных на рис. 5 и 6, считается, что производная не существует (M_0 – угловая точка).

1.8. Является ли непрерывной функция, имеющая в точке x_0 производную?

Да, является. Это утверждение легко доказать. Пусть $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Это означает, что в окрестности точки x_0 отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ отличается от своего предела на бесконечно малую величину, то есть

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. В этом случае

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, что и означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0.

1.9. Указать среди утверждений 1–5 верные и ошибочные

1. Для того чтобы $\exists f'(x_0)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывной в точке x_0.

2. Для того чтобы $\exists f'(x_0)$, необходимо, чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывной в точке x_0.

3. Для того чтобы $\exists f'(x_0)$, достаточно, чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывной в точке x_0.

4. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывной в точке x_0, необходимо, чтобы $\exists f'(x_0)$.

5. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывной в точке x_0, достаточно, чтобы $\exists f'(x_0)$.

Из п. 1.5 и 1.8 следует, что верными являются утверждения 2 и 5. Утверждения 1, 3, 4 ошибочны.

2. Решение задач

2.1. Исходя из определения производной, найти производные заданных функций в указанных точках

Пример 1. $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$.

Решение. $f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^3 - 8}{\Delta x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 + 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3 - 8}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (12 + 6\Delta x + \Delta x^2) = 12.$$

Заметим, что по известной из школьного курса формуле $(x^n)' = nx^{n-1}$ будем иметь $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(2) = 12$.

Пример 2. $f(x) = \sqrt{x+3}$, $x_0 = 1$.

Решение. $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{(1+\Delta x)+3} - 2}{\Delta x} \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{4+\Delta x} - 2)(\sqrt{4+\Delta x} + 2)}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x} + 2)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4+\Delta x) - 4}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x} + 2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+\Delta x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Пример 3. $f(x) = \log_2 x$, $x_0 = 4$.

Решение. $f'(4) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\log_2(4+\Delta x) - \log_2 4}{\Delta x} \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_2(1 + \frac{\Delta x}{4})}{\frac{\Delta x}{4} \cdot 4} = \frac{1}{4\ln 2}.$$

Использовано следствие второго замечательного предела: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$. Полученный результат легко обобщается:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \ \forall x \in (0, +\infty).$$

В частном случае:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}, \ \forall x \in (0, +\infty).$$

Пример 4. $f(x) = a^x$, $x_0 \in R$.

Решение. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Использовано следствие второго замечательного предела:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$. В частном случае при $a=e$ будем иметь

$$(e^x)'=e^x\ln e=e^x.$$

Пример 5. $f(x)=\sin^2 x$, $x_0\in R$.

Решение. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin^2(x+\Delta x)-\sin^2 x}{\Delta x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sin(x+\Delta x)-\sin x)(\sin(x+\Delta x)+\sin x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})(\sin(x+\Delta x)+\sin x)}{2\cdot\frac{\Delta x}{2}}=$$

$$=\cos x\cdot 2\sin x=2\sin x\cos x=\sin 2x.$$

Использованы первый замечательный предел и непрерывность функций $y=\cos x$ и $y=\sin x$ $\forall x\in R$.

2.2. Механический смысл производной

Пример 1. Точка движется прямолинейно по закону $S=t^3+3t^2$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t_0=2$ до $t=2+\Delta t$, полагая $\Delta t=1;\ 0.5;\ 0.1;\ 0.03$. Найти скорость движения в конце второй секунды. Получить формулу для скорости точки в любой момент времени.

Решение. $V_{\text{ср}}=\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}\Rightarrow$ при $t_0=2$

$$V_{\text{ср}}=\frac{S(2+\Delta t)-S(2)}{\Delta t}=\frac{(2+\Delta t)^3+3(2+\Delta t)^2-20}{\Delta t}=$$

$$=\frac{8+12\Delta t+6\Delta t^2+\Delta t^3+12+12\Delta t+3\Delta t^2-20}{\Delta t}=$$

$$=\frac{24\Delta t+9\Delta t^2+\Delta t^3}{\Delta t}=24+9\Delta t+\Delta t^2.$$

При $\Delta t=1$ $V_{\text{ср}}=34$ м/с, $\Delta t=0.5$ $V_{\text{ср}}=28.75$ м/с,

$\Delta t=0.1$ $V_{\text{ср}}=24.91$ м/с, $\Delta t=0.03$ $V_{\text{ср}}=24.2709$ м/с.

Скорость движения в конце второй секунды будет равна $\lim\limits_{\Delta t\to 0}V_{\text{ср}}=24$ м/с. Заметим, что чем меньше Δt, тем меньше $V_{\text{ср}}$ отличается от скорости движения в конце второй секунды.

Формулу для скорости точки в любой момент времени t получим, если найдем производную от функции $S(t)$: $V(t)=S'(t)=3t^2+6t$. Заметим, что по этой формуле $V(2)=24$ м/с.

Пример 2. Угловую скорость равномерного вращения ω определяют как отношение угла поворота к соответствующему промежутку времени. Дать определение угловой скорости неравномерного вращения.

Решение. Пусть функция $\phi(t)$ выражает зависимость угла поворота при вращении тела относительно некоторой неподвижной оси от времени t. За промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ тело повернется на угол $\Delta\phi = \phi(t_0 + \Delta t) - \phi(t_0)$. Тогда отношение $\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t} = \dfrac{\phi(t_0 + \Delta t) - \phi(t_0)}{\Delta t}$ будет средней скоростью вращения тела в течение промежутка времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$. За угловую скорость вращения в момент времени t_0 естественно принять $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$, если этот предел существует. Итак,

$$\omega(t_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \phi'(t_0).$$

Таким образом, угловая скорость равна производной от функции $\phi(t)$ угла поворота по времени t, то есть $\omega(t) = \dfrac{d\phi}{dt}$.

Пример 3. Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за t секунд поворачивается на угол $\phi = 3 + 6t - t^2$. Определить угловую скорость вращения и момент остановки колеса.

Решение. По определению угловой скорости $\omega(t) = \phi'(t) = 6 - 2t$. В момент остановки колеса $\omega(t) = 0 \Rightarrow 6 - 2t = 0 \Rightarrow t = 3$ с.

Пример 4. Сила постоянного тока определяется как количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в единицу времени. Дать определение силы переменного тока.

Решение. Обозначим через $q(t)$ количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника от 0 до t. За промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ через поперечное сечение проводника протекает $\Delta q = q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)$ электричества. Если отношение $\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ не зависит от Δt, оно называется силой тока и является постоянной величиной. За силу переменного тока в момент времени t_0 естественно принять $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}$, если этот предел существует. Итак,

$$I(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'(t_0).$$

Таким образом, сила тока $I(t)$ равна производной по времени t от функции $q(t)$ количества электричества, то есть $I(t) = \dfrac{dq}{dt}$.

Пример 5. Количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника, задается формулой $q(t) = 2t^3 + 3t^2 + 5$. Найти силу тока в момент времени $t = 2$ с.

Решение. По определению силы переменного тока $I(t) = \dfrac{dq}{dt} = 6t^2 + 6t$. По этой формуле вычисляется сила тока в момент времени t. При $t = 2$ с будем иметь $I(2) = 36$ А.

Пример 6. Имеется тонкий неоднородный стержень AB длиной 20 см, на котором распределено некоторое количество вещества. Известно, что масса части AM этого стержня растет пропорционально квадрату расстояния точки M от точки A. Известно, что масса отрезка AM длиной 2 см равна 8 г. Найти

а) среднюю линейную плотность отрезка AM длиной 2 см;

б) среднюю линейную плотность всего стержня;

в) плотность стержня в произвольной точке M;

г) плотность в точке B.

Решение. В случае "а" задача решается просто: $\rho_{\text{ср}} = \dfrac{8}{2} = 4$ г/см. Для того чтобы решить задачу в остальных случаях, необходимо знать зависимость массы m отрезка AM от длины AM, которую обозначим через x. По условию задачи $m = kx^2$. Чтобы найти коэффициент пропорциональности k, воспользуемся тем, что при $x = 2$ $m = 8$, то есть $8 = k \cdot 4 \Rightarrow k = 2$. Таким образом, $m(x) = 2x^2$ – функциональная зависимость массы отрезка AM от его длины x. При $x = 20$ $m = 2 \cdot 400 = 800$ г – масса всего стержня. Тогда $\rho_{\text{ср}} = \dfrac{800}{20} = 40$ г/см – средняя линейная плотность всего стержня AB. В случаях "в" и "г" задача решается с помощью производной от функции $m(x)$. Возьмем на стержне AB точку P на расстоянии Δx от точки M (рис. 7). Тогда средняя линейная плотность отрезка MP будет равна отношению

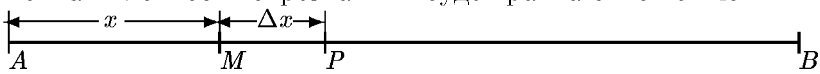


Рис. 7

$$\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta m}{\Delta x}.$$

За плотность распределения вещества в точке M естественно принять предел полученного отношения при $\Delta x \to 0$. Но

$$\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{\Delta m}{\Delta x}=m'(x).$$

Таким образом, $\rho(x)=\dfrac{dm}{dx}$ – линейная плотность распределения вещества в точке M, расположенной на расстоянии x от начала стержня. В нашем случае $m'(x)=(2x^2)'=4x$. При $x=20$ линейная плотность в точке B стержня $\rho=80$ г/см.

Мы рассмотрели лишь несколько простейших задач механики и физики, решение которых основано на интерпретации производной как скорости изменения той или иной переменной величины. Сила тока $I(t)=\dfrac{dq}{dt}$ – скорость изменения количества электричества с изменением времени, угловая скорость $\omega(t)=\dfrac{d\phi}{dt}$ – скорость изменения угла поворота, $V(t)=\dfrac{dS}{dt}$ – скорость изменения пути прямолинейно движущейся точки, плотность распределения масс в точках материального стержня $\rho(x)=\dfrac{dm}{dx}$ – скорость изменения массы стержня с изменением его длины. Скорость прироста населения, скорость течения химической реакции, скорость радиоактивного распада, скорость распространения некоторой информации – все это производные соответствующих функций.

Становится понятно, какую большую роль играет производная в различных областях естествознания. Поэтому очень важно узнавать задачи, решение которых сводится к нахождению предела отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, и уметь находить этот предел (производную).

2.3. Геометрический смысл производной

Пример 1. Найти тангенсы углов наклона касательных к графику функции $y=x^2$ в точках $M_1(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ и $M_2(-1,1)$ (рис. 8).

Решение. $\operatorname{tg}\alpha_1=f'(\frac{1}{2})$, $\operatorname{tg}\alpha_2=f'(-1)$ $f'(x)=2x\Rightarrow f'(\frac{1}{2})=1$, $f'(-1)=-2\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_1=1$, $\operatorname{tg}\alpha_2=-2$.

Пример 2. Получить уравнения касательной и нормали, проведенных к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 9).

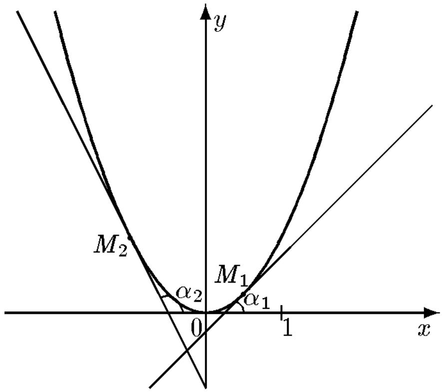


Рис. 8

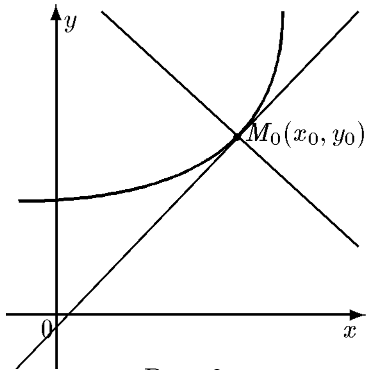


Рис. 9

Решение. Определение касательной было дано в п. 1.2. Нормалью называют прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно касательной. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом k:

$$y = y_0 + k(x - x_0).$$

Для касательной $k = f'(x_0)$, для нормали $k = -\frac{1}{f'(x_0)}$ (так как для перпендикулярных прямых $k_1 \cdot k_2 = -1$). Таким образом,

$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной,

$y = y_0 - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ – уравнение нормали.

Уравнение нормали получено при условии, что $f'(x_0) \neq 0$. Если же $f'(x_0) = 0$, то касательная будет параллельна оси Ox, а нормаль будет перпендикулярна оси Ox. В этом случае $y = y_0$ будет уравнением касательной, а $x = x_0$ – уравнением нормали в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Пример 3. Составить уравнения касательной и нормали к гиперболе $y = \dfrac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = \dfrac{1}{2}$ (рис. 10).

Решение. Производную функции $y = \dfrac{1}{x}$ найдем по формуле $(x^n)' = nx^{n-1}$. В нашем случае:

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$
$f'(\frac{1}{2}) = -4$ – угловой коэффициент касательной;
$-\frac{1}{f'(\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$ – угловой коэффициент нормали. Тогда

$y = 2 - 4(x - \frac{1}{2})$ – уравнение касательной;
$y = 2 + \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2})$ – уравнение нормали.

Преобразуя уравнения, получим

$y = -4x + 4$ – уравнение касательной;
$y = \frac{1}{4}x + 1\frac{7}{8}$ – уравнение нормали.

Пример 4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \sin^2 x$ в точках $M_1(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$ и $M_2(\frac{\pi}{2}, 1)$ (рис. 11).

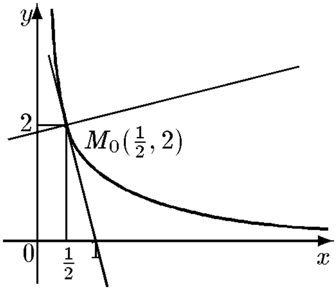


Рис. 10

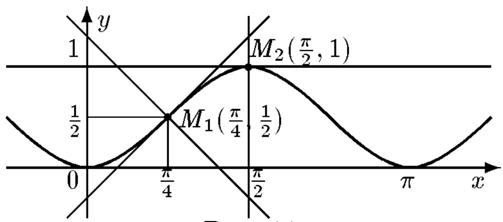


Рис. 11

Решение. Производная функции $y = \sin^2 x$ получена в п. 2.1:

$$y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = 1,\ f'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Уравнения касательной и нормали в точке $M_1(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$ будут иметь вид

$$y = \frac{1}{2} + (x - \frac{\pi}{4}) \text{ и } y = \frac{1}{2} - (x - \frac{\pi}{4}).$$

Так как $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$, то касательная, проведенная в точке $M_2(\frac{\pi}{2}, 1)$, будет параллельна оси Ox и, следовательно, будет иметь уравнение $y = 1$. Тогда нормаль будет иметь уравнение $x = \frac{\pi}{2}$.

Пример 5. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \sqrt[3]{x - 1}$ в точке $M_0(1, 0)$.

Решение. Производную заданной функции в точке $x_0 = 1$ найдем по определению

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(1 + \Delta x) - 1} - 0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^{1/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} = +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ касательная в точке $M_0(1,0)$ будет перпендикулярна оси Ox и, следовательно, будет иметь уравнение $x = 1$. Тогда уравнением нормали в точке $M_0(1,0)$ будет $y = 0$ (рис. 12).

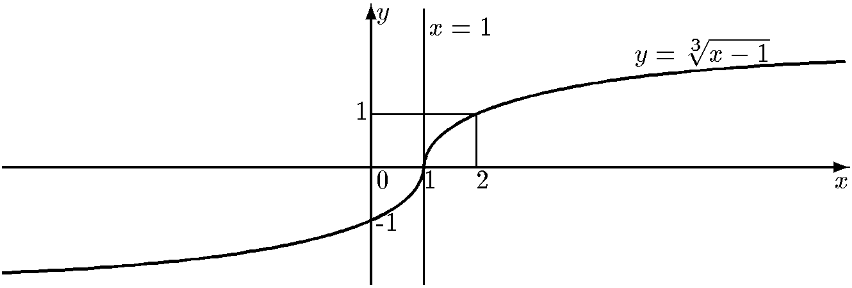


Рис. 12

Пример 6. В какой точке кривой $y = x^3 + x - 2$ касательная к ней будет параллельна прямой $y = 4x - 1$?

Решение. По условию задачи угловой коэффициент касательной в искомых точках должен быть равен числу 4. Поэтому абсциссы этих точек должны удовлетворять уравнению $f'(x) = 4$ или $3x^2 + 1 = 4$. Решая уравнение, найдем $x_{1,2} = \pm 1$. Таким образом, в точках $M_1(1,0)$ и $M_1(-1,-4)$ касательные к графику функции $y = x^3 + x - 2$ будут параллельны прямой $y = 4x - 1$.

Пример 7. Хорда параболы $y = x^2 - 2x + 5$ соединяет точки с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Составить уравнение касательной к параболе, параллельной хорде.

Решение. Чтобы найти угловой коэффициент хорды, составим ее уравнение, воспользовавшись тем, что она проходит через точки $M_1(1,4)$ и $M_2(3,8)$:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-4}{8-4} \Rightarrow y = 2x + 2.$$

Таким образом, угловой коэффициент искомой касательной равен 2. Абсциссу точки касания найдем из уравнения $f'(x) = 2$ или $2x - 2 = 2$, откуда $x_0 = 2$ – абсцисса точки касания, $y_0 = 5$ – ордината точки касания. Уравнение искомой касательной: $y = 5 + 2(x - 2)$ или $y = 2x + 1$.

2.4. Примеры непрерывных в точке x_0 функций, не имеющих в этой точке производных

Пример 1. Убедиться, что функция

$$f(x)=\begin{cases} 2x\,, \text{ если } -\infty < x \leqslant 1, \\ x+1\,, \text{ если } x>1, \end{cases}$$

непрерывна в точке $x_0=1$, но не имеет в этой точке производной.

Решение. Вспомним, что условие непрерывности функции $y=f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

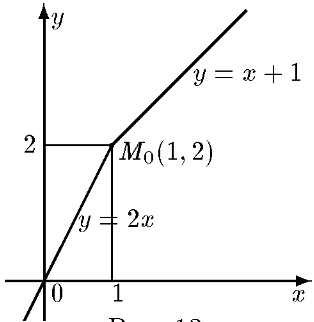


Рис. 13

Найдем

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} 2x = 2,$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (x+1) = 2.$$

По условию $f(1)=2$. Таким образом, условие непрерывности в точке $x_0=1$ выполнено, функция в точке $x_0=1$ непрерывна.

Найдем односторонние производные функции $f(x)$ в точке $x_0=1$:

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{2(1+\Delta x)-2}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{(1+\Delta x+1)-2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

$f'_-(1) \neq f'_+(1) \Rightarrow$ непрерывная в точке $x_0=1$ функция $y=f(x)$ не имеет производной в этой точке. График функции изображен на рис. 13. Точка $M_0(1,2)$ – угловая точка графика функции $y=f(x)$.

Пример 2. Убедиться, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x}\,, \text{ если } x\neq 0, \\ 0\,, \text{ если } x=0, \end{cases}$$

непрерывна в точке $x_0=0$, но не имеет в этой точке производной ни слева, ни справа.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{x} = 0$ (по теореме, которая утверждает, что произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию есть величина бесконечно малая) и по условию $f(0) = 0$, то заключаем, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$. Попытаемся найти $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\sin\frac{\pi}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\pi}{\Delta x}.$$

При $\Delta x\to 0$ аргумент синуса $\frac{\pi}{\Delta x}\to\infty \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\pi}{\Delta x}$ не существует.

Таким образом, функция $f(x)$ не имеет в точке $x = 0$ производной ни слева, ни справа.

Пример 3. Убедиться, что непрерывная на всей числовой оси функция $y = |\sin x|$ не имеет производной в точках $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Решение. Найдем односторонние производные функции в точках $x = k\pi$:

$$f'_-(k\pi) = \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{|\sin(k\pi + \Delta x)| - |\sin k\pi|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\sin\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$f'_+(k\pi) = \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{|\sin(k\pi + \Delta x)| - |\sin k\pi|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Так как $f'_-(k\pi) \neq f'_+(k\pi)$, то функция $y = |\sin x|$ в точках $x = k\pi$ производной не имеет. Соответствующие точки графика этой функции – угловые точки (рис. 14).

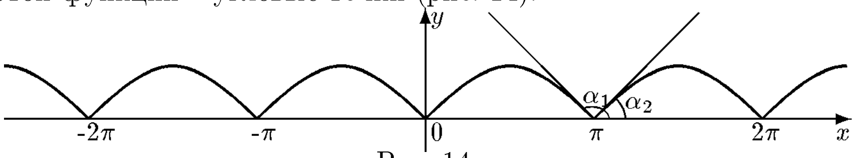


Рис. 14

$$f'_-(\pi) = -1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_1 = -1 \Rightarrow \alpha_1 = 135^\circ$$

$$f'_+(\pi) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$$

3. Перечень задач для самостоятельной работы

3.1. Исходя из определения производной, найти производные заданных функций в указанных точках:

1) $f(x) = 2x^3 + 3x - 2, \qquad x_0 = 1;$
2) $f(x) = \dfrac{4}{x^2}, \qquad x_0 = 2;$
3) $f(x) = \sqrt{6-5x}, \qquad x_0 = -2;$
4) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}, \qquad x_0 = 4;$
5) $f(x) = \operatorname{tg} 2x, \qquad x_0 = \frac{\pi}{8};$
6) $f(x) = \cos^3 x, \qquad x_0 = 0;$
7) $f(x) = \sqrt{1-\cos x}, \qquad x_0 = \frac{\pi}{2};$
8) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}, \qquad x_0 = -2.$

3.2. В каких точках кривой $y = \dfrac{x^3}{3}$ касательная к ней:

1) параллельна оси Ox;
2) образует с осью Ox угол $45°$;
3) параллельна прямой $4x - y + 1 = 0$;
4) перпендикулярна прямой $9x + y - 1 = 0$?

3.3. При каком значении аргумента x касательные к кривым $y = 4x^2$ и $y = \sqrt{x}$ будут параллельны?

3.4. Используя найденные в задаче 3.1 производные, составить уравнения касательных и нормалей к графикам заданных функций в точках с указанной абсциссой x_0.

Ответы: 1) $y = 9x - 6$, $y = -\frac{1}{9}x + 3\frac{1}{9}$;
2) $y = -x + 3$, $y = x - 1$;
3) $y = -\frac{5}{8}x + 2\frac{3}{4}$, $y = \frac{8}{5}x + 7\frac{1}{5}$;
4) $y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{2}$, $y = 8x - 31$;
5) $y = 4x + 1 - \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{1}{4}x + 1 + \frac{\pi}{32}$;
6) $y = 1$, $x = 0$;
7) $y = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{\pi}{4}$, $y = -2x + 1 + \pi$;
8) $x = -2$, $y = 0$.

3.5. Задана функция $y = |x|$. Требуется:

1. Найти $f'(2)$ и $f'(-2)$.

2. Убедиться, что производная в точке $x = 0$ не существует (с этой целью найти $f'_-(0)$ и $f'_+(0)$).

3.6. Для функции $f(x) = |\cos x|$ найти односторонние производные $f'_-(\frac{\pi}{2})$ и $f'_+(\frac{\pi}{2}))$ и составить уравнения односторонних касательных в точке $M_0(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Ответ: $y = -x + \frac{\pi}{2}$ – касательная слева,
$y = x - \frac{\pi}{2}$ – касательная справа.

3.7. Задана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,, \text{ если } -\infty < x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}\,, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Требуется:

1. Убедиться, что функция непрерывна в точке $x = 0$.

2. Найти $f'_-(0)$ и $f'_+(0)$).

3. Составить уравнения односторонних касательных к графику функции $f(x)$ в точке $O(0, 0)$.

Ответ: $y = 0$ – уравнение касательной слева,
$x = 0$ – уравнение касательной справа.

3.8. Точка движется прямолинейно по закону $S = \frac{1}{3}t^3 + t^2$. Требуется:

1. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t = 2$ до $t = 2 + \Delta t$, полагая $\Delta t = 1; 0.1; 0.01$.

2. Найти скорость движения в конце второй секунды.

3. Найти скорость движения в любой момент времени t.

3.9. Свободно падающее тело движется по закону $S = \frac{gt^2}{2}$. Получить формулу для скорости падающего тела и с ее помощью найти скорость движения тела в конце пятой и в конце десятой секунды от начала падения.

3.10. Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $S = \frac{1}{2}t^2 + t + 1$, где S измеряется в сантиметрах, t – в секундах. Найти кинетическую энергию тела в момент времени $t = 3$ с.

3.11. Количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t, прошедшее от начала, задано формулой $q(t) = t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 4t$. Найти силу тока в момент времени $t = 3$ с.

3.12. Масса тонкого неоднородного стержня изменяется в зависимости от его длины x по закону $m(x) = 3x^2 + 2x$. По какому закону будет изменяться плотность $\rho(x)$ распределения масс?

3.13. Если бы процесс радиоактивного распада протекал равномерно, то под скоростью распада следовало бы понимать количество вещества, разложившегося в единицу времени. На самом деле процесс протекает неравномерно. Дать определение скорости радиоактивного распада.

Замечание. Более сложные и интересные примеры на вычисление и применение производной мы будем иметь возможность решать, лишь освоив технику вычисления производной по правилам, позволяющим находить производные функций без непосредственного использования понятия производной. Операцию нахождения производной функции $f(x)$ принято называть дифференцированием функции. Это объясняется тем, что с понятием производной тесно связано другое фундаментальное понятие математического анализа – понятие дифференциала функции, которому будет посвящена тема 3.

Тема 2. Техника дифференцирования функции

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Как найти производную суммы, произведения и частного двух функций, каждая из которых имеет производную в рассматриваемой точке?

Это делается по формулам:
1. $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$.
2. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$.

В частном случае имеем $(C \cdot v(x))' = C \cdot v'(x)$ (так как $C' = 0$), то есть константу можно выносить за знак производной.

3. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$, где $v(x) \neq 0$.

В частном случае $\left(\dfrac{C}{v(x)}\right)' = -\dfrac{C \cdot v'(x)}{v^2(x)}$, если $v(x) \neq 0$.

1.2. Как найти производную сложной функции?

При дифференцировании сложной функции используется

Теорема 1. Пусть функции $y = f(u)$ и $u = g(x)$ определяют сложную функцию $y = f(g(x))$ в некоторой окрестности точки x_0. Если при этом функция $u = g(x)$ имеет в точке x_0 производную $g'(x_0)$, а функция $y = f(u)$ имеет в точке $u_0 = g(x_0)$ производную $f'(u_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ будет иметь в точке x_0 производную, которая находится по формуле

$$y'(x_0) = f'(u_0) g'(x_0) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Смысл теоремы в том, что для нахождения производной сложной функции достаточно найти и перемножить производные всех простейших элементарных функций, суперпозицией которых является данная сложная функция.

Пример 1. Найти производную функции $y = \sin^3 x$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Решение. В нашем случае $y = u^3$, $u = \sin x$, x – любое действительное число. По формуле $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = (u^3)'(\sin x)' = 3u^2 \cdot \cos x = 3\sin^2 x \cos x.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \sin^3(\ln x)$ $\forall x \in (0, +\infty)$.

Решение. Данная функция является суперпозицией уже не двух, а трех элементарных функций: $y = u^3$, $u = \sin v$, $v = \ln x$. В этом случае формула для производной сложной функции будет содержать уже три сомножителя, а именно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx},$$

где $\frac{dy}{du} = 3u^2$, $\frac{du}{dv} = \cos v$, $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$. Таким образом,

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot \cos v \cdot \frac{1}{x} = 3\sin^2(\ln x)\cos(\ln x)\frac{1}{x}.$$

Если, например, $x_0 = 1$, то

$$y'(1) = 3\sin^2(\ln 1)\cos(\ln 1)\frac{1}{1} = 3\sin^2 0 \cdot \cos 0 \cdot 1 = 0.$$

Заметим, что, как правило, при нахождении производных промежуточные аргументы не вводятся. Главное, что нужно выяснить, суперпозицией каких элементарных функций является данная сложная функция, и после этого перемножить производные всех элементарных функций, из которых составлена сложная функция. Именно поэтому правило дифференцирования сложной функции иногда называют цепным.

Пример 3. Найти производную функции $y = 7^{\sin(\ln 5x)}$ $x > 0$.

Решение. Данная функция является суперпозицией четырех элементарных функций: показательной, тригонометрической, логарифмической и линейной. Поэтому при дифференцировании данной функции мы будем использовать полученные ранее производные перечисленных элементарных функций. При этом на каждом этапе дифференцирования будет использоваться теорема о производной сложной функции.

1. Так как $(a^x)' = a^x \ln a$, то по теореме о производной сложной функции $(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \ln a \cdot u'(x) \Rightarrow (7^{\sin(\ln 5x)})' =$
$= 7^{\sin(\ln 5x)} \ln 7 \cdot (\sin(\ln 5x))'$.

2. $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow (\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot u'(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\sin(\ln 5x))' = \cos(\ln 5x)(\ln 5x)'$.

3. $(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow (\ln u(x))' = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x) \Rightarrow (\ln 5x)' = \frac{1}{5x}(5x)'$.

4. $(5x)' = 5$.

Таким образом,

$$(7^{\sin(\ln 5x)})' = \underbrace{7^{\sin(\ln 5x)} \ln 7}_{1} \cdot \underbrace{\cos(\ln 5x)}_{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{5x}}_{3} \cdot \underbrace{5}_{4}.$$

Результат дифференцирования сложной функции, составленной из четырех элементарных функций, представляет собой цепочку из четырех звеньев, каждое из которых получено по формуле для производной от соответствующей элементарной функции.

Пример 4. Найти производные гиперболических функций $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции $(e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = e^{-x}(-1)' = -e^{-x}$, поэтому

1. $$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

2. $$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

3. $$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - (\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} =$$
$$= \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Была использована формула $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

4. $$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x - (\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Заметим, что производные от гиперболических функций отличаются от производных соответствующих тригонометрических функций только в случае функции $y = \operatorname{ch} x$, а именно $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, в то время как $(\cos x)' = -\sin x$.

1.3. Как найти производную обратной функции?

Для нахождения производной обратной функции используется следующая

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и при этом $\exists f'(x_0) \neq 0$, то ее обратная функция $x = \phi(y)$ будет иметь в точке $y_0 = f(x_0)$ производную, которая находится по формуле

$$\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ или } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \text{ откуда } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Пример 1. Найти производную функции $y = \arcsin x$ для $x \in (-1, 1)$.

Решение. Так как $y = \arcsin x$ и $x \in (-1, 1)$, то $x = \sin y$, где $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Функция $x = \sin y$ строго монотонна и непрерывна на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, при этом $\dfrac{dx}{dy} = \cos y \neq 0$ на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Условия теоремы выполнены, поэтому

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Таким образом, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$. Аналогично доказывается, что $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

Самостоятельно рекомендуется доказать, что

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \ x \in (-\infty, \infty).$$

При изложении темы 1 и темы 2 были получены производные всех простейших элементарных функций. Для удобства их использования сведем эти производные в табл. 1.

Чтобы облегчить приобретение навыка дифференцирования сложных функций, запишем табл. 2 для производных подобных функций, опираясь на теорему о производной сложной функции.

Таблица 1

1.	$y = C$	$y' = 0$	
2.	$y = x^a$	$y' = ax^{a-1}$	
	$y = x$	$y' = 1$	
	$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
3.	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	
	$y = e^x$	$y' = e^x$	
4.	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$x > 0$
	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
5.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	
6.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	
7.	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$
8.	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \pi k$
9.	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$-1 < x < 1$
10.	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$-1 < x < 1$
11.	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	
12.	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$	
13.	$y = \operatorname{sh} x$	$y' = \operatorname{ch} x$	
14.	$y = \operatorname{ch} x$	$y' = \operatorname{sh} x$	
15.	$y = \operatorname{th} x$	$y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	
16.	$y = \operatorname{cth} x$	$y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \neq 0$

Согласно этой теореме, например, формула $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ в случае сложной функции $y = \ln u(x)$ будет иметь вид $(\ln u(x))' = \dfrac{1}{u(x)} u'(x)$. Остальные формулы таблицы получаются аналогичным образом.

Заметим, что табл. 1 является частным случаем табл. 2 при $u(x) = x$.

Таблица 2

1.	$y = Cu(x)$	$y' = C \cdot u'(x)$	
2.	$y = u(x)^a$	$y' = au(x)^{a-1} \cdot u'(x)$	
	$y = \sqrt{u}(x)$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x)$	$u(x) > 0$
3.	$y = a^u(x)$	$y' = a^{u(x)} \ln a \cdot u'(x)$	
	$y = e^u(x)$	$y' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$	
4.	$y = \log_a u(x)$	$y' = \dfrac{1}{u(x) \ln a} \cdot u'(x)$	$u(x) > 0$
	$y = \ln u(x)$	$y' = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$	$u(x) > 0$
5.	$y = \sin u(x)$	$y' = \cos u(x) \cdot u'(x)$	
6.	$y = \cos u(x)$	$y' = -\sin u(x) \cdot u'(x)$	
7.	$y = \operatorname{tg} u(x)$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x)$	$u(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$
8.	$y = \operatorname{ctg} u(x)$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot u'(x)$	$u(x) \neq \pi k$
9.	$y = \arcsin u(x)$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2(x)}} \cdot u'(x)$	$-1 < u(x) < 1$
10.	$y = \arccos u(x)$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2(x)}} \cdot u'(x)$	$-1 < u(x) < 1$
11.	$y = \operatorname{arctg} u(x)$	$y' = \dfrac{1}{1 + u^2(x)} \cdot u'(x)$	
12.	$y = \operatorname{arcctg} u(x)$	$y' = -\dfrac{1}{1 + u^2(x)} \cdot u'(x)$	
13.	$y = \operatorname{sh} u(x)$	$y' = \operatorname{ch} u(x) \cdot u'(x)$	
14.	$y = \operatorname{ch} u(x)$	$y' = \operatorname{sh} u(x) \cdot u'(x)$	
15.	$y = \operatorname{th} u(x)$	$y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u(x)} \cdot u'(x)$	
16.	$y = \operatorname{cth} u(x)$	$y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u(x)} \cdot u'(x)$	$u(x) \neq 0$

Чтобы отработать до автоматизма технику дифференцирования, таблицы для производных простейших элементарных функций необходимо запоминать наизусть.

2. Решение задач

2.1. Производные простейших элементарных функций

Найти производные заданных функций, используя табл. 1 и правила дифференцирования суммы, произведения и частного:

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u,$$

$$(C \cdot v)' = C \cdot v', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}, \ v \neq 0.$$

Чтобы не отвлекать внимание от техники дифференцирования, его результаты в некоторых случаях будем оставлять без преобразования.

Пример 1. $y = 5x^4 + 2\sqrt{x} + 7$.

Решение. Заданная функция представляет собой сумму трех слагаемых, поэтому воспользуемся формулой для производной суммы, при этом константы в двух первых слагаемых можно будет вынести за знак производной:

$$y' = 5(x^4)' + 2(\sqrt{x})' + 7' = 5 \cdot 4x^3 + 2\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = 20x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Были использованы формулы 2 и 1 табл. 1.

Пример 2. $y = (\sqrt[5]{x^3} - 3x)(3\sqrt[3]{x} + 12\sqrt[6]{x^5} - 2)$.

Решение. Запишем функцию в удобной для дифференцирования форме $y = (x^{3/5} - 3x)(3x^{1/3} + 12x^{5/6} - 2)$ и воспользуемся формулой для производной произведения:

$$y' = (x^{\frac{3}{5}} - 3x)'(3x^{\frac{1}{3}} + 12x^{\frac{5}{6}} - 2) + (x^{\frac{3}{5}} - 3x)(3x^{\frac{1}{3}} + 12x^{\frac{5}{6}} - 2)' =$$

$$= \left(\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} - 3\right)(3x^{\frac{1}{3}} + 12x^{\frac{5}{6}} - 2) + (x^{\frac{3}{5}} - 3x)\left(3 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 12 \cdot \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} - 3\right)(3\sqrt[3]{x} + 12\sqrt[6]{x^5} - 2) + (\sqrt[5]{x^3} - 3x)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{10}{\sqrt[6]{x}}\right).$$

Пример 3. $y = \dfrac{2x^3}{7 - 3x^2}$.

Решение. Используем формулу производной частного:

$$y' = 2\left(\frac{x^3}{7 - 3x^2}\right)' = 2\frac{(x^3)'(7 - 3x^2) - x^3(7 - 3x^2)'}{(7 - 3x^2)^2} =$$

$$= 2\frac{3x^2(7 - 3x^2) - x^3(0 - 6x)}{(7 - 3x^2)^2} = 2\frac{21x^2 - 3x^4}{(7 - 3x^2)^2} = \frac{6x^2(7 - x^2)}{(7 - 3x^2)^2}.$$

Пример 4. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

Решение. Слагаемые данной суммы можно продифференцировать как частное, но проще будет найти производную, представив функцию в виде $y = x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}$. Тогда
$$y' = -1 \cdot x^{-3} + (-2)x^{-3} + (-3)x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}.$$
Заметим, что $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$, и в дальнейшем будем этим пользоваться.

Пример 5. $y = \frac{x^3 + \cos x}{\ln 7}$.

Решение. В знаменателе данной функции стоит константа, поэтому нет смысла использовать формулу для производной дроби; проще найти производную, записав функцию в виде $y = \frac{1}{\ln 7}(x^3 + \cos x)$. Тогда
$$y' = \frac{1}{\ln 7}(x^3 + \cos x)' = \frac{1}{\ln 7}(3x^2 - \sin x).$$

Пример 6. $y = 7 \cdot 2^{3x+1}$.

Решение. Чтобы воспользоваться табличной производной $(a^x)' = a^x \ln a$, запишем функцию в виде $y = 7 \cdot 2^{3x} \cdot 2 = 14 \cdot 8^x$. Тогда
$$y' = 14 \cdot (8^x)' = 14 \cdot 8^x \ln 8.$$

Пример 7. $y = (x \sin\alpha + \cos\alpha)(x \cos\alpha + \sin\alpha)$.

Решение. Используем формулу производной произведения, учитывая, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ – постоянные величины:
$$\begin{aligned} y' &= (x \sin\alpha + \cos\alpha)'(x \cos\alpha + \sin\alpha) + \\ &+ (x \sin\alpha + \cos\alpha)(x \cos\alpha + \sin\alpha)' = \\ &= (\sin\alpha + 0)(x \cos\alpha + \sin\alpha) + (x \sin\alpha + \cos\alpha)(\cos\alpha + 0) = \\ &= x \sin\alpha \cos\alpha + \sin^2\alpha + x \sin\alpha \cos\alpha + \cos^2\alpha = \\ &= 2x \sin\alpha \cos\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = x \sin 2\alpha + 1. \end{aligned}$$
Здесь были использованы формулы тригонометрии
$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha \text{ и } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Пример 8. $y = \frac{3 \operatorname{arctg} x}{5(1 + x^2)}$.

Решение. По формуле производной частного имеем
$$y' = \frac{3}{5}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\right)' = \frac{3}{5}\frac{(\operatorname{arctg} x)'(1 + x^2) - (\operatorname{arctg} x)(1 + x^2)'}{(1 + x^2)^2} =$$

$$= \frac{3}{5}\frac{\frac{1}{1+x^2}(1+x^2) - \operatorname{arctg} x 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3}{5}\frac{1-2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}.$$

Были использованы формулы 2 и 11 табл. 1.

Пример 9. $y = (1-x^2)\arccos x$.

Решение. По формуле производной произведения имеем

$$y' = (1-x^2)'\arccos x + (1-x^2)(\arccos x)' =$$

$$= -2x\arccos x + (1-x^2)(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) = -2x\arccos x - \sqrt{1-x^2}.$$

Были использованы формулы 2 и 10 табл. 1.

Пример 10. Сравнить производные функций $y = \sin x\cos x$ и $y = \operatorname{sh} x\operatorname{ch} x$.

Решение. $(\sin x\cos x)' = (\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)' =$

$= \cos x\cdot\cos x + \sin x(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x,$

$(\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x)' = (\operatorname{sh} x)'\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x)' =$

$= \operatorname{ch} x\cdot\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x\cdot\operatorname{sh} x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x.$

Были использованы формулы 5, 6, 13 и 14 табл. 1, а также

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha \text{ и } \operatorname{ch}^2\alpha + \operatorname{sh}^2\alpha = \operatorname{ch} 2\alpha.$$

Интересно, что производные обеих функций имеют одну и ту же форму записи.

Пример 11. $y = 2^x\cdot 3^x(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$.

Решение. Запишем функцию в виде $y = 6^x(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$ и воспользуемся формулой для производной произведения:

$$y' = 6^x\ln 6\cdot(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + 6^x(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}) =$$

$$= 6^x\ln 6\cdot(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + 6^x\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} =$$

$$= 6^x\ln 6\cdot(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) - 4\cdot 6^x\operatorname{ctg} 2x\frac{1}{\sin 2x}.$$

Были использованы формулы 3, 7 и 8 табл. 1.

Пример 12. $S(t) = \frac{3}{5-2t} + \frac{t^2}{2}$. Найти $S'(0)$ и $S'(2)$.

Решение. $S'(t) = \dfrac{3'(5-2t) - 3(5-2t)'}{(5-2t)^2} + \dfrac{2t}{2} = \dfrac{6}{(5-2t)^2} + t.$

В указанных точках $S'(0) = \frac{6}{25}$, $S'(2) = 6 + 2 = 8$.

Пример 13. $r(\phi) = \dfrac{\sin\phi}{1-\cos\phi}$. Найти $\dfrac{dr(\pi/2)}{d\phi}$ и $\dfrac{dr(\pi)}{d\phi}$.

Решение. $\dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{(\sin\phi)'(1-\cos\phi) - (\sin\phi)(1-\cos\phi)'}{(1-\cos\phi)^2} =$

$$= \frac{\cos\phi(1-\cos\phi) - \sin\phi(0+\sin\phi)}{(1-\cos\phi)^2} =$$

$$= \frac{\cos\phi - \cos^2\phi - \sin^2\phi}{(1-\cos\phi)^2} = \frac{\cos\phi - 1}{(\cos\phi-1)^2} = \frac{1}{\cos\phi - 1}.$$

В указанных точках $\dfrac{dr(\pi/2)}{d\phi} = -1$, $\dfrac{dr(\pi)}{d\phi} = -\dfrac{1}{2}$.

Пример 14. $z(y) = (\sqrt[3]{y^2}+1)y$. Найти $\dfrac{dz(8)}{dy}$.

Решение. $\dfrac{dz}{dy} = (y^{2/3}+1)'y + (y^{2/3}+1)y' = \dfrac{2}{3}y^{-1/3}y +$
$+ (y^{2/3}+1)\cdot 1 = \dfrac{5}{3}y^{2/3} + 1 \Rightarrow \dfrac{dz(8)}{dy} = \dfrac{5}{3}\cdot 8^{2/3} + 1 = \dfrac{5}{3}\cdot 4 + 1 = \dfrac{23}{3}$.

Пример 15. $v(t) = \dfrac{1-e^t}{1+e^t}$. Найти $v'(0)$.

Решение. $v'(t) = \dfrac{(1-e^t)'(1+e^t) - (1-e^t)(1+e^t)'}{(1+e^t)^2} =$

$$= \frac{-e^t(1+e^t) - (1-e^t)e^t}{(1+e^t)^2} = \frac{-2e^t}{(1+e^t)^2} \Rightarrow v'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Пример 16. $y = \dfrac{\arcsin x}{1-x^2}$. Найти $y'(\frac{1}{2})$.

Решение. $y' = \dfrac{(\arcsin x)'(1-x^2) - (\arcsin x)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} =$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2) - (\arcsin x)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} + 2x\arcsin x}{(1-x^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}}{(1-\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{\pi}{6}}{(\frac{3}{4})^2} = \frac{16}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right).$$

Следующие примеры рекомендуется решить самостоятельно, предварительно выучив табл. 1 производных основных элементарных функций.

1. $y = 7x^3 + \dfrac{x^2}{2} - 3x$; 2. $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{5}$;
3. $y = \sqrt{x}(7 - \sqrt[5]{x^3})$; 4. $y = \sqrt[5]{7}(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}})$;
5. $y = \dfrac{2x-x^3}{3(4-x^2)}$; 6. $y = \dfrac{7-5x^2}{\operatorname{arctg} 2}$; 7. $y = \dfrac{x}{1-\cos x}$;
8. $y = x^e\cdot e^x$; 9. $y = 10^x\cdot\lg x$; 10. $y = 10^x\cdot\lg\pi$;

11. $y = \dfrac{1+x^2}{\operatorname{arctg} x}$; 12. $y = \dfrac{1}{\arcsin x}$; 13. $y = \dfrac{1-\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{ch} x}$;

14. $y = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{th} x$; 15. $S(t) = \dfrac{t}{1-t^2}$. Найти $S'(0)$ и $S'(2)$.

16. $v(t) = \dfrac{2}{\sqrt{t}} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{t}}$. Найти $\dfrac{dv(1)}{dt}$.

17. $r(\phi) = \phi \cdot \sin\phi + \cos\phi$. Найти $r'(\frac{2}{3}\pi)$.

18. $r(\phi) = (2-\phi^2)\cos\phi + 2\phi\sin\phi$. Найти $\dfrac{dr}{d\phi}$.

Ответы:

4. $y' = \sqrt[5]{7}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{3}{2x\sqrt{x}}\right)$; 5. $y' = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^4 - 10x^2 + 8}{(4-x^2)^2}$;

6. $y' = -\dfrac{10x}{\operatorname{arctg} 2}$; 8. $y' = e^x \cdot x^{e-1}(e+x)$;

12. $y' = -\dfrac{1}{\arcsin^2 x}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 16. $\dfrac{dv(1)}{dt} = -2$.

2.2. Производная сложной функции

Напомним правило дифференцирования сложной функции $y = f(u(x))$, рассмотренное в п. 1.2:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Используя это правило и табл. 2, требуется найти производные от заданных функций.

Пример 1. $y = \operatorname{tg}^5 x$.

Решение. Данная функция является композицией степенной и тригонометрической функций. Используя формулу 2, будем иметь

$$y' = 5\operatorname{tg}^4 x(\operatorname{tg} x)' = 5\operatorname{tg}^4 x\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Пример 2. $y = \sqrt[3]{\ln^2 x}$.

Решение. Запишем функцию в виде $y = (\ln x)^{2/3}$. Данная функция является композицией степенной и логарифмической функций. По той же формуле 2 будем иметь

$$y' = \frac{2}{3}(\ln x)^{-1/3}(\ln x)' = \frac{2}{3\sqrt[3]{\ln x}}\frac{1}{x}.$$

Пример 3. $y = 2^{\sin x}$.

Решение. Функция является композицией показательной и тригонометрической функций. По формуле 3 табл. 2 будем иметь

$y' = 2^{\sin x}\ln 2(\sin x)' = 2^{\sin x}\ln 2\cdot\cos x.$

Пример 4. $y = 2^{\sin(\ln x)}$.

Решение. Данная функция является композицией уже трех элементарных функций – показательной, тригонометрической и логарифмической. По формуле 3 имеем
$$y' = 2^{\sin(\ln x)}\ln 2(\sin(\ln x))'.$$
В свою очередь, по формуле 5 имеем
$$(\sin(\ln x))' = \cos(\ln x)(\ln x)' = \cos(\ln x)\frac{1}{x}.$$
Окончательно будем иметь
$$y' = \underbrace{2^{\sin(\ln x)}\ln 2}_{1}\cdot\underbrace{\cos(\ln x)}_{2}\underbrace{\frac{1}{x}}_{3}.$$
Результат дифференцирования – цепочка из трех сомножителей, каждый из которых получен по формуле для производной соответствующей элементарной функции.

Пример 5. $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

Решение. Функция является композицией показательной, обратной тригонометрической и степенной функций. По формуле 3 будем иметь
$$y' = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}(\operatorname{arctg}\sqrt{x})'.$$
По формуле 11 имеем
$$(\operatorname{arctg}\sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}(\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
Окончательно будем иметь
$$y' = \underbrace{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}}_{1}\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{2}\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{3}.$$

Пример 6. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}\frac{x}{3})$.

Решение. Функция является композицией обратной тригонометрической, гиперболической и линейной функций. Используя формулы 11 и 13 табл. 2, будем иметь
$$y' = \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{3}}\operatorname{ch}\frac{x}{3}\frac{1}{3}.$$
Так как для гиперболических функций $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, то окончательно будем иметь

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \dfrac{x}{3}} \operatorname{ch} \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3 \operatorname{ch} \dfrac{x}{3}}.$$

Пример 7. $y = \sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 7x))$.

Решение. Функция является суперпозицией шести элементарных функций; соответственно результат дифференцирования будет представлять собой цепочку из шести звеньев:

$$y' = \underbrace{\cos(\cos^2(\operatorname{tg}^3 7x))}_{1} \cdot \underbrace{2\cos(\operatorname{tg}^3 7x)}_{2} \cdot \underbrace{(-\sin(\operatorname{tg}^3 7x))}_{3} \times$$
$$\times \underbrace{3 \operatorname{tg}^2 7x}_{4} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 7x}}_{5} \cdot \underbrace{7}_{6}.$$

Пример 8. $y = \ln(\ln(\ln x))$.

Решение. Функция является наложением трех логарифмических функций. Трижды используя формулу 4 табл. 2, будем иметь

$$y' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x}.$$

Пример 9. $y = 2^{2^{2^x}}$.

Решение. Функция является суперпозицией трех показательных функций. Трижды используя формулу 3, получим
$y' = 2^{2^{2^x}} \ln 2 \cdot 2^{2^x} \ln 2 \cdot 2^x \ln 2$.

Пример 10. $y = \sin^3(\operatorname{arctg} 7^{\sqrt{\pi}})$.

Решение. $y' = 0$ по формуле 1.

Пример 11. $y = 5^{5^x} + 5^{x^5} + x^{5^5}$.

Решение. Первое слагаемое является композицией двух показательных функций, второе – показательной и степенной, третье слагаемое – степенная функция (не сложная). Поэтому
$y' = (5^{5^x})' + (5^{x^5})' + (x^{5^5})' = 5^{5^x} \ln 5 \cdot 5^x \ln 5 + 5^x \ln 5 \cdot 5x^4 + 5^5 \cdot x^{5^5-1}$.

Пример 12. $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$.

Решение. По формуле 2

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'.$$

По формуле для производной частного

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}.$$

Окончательно будем иметь

$$y' = -2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

Пример 13. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{\sin x}}$.

Решение. Так как функция определена при условии, что $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} > 0$, то данную функцию в ее области определения можно записать в виде

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2}\ln\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2}).$$

В такой записи найти производную гораздо проще, чем от функции, заданной первоначально:

$$y' = \frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin x}.$$

Пример 14. $y = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$.

Решение. По формуле производной произведения

$$y' = (\sin(\cos^2 x))'\cos(\sin^2 x) + \sin(\cos^2 x)(\cos(\sin^2 x))'.$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, будем иметь

$$\begin{aligned} y' &= \cos(\cos^2 x)\cdot 2\cos x(-\sin x)\cos(\sin^2 x)+\\ &+\sin(\cos^2 x)(-\sin(\sin^2 x))\cdot 2\sin x\cos x =\\ &= -\cos(\cos^2 x)\sin 2x\cos(\sin^2 x) - \sin(\cos^2 x)\sin(\sin^2 x)\sin 2x =\\ &= -\sin 2x(\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x) + \sin(\cos^2 x)\sin(\sin^2 x)) =\\ &= -\sin 2x\cos(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sin 2x\cos(\cos 2x). \end{aligned}$$

На последнем этапе преобразования была использована формула

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Пример 15. $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Решение. По формуле 9 табл. 2 имеем

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{1+2x^2+x^4}}} 2\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 2\sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= 2\frac{1+x^2}{|1-x^2|}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}.$$

Здесь $\sqrt{(1-x^2)^2} = |1-x^2|$, поскольку разность $(1-x^2)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Таким образом,

$$y' = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2}\text{ , если } |x|<1, \\ -\dfrac{2}{1+x^2}\text{ , если } |x|>1. \end{cases}$$

В точках $x = \pm 1$ производная терпит разрыв. Нахождение односторонних производных в точках $x = \pm 1$ опустим.

Пример 16. Найти производную функции $y = \sqrt{\phi^2(x)+g^2(x)}$, если известно, что $\exists \phi'(x)$ и $\exists g'(x)$.

Решение. Воспользуемся формулой 2:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\phi^2(x)+g^2(x)}}(\phi^2(x)+g^2(x))' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\phi^2(x)+g^2(x)}}(2\phi(x)\phi'(x)+2g(x)g'(x)).$$

Пример 17. $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$.

Решение. Здесь функция $f(u(x))$ может быть любой, например, $\ln(u(x))$, $\operatorname{tg}(u(x))$ и т.д. По правилу дифференцирования сложной функции

$$y' = f'(\sin^2 x)(\sin^2 x)' + f'(\cos^2 x)(\cos^2 x)' =$$

$$= f'(\sin^2 x)2\sin x\cdot\cos x + f'(\cos^2 x)2\cos x(-\sin x) =$$

$$= f'(\sin^2 x)\sin 2x - f'(\cos^2 x)\sin 2x =$$

$$= \sin 2x\cdot(f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)).$$

Пример 18. Убедиться в справедливости формулы

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель

$$y = f_{11}(x)f_{22}(x) - f_{12}(x)f_{21}(x)$$

и найдем его производную:

$$y' = f'_{11}(x)f_{22}(x) + f_{11}(x)f'_{22}(x) - f'_{12}(x)f_{21}(x) - f_{12}(x)f'_{21}(x) =$$
$$= (f'_{11}(x)f_{22}(x) - f'_{12}(x)f_{21}(x)) + (f_{11}(x)f'_{22}(x) - f_{12}(x)f'_{21}(x)) =$$
$$= \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Интересно, что производная от функционального определителя любого порядка находится аналогично.

Самостоятельно рекомендуется найти производные следующих функций:

1. $y = \ln^7 x$;
2. $y = \sqrt{\operatorname{tg} 3x}$;
3. $y = 5^{\cos\frac{x}{3}}$;
4. $y = e^{\operatorname{ctg} 7x}$;
5. $y = \ln(\operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{2}}$;
6. $y = \log_{1/2}(\ln x)$;
7. $y = \ln^4(\sin x)$;
8. $y = \ln(\sin^4 x)$;
9. $y = \arcsin(\ln x)$;
10. $y = \arccos(e^{-x})$;
11. $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$;
12. $y = e^{e^x} + e^{x^e}$;
13. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$;
14. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;
15. $y = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3$;
16. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$;
17. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;
18. $y = \dfrac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$;
19. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;
20. $y = \dfrac{1}{\ln^3(\ln^2(\ln x))}$;
21. $y = 2^{\sqrt[5]{\operatorname{ch}\frac{3}{x}}}$;
22. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$;
23. $y = \sqrt[3]{\dfrac{e^{\operatorname{th}\pi x}}{\operatorname{ch}^2 \pi x}}$;
24. $y = \sqrt[7]{\dfrac{\cos^3\frac{2\pi}{5}}{1+\sin^2\frac{\pi}{5}}}$;
25. $y = \ln f(x)$;
26. $y = f(e^x)e^{f(x)}$.

Ответы:

7. $y' = 4\ln^3(\sin x)\dfrac{1}{\sin x}\cos x$;
8. $y' = \dfrac{1}{\sin^4 x}\cdot 4\sin^3 x\cos x$;
11. $y' = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\dfrac{1}{1+x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
14. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

15. $y' = \dfrac{3\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}$; 17. $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$;

19. $y' = \dfrac{x^2}{1-x^4}$; 22. $y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x}$ $(\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x)$;

24. 0; 26. $y' = f'(e^x)e^x e^{f(x)} + f(e^x)e^{f(x)}f'(x)$.

2.3. Логарифмическое дифференцирование

Напомним, что

$\left((u(x))^\lambda\right)' = \lambda(u(x))^{\lambda-1} \cdot u'(x)$ – производная степенной функции,

$\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)} \ln a \cdot u'(x)$ – производная показательной функции.

Функцию вида $y = (f(x))^{g(x)}$ $(f(x) > 0)$, содержащую переменную величину как в основании, так и в показателе степени, как известно, принято называть степенно-показательной. Для нахождения производной такой функции применяют так называемое логарифмическое дифференцирование.

Прологарифмировав функцию $y = (f(x))^{g(x)}$, получим

$$\ln y = g(x)\ln f(x).$$

Возьмем производные по переменной x от левой и правой частей полученного равенства. Производную левой части найдем по формуле 4, в которой роль $u(x)$ будет играть $y(x)$:

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'.$$

Производную правой части найдем по формуле для производной произведения, при этом производную второго сомножителя также найдем по формуле 4:

$$(g(x)\ln f(x))' = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x).$$

Приравнивая найденные производные, будем иметь

$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x).$$

Умножая обе части равенства на $y = (f(x))^{g(x)}$, получим

$$y' = (f(x))^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)}f'(x)\right).$$

Если полученную формулу записать в виде

$$y' = (f(x))^{g(x)}g'(x)\ln f(x) + g(x)(f(x))^{g(x)-1}f'(x),$$

то можно заметить, что первое слагаемое – производная от заданной функции, если ее рассматривать как показательную, второе слагаемое – производная от заданной функции, если ее рассматривать как степенную. Вывод интересный, но на практике удобнее находить производную от степенно-показательной функции, применяя логарифмическое дифференцирование.

Найдем производные нескольких степенно-показательных функций.

Пример 1. $y = x^x$ – простейшая степенно-показательная функция ($x > 0$).

Решение. $\ln y = x \ln x$.

Дифференцируя обе части равенства, получим

$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = y(\ln x + 1)$ или

$y' = x^x(\ln x + 1)$.

Пример 2. $y = \sqrt[x]{\operatorname{tg} x}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Запишем функцию в виде $u = (\operatorname{tg} x)^{1/x}$ и прологарифмируем:

$$\ln y = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg} x.$$

Продифференцируем обе части равенства:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\frac{1}{x^2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{x} \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = \sqrt[x]{\operatorname{tg} x} \left(-\frac{1}{x^2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{x} \frac{1}{\cos^2 x} \right).$$

Пример 3. $y = (\sin x)^{(\cos x)^x}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Логарифмируя обе части равенства, получим

$$\ln y = (\cos x)^x \ln(\sin x).$$

Первый сомножитель полученного произведения является степенно-показательной функцией, поэтому возникает необходимость повторного логарифмирования:

$$\ln \ln y = x \ln \cos x + \ln(\ln \sin x).$$

Продифференцируем обе части равенства по переменной x:

$$\frac{1}{\ln y} \frac{1}{y} \cdot y' = \ln \cos x + x \frac{1}{\cos x}(-\sin x) + \frac{1}{\ln \sin x} \frac{1}{\sin x} \cos x.$$

Умножив обе части равенства на $y \ln y$, получим

$$y' = y \ln y \cdot (\ln \cos x - x \operatorname{tg} x + \frac{1}{\ln \sin x} \operatorname{ctg} x).$$

Заменяя y и $\ln y$ их выражениями через x, окончательно будем иметь

$$y' = (\sin x)^{(\cos x)^x} (\cos x)^x \ln \sin x (\ln \cos x - x \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln \sin x}).$$

Пример 4. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^3 e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{e^{2x}-1}}}$, $x > 0$.

Решение. Функция не является степенно-показательной, но предварительное логарифмирование такой функции значительно облегчит нахождение ее производной. Применяя правило логарифмирования степени, произведения и частного, будем иметь

$$\ln y = \frac{1}{4}(3\ln x + \sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}-1)).$$

Дифференцируя обе части равенства, получим

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt[4]{\frac{x^3 e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{e^{2x}-1}}}\,\frac{1}{4}\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\right).$$

Самостоятельно рекомендуется найти производные следующих функций:

1. $y = (\sin x)^x$; 2. $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$; 3. $y = \sqrt[x]{x}$;
4. $y = x^{x^2}$; 5. $y = x^{a^x}$; 6. $y = x^{x^x}$;
7. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2+4)^2}}$; 8. $y = \sqrt{xe^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\sqrt{e^x-1}}$.

Ответы:

1. $y' = (\sin x)^x(\ln\sin x + x\operatorname{tg} x)$;

6. $y' = x^{x^x}\cdot x^x\ln x(1 + \ln x + \frac{1}{x\ln x})$;

8. $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{xe^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\sqrt{e^x-1}}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{e^x}{2(e^x-1)}\right)$.

3. Перечень задач для самостоятельной работы

3.1. Убедиться, что функция $y = \ln\dfrac{1}{1+x}$ удовлетворяет уравнению $xy' + 1 = e^y$.

3.2. Убедиться, что функция $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ удовлетворяет уравнению $(1-x^2)y' - xy = 1$.

3.3. Найти производные заданных функций в указанных точках.

		Ответы:
1. $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+10}}$,	$x_0=-1$	$y'(-1)=\frac{4}{27}$;
2. $y=\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)^5$,	$x_0=1$	$y'(1)=0$;
3. $y=\dfrac{8}{\sqrt{3x^2+4}}$,	$x_0=2$	$y'(2)=-\frac{3}{4}$;
4. $y=\sin^4\dfrac{\pi x}{12}$,	$x_0=3$	$y'(3)=\frac{\pi}{12}$;
5. $y=\dfrac{e^{\operatorname{tg}2x}}{\cos^2 2x}$,	$x_0=0$	$y'(0)=2$;
6. $y=x^{\ln x}$,	$x_0=e^2$	$y'(e^2)=4e^2$;
7. $y=\sqrt[3]{x-1}\cdot e^{-x}$,	$x_0=1$	$y'(1)=+\infty$.

3.4. Составить уравнения касательных и нормалей к графикам функций, заданных в п.3.3, в точках с указанной абсциссой.

3.5. Убедиться, что касательная, проведенная к графику функции $y=x^3+e^{\operatorname{arctg}x}$ в любой его точке, наклонена к оси Ox под острым углом.

3.6. При каких значениях аргумента касательная, проведенная к графику функции $y=x\sqrt[5]{x-2}$, будет

а) параллельна оси Ox;

б) перпендикулярна оси Ox?

Ответ: а) $x=\frac{5}{3}$; б) $x=2$.

3.7. В какой точке графика функции $y=x\cdot\ln x$ касательная будет параллельна прямой $2x-y+3=0$? Составить уравнение этой касательной.

Ответ: $x=e$, $y=2x-e$.

3.8. В каких точках график функции $y=x+\sqrt[3]{\sin x}$ имеет вертикальные касательные?

Ответ: $x=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,...$

3.9. Найти расстояние от начала координат до нормали к графику функции $y=e^{2x}+x^2$, проведенной в точке $M_0(0,1)$.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3.10. Под какими углами пересекаются кривые $y = x^2$ и $x = y^2$ (угол пересечения кривых определяется как угол между касательными, проведенными к кривым в точке пересечения)?

Ответ: $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

3.11. Под каким углом пересекаются гипербола $y = \frac{3}{x}$ и парабола $y = x^2 + 2x$?

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{7}{11}$.

3.12. Цепь висячего моста располагается по дуге параболы $x^2 = 2py$. Пролет моста $AB = 50$ м, стрела провеса равна 5 м. Определить угол провеса в точке A.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = -0.4$.

3.13. Закон радиоактивного распада выражается формулой $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, где N_0 – начальное количество атомов, λ – постоянная радиоактивного распада, t – время распада. Найти скорость радиоактивного распада в начальный момент времени.

Ответ: $-\lambda \cdot N_0$.

3.14. Количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника за время t от начала, меняется по закону $q(t) = 1 - \cos 3t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{3}$. Определить силу тока в момент времени $t_0 = \frac{\pi}{6}$ с.

Ответ: $I(\frac{\pi}{6}) = 3$ А.

3.15. При зарядке конденсатора связь между его зарядом q и напряжением U определяется выражением $q = 4 \cdot 10^{-7}U^4 - 10^{-12}U^2$. Найти динамическую емкость конденсатора при напряжении $U = 50$ кВ (динамическая емкость $C = \frac{dq}{dU}$, заряд q измеряется в кулонах, напряжение U – в вольтах).

Ответ: $C = 0.3$.

3.16. С какой скоростью возрастает площадь круга в тот момент, когда его радиус $R = 10$ см, если радиус круга растет равномерно со скоростью 2 см/с?

Ответ: 40π см^2/с.

3.17. Из одного и того же порта одновременно вышли два парохода, один со скоростью 30 км/ч с направлением на север, другой со скоростью 40 км/ч с направлением на восток. С какой скоростью будет возрастать расстояние между ними?

Ответ: 50 км/ч.

3.18. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0.5$ Гц по закону $x = A\cos(\omega t + \phi)$, где x – смещение колеблющейся точки от положения равновесия, A – амплитуда колебаний, $\omega = \pi\nu$ – циклическая частота, ϕ – начальная фаза. Найти ускорение в момент, когда $x = 1.5$ см, если $A = 3$ см.

Указание. $a = \frac{dv}{dt}$, $v = \frac{dx}{dt}$.

Ответ: $a = 59.16$ см/с^2.

Тема 3. **Дифференциал функции**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Какова особенность поведения функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0, если график функции имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ наклонную касательную?

Чтобы ответить на вопрос, необходимо выяснить особенности поведения приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в окрестности точки x_0 (рис. 1):

$$\Delta y = |PM| = |PN| + |NM|.$$

Наличие касательной равносильно существованию производной $f'(x_0)$. Так как при этом $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, то

$$|NP| = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + |NM|.$$

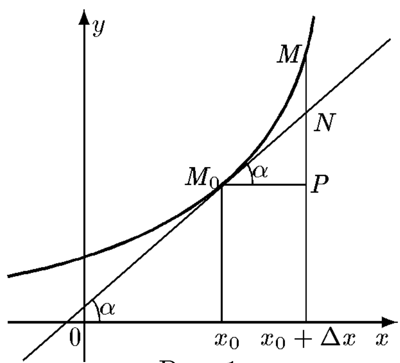


Рис. 1

Остается выяснить, какова зависимость слагаемого $|NM|$ от Δx.

1.2. На примере функции $y = x^3$ показать, что $|MN| = o(\Delta x)$ бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx, при $\Delta x \to 0$ (рис. 2)

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3 - x_0^3 =$$
$$= 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3 = f'(x_0)\Delta x + \underbrace{3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3}_{|MN|}.$$

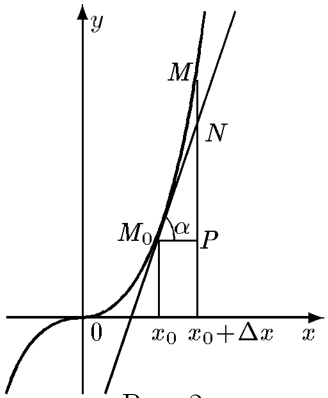


Рис. 2

Очевидно, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x_0\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |MN| = o(\Delta x) \text{ при } \Delta x\to 0.$$

Таким образом, в окрестности точки x_0 приращение функции, имеющей в этой точке конечную производную, можно представить в виде $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, где $f'(x_0)=A$ – постоянная величина, $o(\Delta x)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx, при $\Delta x\to 0$.

1.3. Определение дифференцируемой функции и дифференциала

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если приращение функции в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x). \tag{1}$$

Определение 2. Слагаемое $A\cdot\Delta x$ приращения Δy называется дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или dy.

Таким образом,

$$df(x_0)\overset{\text{def}}{=}A\cdot\Delta x, \tag{2}$$

и тогда $\Delta y = dy + o(\Delta x)$.

1.4. Что означает дифференцируемость функции при $A\neq 0$? При $A=0$?

При $A\neq 0$ имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+o(\Delta x)}{A\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{o(\Delta x)}{A\Delta x}\right)=1,$$

то есть при $A\neq 0$ приращение функции Δy и ее дифференциал dy являются эквивалентными бесконечно малыми при $\Delta x\to 0$, причем дифференциал $A\Delta x$ является главной, линейной относительно Δx частью приращения Δy.

Если же $A = 0$, то $\Delta y = o(\Delta x)$, то есть в этом случае приращение функции является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем Δx, при $\Delta x \to 0$.

1.5. Какова связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием производной в этой точке?

В п. 1.2 при рассмотрении приращения функции $y = x^3$ было получено
$$\Delta y = 3x_0^2\Delta x + o(\Delta x) \text{ или } \Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$
и это, согласно определению дифференцируемости и дифференциала функции, означает, что
$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$
Аналогичная формула имеет место и для любой другой дифференцируемой функции.

Теорема 1. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную, при этом имеет место формула
$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

В частном случае, когда $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, и тогда $dx = \Delta x$, то есть дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением.

Таким образом,
$$df(x_0) = f'(x_0)dx. \tag{3}$$

Подводя итог, подчеркнем, что (1) – это определение дифференцируемой функции, (2) – определение дифференциала, (3) – вычислительная формула для дифференциала.

Если функция дифференцируема в каждой точке x некоторого множества X, тогда на всем этом множестве
$$dy = f'(x)dx. \tag{4}$$

Таким образом, нахождение дифференциала функции сводится к нахождению производной от этой функции. Именно поэтому как операция нахождения производной, так и операция нахождения дифференциала называется дифференцированием функции.

Заметим, что формула (4) объясняет природу введенного ранее для производной обозначения $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, причем у этого символического обозначения производной теперь вполне определенный смысл – это есть отношение дифференциала функции к дифференциалу ее аргумента.

1.6. В чем практическая ценность понятий дифференцируемости и дифференциала функции?

Из определений дифференцируемости и дифференциала функции следует, что при малых Δx приращение функции $\Delta y = y - y_0$ можно заменить ее дифференциалом $dy = f'(x_0)\Delta x$, при этом будет допущена погрешность, которая является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем приращение аргумента. Практически это означает, что любую дифференцируемую в точке x_0 функцию в достаточно малой окрестности этой точки можно заменить линейной функцией вида

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0),$$

то есть считать, что процесс изменения зависимой переменной вблизи точки x_0 происходит линейно относительно аргумента. При изучении физических явлений замена функции на линейную означает, что вблизи рассматриваемой точки процесс изменения переменной величины считается происходящим равномерно.

Например, если некоторая точка движется по закону $S = S(t)$, то по формуле (3) $dS(t_0) = S'(t_0)\Delta t = v(t_0)\Delta t$ – расстояние, которое прошла бы точка за время от t_0 до $t_0 + \Delta t$, если бы она двигалась равномерно со скоростью $v(t_0)$. Величина же ΔS действительного перемещения точки за это время, согласно (1), равна сумме $dS(t_0) + o(\Delta t)$.

2. Решение задач

На основании формулы (4) и таблицы производных основных элементарных функций запишем таблицу дифференциалов основных элементарных функций:

1. $d(Cx) = Cdx$;

2. $dx^\lambda = \lambda x^{\lambda-1}dx$;
$d\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$, $x > 0$;

3. $da^x = a^x \ln a dx$;
$de^x = e^x dx$;

4. $d\log_a x = \dfrac{1}{x\ln a}dx$, $x > 0$,
$d\ln x = \frac{1}{x}dx$, $x > 0$;

5. $d\sin x = \cos x dx$;

6. $d\cos x = -\sin x dx$;

7. $d\,\mathrm{tg}\, x = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$;

8. $d\,\mathrm{ctg}\, x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$;

9. $d\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

10. $d\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

11. $d\,\mathrm{arctg}\, x = \dfrac{1}{1+x^2}dx$;

12. $d\,\mathrm{arcctg}\, x = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$;

13. $d\,\mathrm{sh}\, x = \mathrm{ch}\, x dx$;

14. $d\,\mathrm{ch}\, x = \mathrm{sh}\, x dx$;

15. $d\,\mathrm{th}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}dx$;

16. $d\,\mathrm{cth}\, x = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}dx$, $x \neq 0$.

Правила для нахождения дифференциала суммы, произведения и частного дифференцируемых функций тоже очевидным образом следуют из соответствующих правил нахождения производных:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$, $d(Cv) = Cdv$;
3. $d(\frac{u}{v}) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$, $v \neq 0$.

Приступим к решению задач.

2.1. Задана функция $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$. Найти $df(1)$ двумя способами:

1) по определению дифференциала;
2) с использованием формулы $dy = f'(x_0)dx$.

Решение.

1. Выразим приращение Δy через Δx:

$$\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = (2(1+\Delta x)^3 - (1+\Delta x)^2 + 3) - 4 =$$
$$= 2 + 6\Delta x + 6\Delta x^2 + 2\Delta x^3 - 1 - 2\Delta x - \Delta x^2 + 3 - 4 =$$
$$= \underbrace{4\Delta x}_{A\Delta x} + \underbrace{5\Delta x^2 + 2\Delta x^3}_{o(\Delta x)}.$$

По определению $df(1) = 4\Delta x$.

2. Используем формулу $dy = f'(x_0)dx$. Для данной функции

$$f'(x) = 6x^2 - 2x \Rightarrow f'(1) = 4.$$

Таким образом, $dy = 4dx$, где $dx = \Delta x$.

2.2. Используя формулу $dy = f'(x_0)\Delta x$, найти дифференциалы заданных функций в указанных точках при заданных Δx.

1. $f(x) = \sqrt{x^2+7}$, $x_0 = 3$, $\Delta x = 0.4$.

Решение. $f'(x) = \dfrac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+7}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}} \Rightarrow f'(3) = \dfrac{3}{4}$.

Тогда $df(3) = \dfrac{3}{4} \cdot 0.4 = 0.3$

2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+5}}$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0.03$.

Решение. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+5}}} \dfrac{2x(x^2+5) - 2x(x^2-3)}{(x^2+5)^2} =$

$$= \sqrt{\frac{x^2+3}{x^2-5}} \frac{8x}{(x^2+5)^2} \Rightarrow f'(-2) = -\frac{16}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow df(-2) = -\frac{16}{27} 0.03 = -0.017(7).$$

3. $f(x) = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.04$.

Решение. $f'(x) = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} \dfrac{1}{1+x} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{e^{\pi/4}}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow df(1) = \frac{e^{\pi/4}}{4} 0.04 = 0.01 e^{\pi/4}.$$

2.3. Найти дифференциалы заданных функций в любой точке их области определения.

1. $y = \cos^2 x \cdot e^{\operatorname{tg} x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$

Решение. По формуле для дифференциала произведения

$$dy = e^{\operatorname{tg} x} \cdot d(\cos^2 x) + \cos^2 x \cdot d(e^{\operatorname{tg} x}) = e^{\operatorname{tg} x} \cdot 2\cos x(-\sin x)dx +$$

$$+ \cos^2 x \cdot e^{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = -e^{\operatorname{tg} x} \cdot \sin 2x dx + e^{\operatorname{tg} x} dx =$$

$$= (-e^{\operatorname{tg} x} \cdot \sin 2x + e^{\operatorname{tg} x}) dx.$$

Заметим, что в скобках стоит производная заданной функции. Очевидно, дифференциал заданной функции можно было бы найти и по формуле $dy = f'(x)dx$.

2. $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$, $x > 0$

Решение. По правилу дифференцирования частного

$$dy = \frac{xd(\ln^2 x) - \ln^2 x \cdot dx}{x^2} = \frac{x \cdot 2\ln x \frac{1}{x}dx - \ln^2 x \cdot dx}{x^2} =$$
$$= \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}dx.$$

2.4. Получить формулу для дифференциала функции $y = f(x)$ в случае, когда $x = g(t)$ – некоторая функция независимой переменной t.

Решение. По условию задачи функции $y = f(x)$ и $x = g(t)$ определяют сложную функцию $y = f(g(t))$. Как функция аргумента t она имеет дифференциал, который находится по формуле
$$dy = \frac{dy}{dt} \cdot dt.$$
По правилу нахождения производной от сложной функции
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt} \Rightarrow dy = f'(x)\frac{dx}{dt}dt.$$
Но произведение $\dfrac{dx}{dt} \cdot dt$ является дифференциалом функции $x = g(t)$, поэтому окончательно будем иметь
$$dy = f'(x)dx. \tag{5}$$
Результат интересен тем, что форма записи дифференциала сложной функции та же самая, что и для дифференциала функции $y = f(x)$ независимой переменной x. Это свойство называют свойством инвариантности (неизменности) формы записи дифференциала. Подчеркнем, что в формуле (5) для случая, когда x – независимая переменная, $dx = \Delta x$, в случае сложной функции $dx = g'(t)dt$ и $dx \simeq \Delta x$.

2.5. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции аргумента x. Найти дифференциал функций
$$1)\ y = \ln(u^2 + v^2); \quad 2)\ y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}.$$

Решение. По свойству инвариантности

1. $dy = \dfrac{1}{u^2 + v^2}d(u^2 + v^2) = \dfrac{1}{u^2 + v^2}(2udu + 2vdv);$

2. $dy = \dfrac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}}d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v^2}{u^2 + v^2}\dfrac{vdu - udv}{v^2} = \dfrac{vdu - udv}{u^2 + v^2}.$

2.6. Найти производные
$$1)\ \frac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{d(x^3)}; \quad 2)\ \frac{d(\frac{\sin x}{x})}{d(x^2)}.$$

Решение.

1. Дифференцируя функцию $x^3-2(x^3)^2-(x^3)^3$ по переменной x^3, будем иметь

$$\frac{d(x^3-2(x^3)^2-(x^3)^3)}{d(x^3)}=1-4x^3-3(x^3)^2=1-4x^3-3x^6.$$

Эту же производную можно было бы найти, рассматривая ее как отношение двух дифференциалов:

$$\frac{d(x^3-2x^6-x^9)}{d(x^3)}=\frac{(3x^2-12x^5-9x^8)dx}{3x^2dx}=1-4x^3-3x^6.$$

2. Производную $\dfrac{d(\frac{\sin x}{x})}{d(x^2)}$ можно найти только вторым способом:

$$\frac{d(\frac{\sin x}{x})}{d(x^2)}=\frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx}{2xdx}=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}.$$

2.7. Найти приращение и дифференциал функции $y=\sqrt{x}$ в точке $x_0=4$ при $\Delta x=0.41$. Вычислить абсолютную и относительную ошибки, которые получаются при замене приращения дифференциалом. Сделать чертеж.

Решение.

$\Delta y=y(x_0+\Delta x)-y(x_0)=\sqrt{4.41}-\sqrt{4}=2.1-2=0.1;$

$dy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\Delta x\Rightarrow dy(4)=\dfrac{1}{4}\cdot 0.41=0.1025.$

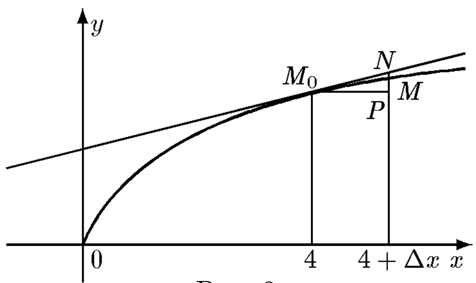


Рис. 3

Абсолютная ошибка при замене Δy на dy будет равна

$$\Delta y-dy=-0.0025.$$

Относительную ошибку найдем как

$$\delta=\frac{|\Delta y-dy|}{|\Delta y|}=$$

$$=\frac{0.0025}{0.1}=0.025.$$

Изобразим Δy и dy на чертеже (рис. 3):

$\Delta y=|MP|=|NP|-|MN|$ и $|NP|=dy$. При $\Delta x=0.41$, $\Delta y=0.1$, $dy=0.1025$ имеем $|MN|=0.0025$.

2.8. При нагревании куба с ребром 10 см его ребро удлинилось на 0.01 см. Выяснить, насколько возрастет при этом объем куба?

Решение. Если обозначить через x ребро куба, тогда его объем $V = x^3$. Задача сводится к нахождению приращения ΔV в точке $x_0 = 10$ при $\Delta x = 0.01$:

$$\Delta V = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3 - x_0^3 = \\ = 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

В нашем случае

$$\Delta V = 3 + 0.003 + 0.000001 = 3.003001.$$

Заметим, что если бы мы решили эту задачу путем нахождения вместо приращения ΔV дифференциала $dV = 3x_0^2\Delta x = 3$ (что значительно проще), то при этом была бы допущена ошибка, равная всего лишь 0.003001. Конечно, с увеличением Δx эта ошибка тоже бы увеличилась.

2.9. Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 5t^2$, где t измеряется в секундах, S – в метрах. Для момента времени $t = 2$ с найти приращение ΔS и дифференциал dS и сравнить их, если:

а) $\Delta t = 1$ с; б) $\Delta t = 0.1$ с; в) $\Delta t = 0.01$ с.

Сделать соответствующий вывод.

Решение. $\Delta S = S(2 + \Delta t) - S(2) = 5(2 + \Delta t)^2 - 20 =$
$= 20 + 20\Delta t + 5\Delta t^2 - 20 = 20\Delta t + 5\Delta t^2 \Rightarrow dS = 20\Delta t.$

а) при $\Delta t = 1$ с $\Delta S = 25$ м, $dS = 20$ м;

б) при $\Delta t = 0.1$ с $\Delta S = 2.05$ м, $dS = 2$ м;

в) при $\Delta t = 0.01$ с $\Delta S = 0.2005$ м, $dS = 0.2$ м.

Замечаем, что чем меньше Δt, тем меньше ΔS отличается от dS. Это и позволяет при малых Δt заменять ΔS на dS.

2.10. Вычислить приближенно значение функции

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 3}{x^2 + 4}} \text{ в точке } x = 2.12.$$

Решение. При малых Δx будем иметь $\Delta y \simeq dy$ или

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\Delta x \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{6}$$

Формулу (6) иногда называют формулой малых приращений.

В нашем случае $x_0 + \Delta x = 2.12$. Если в качестве x_0 взять число 2, то $\Delta x = 0.12$ достаточно мало и можно использовать формулу (6). Найдем $f(2)$ и $f'(2)$:

$$f(2)=\sqrt[3]{\frac{4-3}{4+4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2};$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2-3}{x^2+4}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{2x(x^2+4)-2x(x^2-3)}{(x^2+4)^2}=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{(\frac{x^2-3}{x^2+4})^2}}\frac{14x}{(x^2+4)^2}\Rightarrow f'(2)=\frac{7}{12}.$$

Подставляя $f(2)=\frac{1}{2}$, $f'(2)=\frac{7}{12}$ и $\Delta x=0.12$ в формулу (6), получим

$$\sqrt[3]{\frac{(2.12)^2-3}{(2.12)^2+4}}\simeq\frac{1}{2}+\frac{7}{12}\cdot 0.12=0.5+0.07=0.57.$$

2.11. Вычислить приближенно $\sin^4 43^\circ$.

Решение. Очевидно, величина $\sin^4 43^\circ$ является значением функции $\sin^4 x$ при $x=43^\circ$. Величина Δx будет достаточно малой, если взять $x_0=45^\circ$, а $\Delta x=-2^\circ$. Переходя к радианной мере, получим $x_0=\frac{\pi}{4}$, $\Delta x=-\frac{\pi}{90}\simeq-0.035$. Снова воспользуемся формулой (6). В нашем случае $f(\frac{\pi}{4})=\sin^4\frac{\pi}{4}=(\frac{1}{\sqrt{2}})^4=\frac{1}{4}$, $f'(\frac{\pi}{4})=4\sin^3 x\cos x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=4(\frac{1}{\sqrt{2}})^3\frac{1}{\sqrt{2}}=1$. Подставляя $f(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}$, $f'(\frac{\pi}{4})=1$ и $\Delta x=-0.035$ в формулу (6), получим

$$\sin^4 43^\circ\simeq\frac{1}{4}-1\cdot 0.035=0.215.$$

3. Перечень задач для самостоятельной работы

3.1. Для функций, графики которых изображены на рис. 4 и 5, изобразить их дифференциалы в точке x_0 и ответить, в чем заключается геометрический смысл дифференциала.

3.2. Задана функция $f(x)=x^2+2x$. Требуется:

1. Найти $df(1)$, используя определение дифференциала.

2. Найти $df(1)$, используя вычислительную формулу для дифференциала.

3. Построить график функции и изобразить $df(1)$, взяв $\Delta x=0.5$.

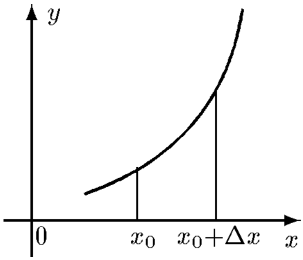


Рис. 4

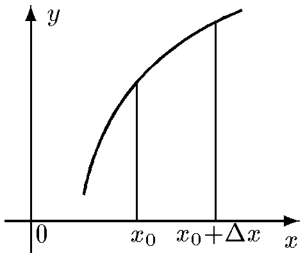


Рис. 5

3.3. Используя таблицу дифференциалов функций и правила дифференцирования, найти дифференциалы данных функций в указанных точках.

		Ответы:
1. $f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{4}{x}$,	$x_0 = 4$,	$df(4) = \dfrac{3}{4}dx$;
2. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 6x}$,	$x_0 = -1$,	$df(-1) = -\dfrac{5}{6}dx$;
3. $f(x) = \cos^3 \dfrac{2}{3}x$,	$x_0 = \frac{\pi}{4}$,	$df(\frac{\pi}{4}) = -\dfrac{3}{4}dx$;
4. $f(x) = e^{\arcsin 2x}$,	$x_0 = 0$,	$df(0) = 2dx$.

3.4. Найти дифференциалы заданных функций в их области определения

1. $y = \ln(x^2+1)$, $x \in R$; 2. $y = 2^{\sin \ln x}$, $x > 0$;
3. $y = e^{\operatorname{ctg} x} \sin^2 x$, $x \neq \pi k$; 4. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$;
5. $y = \sqrt[x]{x}$, $x > 0$.

3.5. Дописать правую часть равенств в виде $df(x)$

1) $xdx =$ 2) $\dfrac{1}{x^2}dx =$ 3) $\dfrac{1}{x+2}dx =$
4) $\dfrac{2x}{x^2+1}dx =$ 5) $\sin 5xdx =$ 6) $e^{\frac{2}{3}x}dx =$
7) $\dfrac{2\ln x}{x}dx =$ 8) $\sin^2 x \cdot \cos xdx =$

3.6. Найти указанные производные

1) $\dfrac{d(3x^4 - 5x^2 + 1)}{d(x^2)}$; 2) $\dfrac{d(\sin^4 x)}{d(\cos x)}$;
3) $\dfrac{d(\cos x)}{d(\sin x)}$; 4) $\dfrac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

3.7. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - x$ в точке $x_0 = 10$ при $\Delta x = 0.1$. Вычислить абсолютную и относительную ошибки, которые получаются при замене приращения дифференциалом.

Ответ: $\Delta y - dy = 0.01$, $\delta = \dfrac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|} = 0.0052$.

3.8. Точка движется по закону $S(t) = t^3 - t$, где t измеряется в секундах, S – в метрах. Для момента времени $t = 2$ с найти ΔS и dS, если:

1) $\Delta t = 1$ с; 2) $\Delta t = 0.1$ с; 3) $\Delta t = 0.01$ с.

Сравнить полученные результаты и сделать вывод.

3.9. Найти приближенное значение функции $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$ в точке $x = 1.04$.

Ответ: 2.033.

3.10. Вычислить приближенно

1) $\sqrt{(3.04)^2 + 7}$; 2) $\dfrac{2.96}{\sqrt{(2.96)^2 - 5}}$; 3) $\operatorname{arctg} 1.02$;

4) $\arcsin 0.498$; 5) $\cos 151^\circ$; 6) $\ln 2.618$.

3.11. Выразить дифференциал сложной функции через независимую переменную и ее дифференциал.

Ответы:

1. $y = \cos^2 x$, $x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$, $dy = -\sin(t^2 - 1)t\,dt$;
2. $z = \operatorname{arctg} u$, $u = \operatorname{sh} y$, $dz = \dfrac{1}{\operatorname{ch} y} dy$;
3. $s = \ln \operatorname{tg} \dfrac{u}{2}$, $u = \arcsin v$, $v = \cos 2t$, $ds = -\dfrac{2}{\cos 2t} dt$.

Тема 4. **Повторное дифференцирование**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Можно ли функцию $f'(x)$, полученную в результате дифференцирования функции $y = f(x)$, в свою очередь тоже продифференцировать в некоторой точке x_0?

Можно, если функция $f'(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности, и при этом существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Тогда этот предел и будет значением производной от производной $f'(x)$ в точке x_0.

Производную от производной $f'(x)$ называют производной второго порядка от функции $y = f(x)$ и обозначают $f''(x_0)$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, или $\dfrac{d^2f}{dx^2}$.

Итак,

$$f''(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

1.2. В чем заключается механический смысл производной второго порядка?

Если точка движется прямолинейно по закону $S = S(t)$, то, как известно, $S'(t_0) = v(t_0)$ – скорость движения в момент времени t_0. По определению производной второго порядка

$$S''(t_0) = v'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}.$$

Этот предел, если он существует, естественно назвать ускорением, с которым происходит движение, в момент времени t_0.

Итак, $\dfrac{ds}{dt} = v(t)$ – скорость движения в момент времени t, $\dfrac{d^2s}{dt^2} = a(t)$ – ускорение движущейся точки в момент времени t.

1.3. Как для функции $y = f(x)$ вводится понятие производной n-го порядка?

Для производной n-го порядка используются обозначения $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ или $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$.

По определению

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})',$$

то есть производная n-го порядка вводится как производная от производной $(n-1)$-го порядка. Очевидно, это определение имеет смысл лишь когда все предшествующие производные

$$f'(x),\ f''(x), \ldots,\ f^{(n-1)}(x)$$

определены в рассматриваемой точке и в некоторой ее окрестности. В этом случае принята терминология: функция $y = f(x)$ дифференцируема $(n-1)$ раз (в некоторой точке или на некотором множестве).

1.4. Как для функции $y = f(x)$ вводится понятие дифференциала второго порядка? Дифференциала n-го порядка?

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором множестве X, тогда, как известно, ее дифференциал в каждой точке множества X вычисляется по формуле

$$dy = f'(x)dx, \text{ где } dx = \Delta x.$$

Если зафиксировать Δx, то величина dy будет зависеть от значения аргумента x, при котором вычисляется $f'(x)$. Другими словами, dy является функцией аргумента x, и эта функция тоже может оказаться дифференцируемой.

Итак, дифференциал второго порядка d^2y функции $y = f(x)$ вводится как дифференциал от дифференциала dy, то есть

$$d^2y \stackrel{\text{def}}{=} d(dy).$$

Аналогично,

$$d^n y \overset{\text{def}}{=} d(d^{n-1}y)$$
при условии, что функция $y = f(x)$ дифференцируема $(n-1)$ раз в рассматриваемой точке и в ее окрестности.

1.5. Какова связь между $d^n y$ и $f^{(n)}(x)$?

Как известно, $dy = f'(x)dx$. Методом индукции доказывается, что если функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема на некотором множестве X, то ее дифференциал n-го порядка вычисляется по формуле
$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$
Здесь $dx^n = (dx)^n = (\Delta x)^n$. В частном случае, при $n = 2$
$$d^2 y = f''(x)dx^2.$$
Формула объясняет природу введенных ранее обозначений:
$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2},\ f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2. Решение задач

2.1. Точка движется прямолинейно по закону $S = t^3 + \frac{3}{t^2}$, где S измеряется в метрах, t – в секундах. Найти скорость и ускорение в конце третьей секунды от начала движения.

Решение. Учитывая механический смысл производных первого и второго порядка, будем иметь:
$$v(t) = S'(t) = 3t^2 - \frac{6}{t^3}, \quad a(t) = v'(t) = 6t + \frac{18}{t^4}.$$
При $t = 3$ с получим: $v(3) = 26\frac{1}{3}$ м/с, $a(3) = 18\frac{2}{9}$ м/с^2.

2.2. Точка массы m совершает гармонические колебания по закону $y = A\cos(\omega t + \alpha)$. Показать, что движение происходит под действием силы, пропорциональной отклонению y от положения равновесия.

Решение. По второму закону Ньютона $F = m \cdot a$. В нашем случае $a = y''(t)$. Найдем y' и y'':
$$y' = -A\omega\sin(\omega t + \alpha), \quad y'' = -A\omega^2\cos(\omega t + \alpha).$$
Воспользуемся тем, что $y = A\cos(\omega t + \alpha)$. Тогда $F = -m\omega^2 \cdot y$, то есть сила пропорциональна отклонению y с коэффициентом пропорциональности $-m\omega^2$.

2.3. Для заданных функций найти указанные производные (при повторном дифференцировании результат предыдущего дифференцирования рекомендуется преобразовать).

1. $y=\cos^2 x$, $y^{(4)}$ – ?

Решение. $y' = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x$, $y'' = -2\cos 2x$, $y''' = 4\sin 2x$, $y^{(4)} = 8\cos 2x$.

2. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, y'' – ?

Решение. $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) =$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$y'' = \left((1-x^2)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

3. $y=x^x$, y'' – ?

Решение. Используем логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = x\ln x, \quad \frac{1}{y}\cdot y' = \ln x + 1,$$

$$y' = y(\ln x+1), \quad y'' = y'(\ln x+1) + y\frac{1}{x}.$$

Заменяя y и y' их выражениями через x, получим

$$y'' = x^x(\ln x+1)(\ln x+1) + x^x\frac{1}{x} = x^x(\ln x+1)^2 + x^{x-1}.$$

2.4. Для заданных функций найти выражения для производных порядка n.

1. $y = x\ln x$.

Решение. $y' = \ln x + 1$, $y'' = \dfrac{1}{x}$, $y''' = -\dfrac{1}{x^2}$,

$$y^{(4)} = \frac{1\cdot 2}{x^3},\ y^{(5)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}.$$

При вычислении проявляется очевидная закономерность: чередование знаков, показатель степени x в знаменателе на единицу меньше порядка производной, числитель является факториалом числа, на две единицы меньшего порядка производной. На основании этого можно записать:

$$y^{(n)} = (-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}},\ n\geqslant 2.$$

2. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$.

Решение. Попытка дифференцировать функцию, заданную в исходном виде, к цели не приводит. Запишем функцию в виде

$y=\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$ и найдем y', y'', y''':

$$y'=\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\Big)=-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\Big),$$

$$y''=-\frac{1}{2}\Big(-\frac{1\cdot 2}{(x-1)^3}-\frac{1\cdot 2}{(x+1)^3}\Big)=-\frac{2!}{2}\Big(\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x+1)^3}\Big),$$

$$y'''=\frac{2!}{2}\Big(-\frac{3}{(x-1)^4}-\frac{3}{(x+1)^4}\Big)=-\frac{3!}{2}\Big(\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{1}{(x+1)^4}\Big).$$

Закономерность очевидна:

$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right).$$

3. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

Решение. $y'=4\sin^3 x\cos x-4\cos^3 x\sin x=$
$=4\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x,$

$y''=-4\cos 4x$, $y'''=4^2\sin 4x$, $y^{(4)}=4^3\cos 4x$.

Воспользуемся формулами приведения:

$$y'=-\sin 4x=\cos(4x+\tfrac{\pi}{2}),$$
$$y''=-4\cos 4x=4\cos(4x+\pi)=4\cos(4x+2\tfrac{\pi}{2}),$$
$$y'''=4^2\sin 4x=4^2\cos(4x+3\tfrac{\pi}{2}),$$
$$y^{(4)}=4^3\cos 4x=4^3\cos(4x+4\tfrac{\pi}{2}).$$

Использование формул приведения позволяет теперь записать выражение для производной любого порядка:

$$y^{(n)}=4^{n-1}\cos(4x+n\tfrac{\pi}{2}).$$

Аналогичный прием используется при нахождении производных порядка n для функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$.

2.5. Показать, что функция $y=\cos e^x+\sin e^x$ удовлетворяет уравнению $y''-y'+ye^{2x}=0$.

Решение. $y'=-e^x\sin e^x+e^x\cos e^x,$

$y''=-e^x\sin e^x-e^{2x}\cos e^x+e^x\cos e^x-e^{2x}\sin e^x.$

Тогда

$$y''-y'=-e^{2x}\cos e^x-e^{2x}\sin e^x=-e^{2x}(\cos e^x+\sin e^x)=-e^{2x}y.$$

Подставляя полученное для $y''-y'$ выражение в заданное уравнение, получим

$$-e^{2x}y+ye^{2x}=0,$$

что и требовалось доказать.

2.6. Дифференциалы высших порядков.

Напомним, что если функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема на множестве X, то $\forall x \in X$ имеет место формула

$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n$, где $dx^n = (\Delta x)^n$.

1. $y = \cos^2 x$, найти $d^4 y(\frac{\pi}{6})$.

Решение. $d^4 y = f^{(4)}(x) dx^4$. Воспользуемся найденной в задаче 2.3 производной:

$y^{(4)} = 8\cos 2x \Rightarrow f^{(4)}(\frac{\pi}{6}) = 8\cos\frac{\pi}{3} = 4 \Rightarrow d^4 y(\frac{\pi}{6}) = 4dx^4$.

2. $y = x\ln x$, найти $d^{10}y(1)$.

Решение. $d^{10}y = f^{(10)}(x)dx^{10}$. Воспользуемся найденной в задаче 2.4 производной:

$$y^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}.$$

При $n = 10$ будем иметь

$$y^{(10)}(x) = \frac{8!}{x^9} \Rightarrow y^{(10)}(1) = 8! \Rightarrow d^{10}y(1) = 8!dx^{10}.$$

3. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, найти $d^{100}y$, $\forall x \in R$.

Решение. $d^{100}y = f^{(100)}(x)dx^{100}$. Воспользуемся полученной в задаче 2.4 формулой:

$$y^{(n)} = 4^{n-1}\cos(4x + n\cdot\tfrac{\pi}{2}).$$

При $n = 100$ будем иметь

$$y^{(100)}(x) = 4^{99}\cos(4x + 50\pi) = 4^{99}\cos 4x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d^{100}y(x) = 4^{99}\cos 4x dx^{100}.$$

2.7. Показать, что дифференциал второго порядка не обладает свойством инвариантности формы записи.

Напомним, что дифференциал первого порядка функции $y = f(x)$ обладает свойством инвариантности формы, то есть

$$dy = f'(x)dx$$

и в случае, когда x – независимая переменная, и в случае сложной функции, когда $x = g(t)$.

Требуется показать, что для дифференциала второго порядка это не так.

Решение.

1. Пусть x – независимая переменная. В этом случае, как известно,

$$d^2y = f''(x)dx^2. \tag{7}$$

2. Пусть $x = g(t)$. По свойству инвариантности

$$dy = f'(x)dx, \text{ где } dx = g'(t)dt.$$

Найдем d^2y:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx).$$

По формуле для дифференциала произведения далее будем иметь

$$d^2y = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx),$$

где $d(f'(x)) = f''(x)dx$, $d(dx) = d^2x$. Следовательно,

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x. \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), видим, что формулы для d^2y различны, это и означает, что дифференциал второго порядка свойством инвариантности не обладает. Не обладают этим свойством и дифференциалы более высоких порядков.

2.8. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Напомним, что параметрический способ задания линии был рассмотрен в курсе аналитической геометрии и имел вид

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), \text{ где } \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \end{cases}$$

Роль параметра t может играть время (в этом случае система определяет траекторию движения точки на плоскости), некоторый угол, длина дуги и другие переменные величины. Напомним параметрические уравнения некоторых наиболее часто встречающихся в математических приложениях линий.

1. Окружность радиуса R с центром в начале координат (рис. 1)

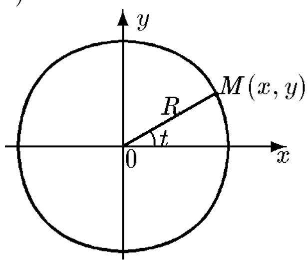


Рис. 1

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

$$x^2+y^2 = R^2(\cos^2 t+\sin^2 t)$$

или

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

2. Эллипс с центром в начале координат и полуосями a и b (рис. 2)

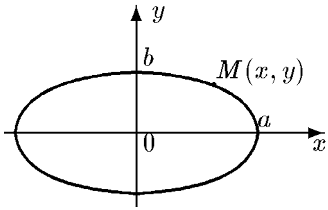


Рис. 2

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos t, \\ \dfrac{y}{b} = \sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3. Гипербола с центром в начале координат и вершинами на оси Ox(рис. 3)

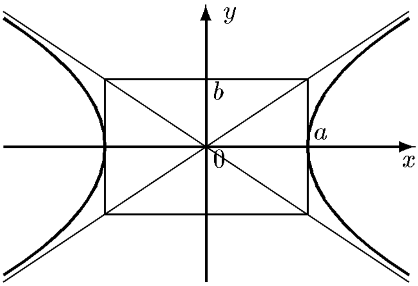


Рис. 3

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\, t, \\ y = b\,\mathrm{sh}\, t, \end{cases}$$

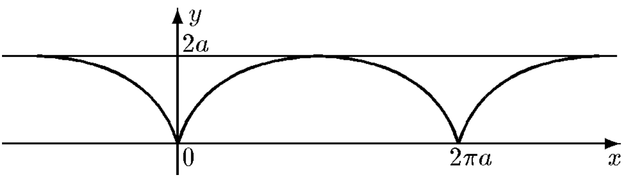
или

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \mathrm{ch}\, t, \\ \dfrac{y}{b} = \mathrm{sh}\, t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Напомним, что для гиперболических функций $\mathrm{ch}^2\, t - \mathrm{sh}^2\, t = 1$.

4. Циклоида (рис. 4)



$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

где $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Рис. 4

5. Астроида (рис. 5)

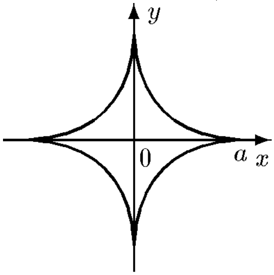


Рис. 5

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Возводя обе части каждого уравнения в степень $\frac{2}{3}$ и складывая, получим уравнение астроиды в декартовой системе координат:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Итак, пусть некоторая линия задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \end{cases}$$

Возникает вопрос, как найти $\dfrac{dy}{dx}$. Если из первого уравнения системы удастся выразить t через x с помощью некоторой функции (например, $t = u(x)$), то $y = \psi(u(x))$ и $\dfrac{dy}{dx}$ находится по правилу дифференцирования сложной функции. Но может оказаться, что t не выражается через x (как, например, в случае циклоиды). Как быть в этом случае?

Оказывается, $\dfrac{dy}{dx}$ легко выражается через $\phi'(t)$ и $\psi'(t)$. В самом деле, по свойству инвариантности

$$dy = y'_x dx$$

и в нашем случае, когда переменная x является функцией некоторой переменной t. Тогда $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$ и, рассматривая правую часть как отношение дифференциалов, будем иметь

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\phi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.$$

Формула имеет место при условии, что $\phi(t)$ и $\psi(t)$ – дифференцируемые функции, причем $\phi'(t) \neq 0$.

Итак, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$. Рассуждая аналогично, найдем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)})}{dx} = \frac{(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)})'dt}{\phi'(t)dt} = \frac{\psi''\phi' - \phi''\psi'}{(\phi')^3}.$$

Таким же образом находятся производные более высокого порядка.

Перейдем к решению задач.

1. Задана функция
$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \ t \in R. \end{cases}$$
Требуется найти $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3t - t^3)'}{(2t - t^2)'} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3(1 - t^2)}{2(1 - t)} = \frac{3}{2}(1 + t),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{\frac{3}{2}(1 + t)'}{(2t - t^2)'} = \frac{3}{2(2 - 2t)} = \frac{3}{4(1 - t)}, \ t \neq 1,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d(\frac{d^2y}{dx^2})}{dx} = \frac{(\frac{3}{4(1-t)})'}{(2t - t^2)'} = \frac{\frac{3}{4(1-t)^2}}{2 - 2t} = \frac{3}{8(1 - t)^3}, \ t \neq 1.$$

2. Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде
$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$
в точке $M_0(\pi - 2, 2)$ (рис. 6). Найдем, прежде всего, значение па-

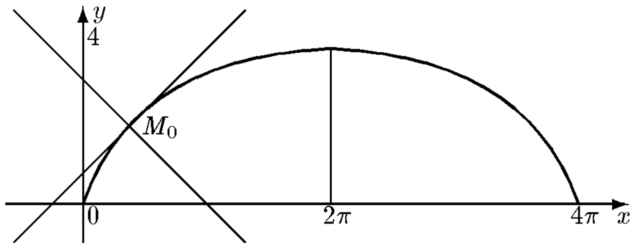


Рис. 6

раметра t, соответствующее заданной точке $M_0(\pi - 2, 2)$. Искомое значение t должно удовлетворять системе уравнений
$$\begin{cases} 2(t - \sin t) = \pi - 2, \\ 2(1 - \cos t) = 2. \end{cases}$$
Очевидно, $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Как известно, уравнения касательной и нормали в точке $M_0(x_0, y_0)$ кривой имеют вид

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{и} \qquad y = y_0 - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

В нашем случае $y'(x_0) = \frac{dy}{dx}|_{t=\frac{\pi}{2}}$. Найдем $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(1-\cos t)'}{2(t-\sin t)'} = \frac{2\sin t}{2(1-\cos t)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1$$

– угловой коэффициент касательной.

Подставляя x_0, y_0 и $\frac{dy}{dx}$ в уравнения касательной и нормали, получим

$y = 2 + (x - (\pi - 2))$ или $y = x + 4 - \pi$ – уравнение касательной,
$y = 2 - (x - (\pi - 2))$ или $y = -x + \pi$ – уравнение нормали.

3. Перечень задач для самостоятельной работы

3.1. Точка движется прямолинейно по закону $S = \frac{2}{9}\sin\frac{\pi t}{2} + S_0$, где t измеряется в секундах, S – в метрах. Найти ускорение в конце третьей секунды движения.

Ответ: $a = \frac{\pi^2}{18}$ м/с^2.

3.2. Точка движется прямолинейно по закону $S = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t$. Найти ускорение в те моменты движения точки, когда скорость движения равна нулю (t измеряется в секундах, S – в метрах).

Ответ: $a = \pm 1$ м/с^2.

3.3. Точка движется прямолинейно, причем $S = \sqrt{t}$. Доказать, что движение замедленное и ускорение пропорционально кубу скорости.

3.4. Для заданных функций найти y'':

1) $y = e^{\sin x}$; 2) $y = x \cdot \ln x$;
3) $y = \frac{x}{1+x^2}$; 4) $y = \sqrt{1-x^2}\arccos x$.

3.5. Для заданных функций найти производные указанного порядка в заданных точках:

		Ответы:
1. $y = \sin^2 \frac{\pi x}{4}$,	$y'''(\frac{\pi}{3})$ – ?	$-\frac{\pi^3}{32}$;
2. $y = x^3 \ln x$,	$y^{(4)}(1)$ – ?	6;
3. $y = \sin^6 x + \cos^6 x$,	$\frac{d^3 y(\frac{\pi}{8})}{dx^3}$ – ?	24;
4. $r = \sin^3 \frac{\phi}{2}$,	$\frac{d^2 r(\frac{\pi}{2})}{d\phi^2}$ – ?	$\frac{3\sqrt{2}}{16}$.

3.6. Для заданных функций найти $y^{(n)}$:

1. $y = e^{ax}$; 2. $y = xe^x$; 3. $y = \sin x$; 4. $y = \sin^2 x$;
5. $y = \ln x$; 6. $y = \frac{1-x}{1+x}$; 7. $y = \frac{1}{x^2+3x+2}$.

Указание. Представить функцию в виде

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Ответы: 3. $y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$;

5. $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$;

7. $y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right)$.

3.7. Для заданных функций найти дифференциалы указанных порядков в заданных точках:

1. $y = \sin^2 \frac{\pi x}{4}$,	$d^3 y(\frac{\pi}{3})$ – ?
2. $y = x^3 \ln x$,	$d^4 y(1)$ – ?
3. $y = \sin^6 x + \cos^6 x$,	$d^3 y(\frac{\pi}{8})$ – ?
4. $y = \sin^3 \frac{x}{2}$,	$d^2 y(\frac{\pi}{2})$ – ?
5. $y = \sin x$,	$d^{50} y(x)$ – ?
6. $y = \ln x$,	$d^{70} y(1)$ – ?

3.8. Доказать, что функция $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где C_1, C_2 – произвольные константы, удовлетворяет уравнению $y'' + y = 0$.

3.9. Доказать, что функция $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ удовлетворяет уравнению $y''' - 13y' - 12y = 0$.

3.10. Окружность радиуса 5 задана двумя способами:

1. $x^2 + y^2 = 25$; 2. $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Требуется соответственно двумя способами найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ в точке $M_0(0,-5)$.

3.11. Для функций, заданных параметрически, найти производные указанных порядков

		Ответы:
1. $\begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3, \end{cases}$	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$–?	$-\dfrac{3b}{8a^3t^3}$;
2. $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = a\sin^2 t, \end{cases}$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$–?	0;
3. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$–?	$-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$;
4. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$–?	$\dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$;
5. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2), \end{cases}$	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$–?	$4t(1+t^2)$;
6. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2-1, \end{cases}$	$\dfrac{d^ny}{dx^n}$–?	2^nt^2.

3.12. Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде $\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 1-\cos t \end{cases}$ в точке, соответствующей $t = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $y = \frac{1}{2} + \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})$,
$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

3.13. Составить уравнения касательной и нормали к астроиде $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = s\sin^3 t \end{cases}$ в точке $M_0(\frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a\sqrt{2}}{4})$.

Ответ: $y = -x + \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $y = x$.

3.14. Координаты движущейся по плоскости точки $M(x,y)$ заданы уравнениями

$$x = 4\sin\omega t - 3\cos\omega t,$$
$$y = 4\cos\omega t + 3\sin\omega t.$$

Определить траекторию движения и показать, что скорость изменения абсциссы движущейся точки пропорциональна ее ординате, а скорость изменения ординаты пропорциональна абсциссе.

Глава 3

Приложения дифференциального исчисления

Тема 1. Основные теоремы дифференциального исчисления

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Какова формулировка теорем Ферма, Ролля, Лагранжа? Как проиллюстрировать их графически?

Теорема 1 (Ферма). Пусть функция $f(x)$:

1) непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$;

2) принимает наибольшее (наименьшее) значение в некоторой внутренней точке c этого промежутка.

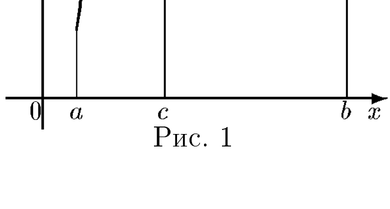


Рис. 1

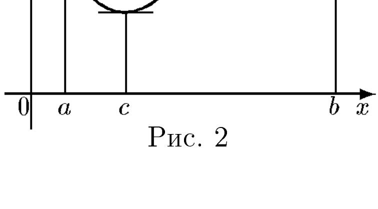


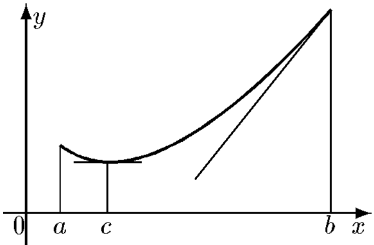
Рис. 2

Тогда, если в точке c функция имеет производную, то $f'(c)=0$.

Геометрически это означает, что в соответствующей точке графика функции касательная будет параллельна оси Ox (рис. 1,2).

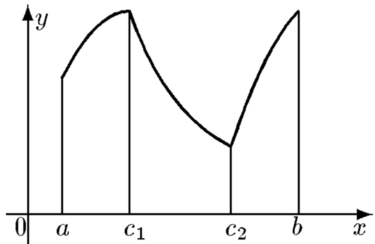
Замечание 1. Если функция $f(x)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение в граничной точке промежутка, то производная в этой точке (если она существует) может быть и отличной от нуля (рис. 3).

Замечание 2. В точке наибольшего (наименьшего) значения функции производная может и не существовать. В этом случае график функции в соответствующей точке не будет иметь касательной (рис. 4).



$f'(c) = 0,\ f'(b) \neq 0$

Рис. 3



$f'(c_1)$ и $f'(c_2)$ не существуют

Рис. 4

Теорема 2 (Ролля). Пусть функция $f(x)$:

1) непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$;
2) имеет производную хотя бы на интервале (a, b);
3) принимает равные значения на концах промежутка $(f(a) = f(b))$.

Тогда внутри промежутка $[a, b]$ найдется точка c $(a < c < b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

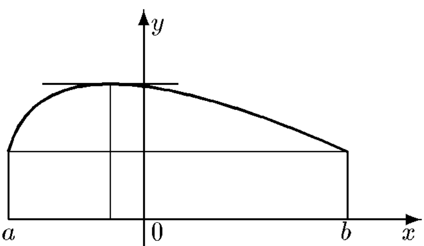


Рис. 5

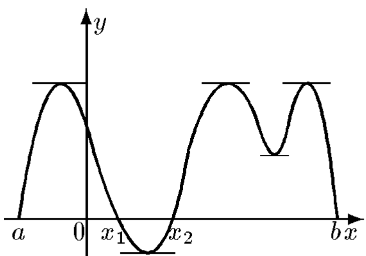


Рис. 6

Геометрически это означает, что в соответствующей точке графика функции касательная будет параллельна оси Ox (рис. 5). На рис. 6 показан частный случай теоремы Ролля, когда $f(a) = f(b) = 0$. В этом случае теорема Ролля утверждает, что между двумя нулями функции $f(x)$ имеется по крайней мере один нуль ее производной $f'(x)$, то есть уравнение $f'(x) = 0$ имеет хотя бы одно решение.

Теорема 3 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$:

1) непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$;

2) имеет производную хотя бы на интервале (a, b).

Тогда внутри промежутка $[a, b]$ найдется точка c $(a < c < b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Геометрически это означает, что в соответствующей точке графика функции касательная будет параллельна хорде, стягивающей граничные точки графика (рис. 7). На рис. 8 проиллюстрирован тот факт, что точек, обладающих указанным свойством, может быть и несколько.

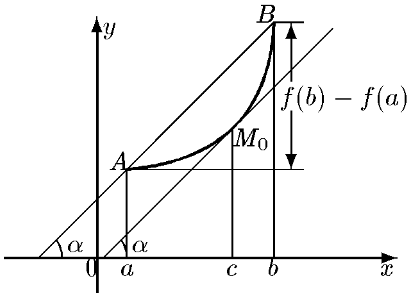


Рис. 7

$$f'(c) = \operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

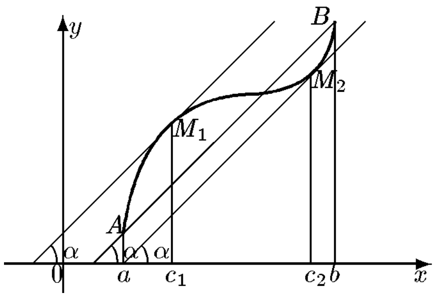


Рис. 8

$$f'(c_1) = f'(c_2) = \operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

В частном случае, когда $f(a) = f(b)$, будем иметь $f'(c) = 0$. Таким образом, теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

1.2. Сформулировать теорему Коши. Объяснить, почему теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши?

Теорема 4 (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1) непрерывны на замкнутом промежутке $[a, b]$;
2) имеют производную хотя бы на интервале (a, b);
3) $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in (a, b)$.

Тогда внутри промежутка $[a, b]$ найдется точка c $(a < c < b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

В частном случае, когда $g(x) = x$, будем иметь

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Таким образом, теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши.

2. Решение задач

2.1. Проиллюстрировать теорему Ферма на примере функции $y = \sin x$ на промежутке $[\frac{\pi}{6}, 2\pi]$.

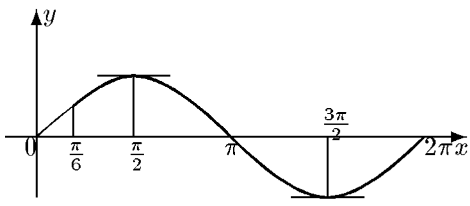


Рис. 9

Решение. Очевидно, для функции $y = \sin x$ $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ – наибольшее значение, $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$ – наименьшее значение на замкнутом промежутке $[\frac{\pi}{6}, 2\pi]$ (рис. 9).

Функция $y = \sin x$ имеет производную $y' = \cos x$, причем $y'(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ и $y'(\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$. Именно это и утверждается в теореме Ферма.

2.2. Проиллюстрировать теорему Ролля на примере функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$ на промежутке $[0, 2]$.

Решение. Так как трехчлен $x^2 - 2x + 2$ не имеет действительных корней $(D < 0)$, то функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$ определена и дифференцируема на всей числовой оси. Для данной функции $f(0) = f(2) = \frac{1}{2}$. Все условия теоремы Ролля выполнены, следовательно, в некоторой точке $c \in (0, 2)$ будем иметь $f'(c) = 0$. Найдем эту точку:

$$f'(x) = -\frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ при } x = 1.$$

Таким образом, $c = 1$.

Чтобы построить график, представим функцию в виде $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2+1}$ и заметим, что ее график симметричен относительно прямой $x = 1$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ (рис. 10).

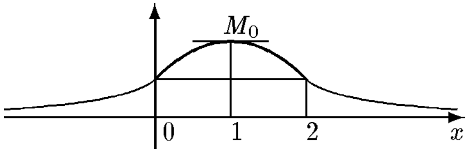


Рис. 10

Касательная к графику функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$ в точке $M_0(1, 1)$ параллельна оси Ox.

2.3. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 8}$ на промежутке $[-2, 2]$.

Решение. Так как $x^4 - 2x^2 + 8 = (x^2-1)^2 + 7 > 0 \;\; \forall x \in (-\infty, +\infty)$, то функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Найдем производную функции

$$y' = \frac{4x^3-4x}{2\sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{2x^3-2x}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

Производная тоже определена на всей числовой оси. Наконец, очевидно, что выполняется и условие $f(a) = f(b)$ (в силу четности функции $f(-2) = f(2)$). Итак, все условия теоремы Ролля выполнены. Убедимся, что на промежутке $[-2, 2]$ имеется хотя бы одна точка, в которой $f'(x) = 0$. Уравнение

$$\frac{2x^3-2x}{\sqrt{x^2-2x+2}} = 0$$

имеет, очевидно, три корня $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, и все они принадлежат интервалу $(-2, 2)$. Теорема Ролля для заданной функции на промежутке $[-2, 2]$ справедлива.

2.4. Для функции $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ выполнено условие теоремы Ролля: $f(-1) = f(1)$. Однако $f'(x) \neq 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Объяснить это кажущееся противоречие с теоремой Ролля.

Решение. Условие $f(a) = f(b)$ теоремы Ролля для заданной функции действительно выполнено. Но кроме этого, по теореме Ролля функция $f(x)$ должна быть непрерывной на $[a, b]$ и иметь производную на (a, b). В нашем случае $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ непрерывна на $[-1, 1]$, но ее производная $f'(x) = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ не определена в точке $x = 0$, которая является внутренней точкой промежутка $[-1, 1]$. Это означает, что к функции $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ теорема Ролля на промежутке $[-1, 1]$ неприменима.

2.5. Задана функция $f(x) = (x-1)(x-2)...(x-100)$. Сколько корней имеет уравнение $f'(x) = 0$? Указать интервалы, в которых эти корни расположены.

Решение. Заданная функция является многочленом сотой степени, при этом $f(x) = 0$ в точках $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$,..., $x_{100} = 100$. Это означает, что на каждом из 99 промежутков $[1, 2]$, $[2, 3]$,..., $[99, 100]$ выполнены условия теоремы Ролля, согласно которой на каждом из этих промежутков уравнение $f'(x) = 0$ имеет по крайней мере по одному корню. С другой стороны, многочлен $f'(x)$ имеет степень, равную тоже 99, и, следовательно, не может иметь более 99 вещественных корней. Все это означает, что уравнение $f'(x) = 0$ имеет ровно 99 различных вещественных корней, причем внутри каждого из промежутков $[1, 2]$, $[2, 3]$,..., $[99, 100]$ находится по одному корню этого уравнения.

2.6. Проиллюстрировать теорему Лагранжа на примере функции $y = \ln x$ на промежутке $[1, e]$.

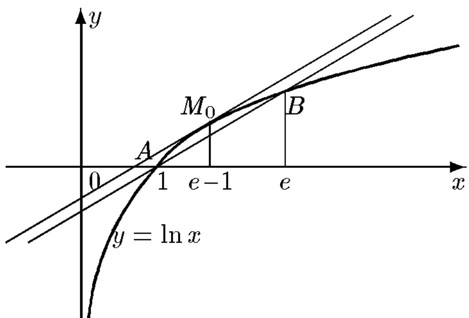


Рис. 11

Решение. Функция $y = = \ln x$ непрерывна и дифференцируема на $[1, e]$. Следовательно, применима теорема Лагранжа, и должна существовать точка c $(1 < c < e)$ такая, что
$$\frac{\ln e - \ln 1}{e - 1} = f'(c)$$
или
$$\frac{1}{e - 1} = \frac{1}{c}.$$

Очевидно, $c = e - 1$.

Касательная к графику функции $y = \ln x$ в точке M_0 (рис. 11) параллельна хорде AB.

2.7. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{если } 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$
на промежутке $[0, 2]$.

Решение. Во всех точках промежутка $[0, 2]$, за исключением точки $x = 1$, функция $f(x)$, очевидно, непрерывна и дифференцируема. Исследуем $f(x)$ на непрерывность в точке $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{3-x^2}{2} = 1,$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x} = 1.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = f(1) \Rightarrow f(x)$ непрерывна в точке $x = 1$. Найдем односторонние производные:

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{\frac{3-(1+\Delta x)^2}{2} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{-2\Delta x - \Delta x^2}{2\Delta x} = -1,$$
$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{\frac{1}{1+\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(1+\Delta x)} = -1.$$

Таким образом, $f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow f(x)$ дифференцируема в точке $x = 1$. Итак, теорема Лагранжа применима, то есть $\dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c)$, где $0 < c < 2$. Так как $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(0) = \frac{3}{2}$, будем иметь $f'(c) = -\frac{1}{2}$. Найдем $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{если } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Очевидно, $f'(c) = -\frac{1}{2}$ при $c_1 = \frac{1}{2} \in [0, 1]$ и $c_2 = \sqrt{2} \in (1, 2]$.

Изобразить полученный результат геометрически предлагается самостоятельно.

2.8. Доказать, что если функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, то внутри промежутка найдется точка c такая, что $\Delta y = f'(c)\Delta x$.

Доказательство. Применим теорему Лагранжа к функции $y = f(x)$ на промежутке $[x_0, x_0 + \Delta x]$:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(c) \text{ или}$$
$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\Delta x \text{ или}$$
$$\Delta y=f'(c)\Delta x,$$
где $x_0<c<x_0+\Delta x$.

Для c часто используется запись: $c=x_0+\theta\cdot\Delta x$, где $0<\theta<1$.

Аналогичную формулу для Δy можно получить и для случая $\Delta x<0$, применяя теорему Лагранжа на промежутке $[x_0+\Delta x, x_0]$, $\Delta x<0$.

Равенство $\Delta y=f'(c)\cdot\Delta x$, а вместе с ним и формулу Лагранжа называют формулой конечных приращений.

Напомним, что в теории дифференциала была получена приближенная формула

$\Delta y\simeq dy$ или $\Delta y\simeq f'(x)\Delta x$,

относительная погрешность которой стремилась к нулю при $\Delta x\to 0$. Формула же конечных приращений
$$\Delta y=f'(c)\Delta x$$
дает точное значение для Δy при любом приращении Δx. К сожалению, способа нахождения точки c теорема Лагранжа не дает.

2.9. В приложениях математики используется приближенная формула
$$f(x_0+\Delta x)\simeq f(x_0)+f'\Big(x_0+\frac{\Delta x}{2}\Big)\Delta x.$$
Как она получена?

Решение. По формуле конечных приращений

$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(c)\Delta x$,

где c – некоторая точка между x_0 и $x_0+\Delta x$. Если взять $c=x_0+\frac{\Delta x}{2}$, получим
$$f(x_0+\Delta x)\simeq f(x_0)+f'(x_0+\tfrac{\Delta x}{2})\Delta x.$$

2.10. Проверить справедливость теоремы Коши для функций $f(x)=\cos 2x$, $g(x)=\sin x$ на промежутке $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Решение. Обе функции непрерывны и дифференцируемы на $[0,\frac{\pi}{2}]$, причем $g'(x)=\cos x\neq 0$ на $(0,\frac{\pi}{2})$. Следовательно, теорема Коши применима:
$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{g(\frac{\pi}{2})-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где c – некоторая точка интервала $(0, \frac{\pi}{2})$. Для нахождения точки c имеем уравнение

$$\frac{\cos\pi - \cos 0}{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0} = \frac{-2\sin 2c}{\cos c} \text{ или}$$

$-2 = -4\sin c \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$. Сокращение на $\cos c$ возможно, так как $\cos c \neq 0$ на $(0, \frac{\pi}{2})$.

2.11. Применима ли теорема Коши к функциям $f(x) = \ln(1+x^2)$ и $g(x) = x^2 - 2x$ на промежутке $[0, e]$? На промежутке $[1, e]$?

Решение. На том и на другом промежутке обе функции непрерывны и дифференцируемы. По условию теоремы Коши, $g'(c) \neq 0$ на (a, b). В нашем случае $g'(x) = 2x - 2 \Rightarrow g'(x) = 0$ при $x = 1$. Точка $x = 1 \in (0, e) \Rightarrow$ на промежутке $[0, e]$ теорема Коши для данных функций неприменима. Для промежутка $[1, e]$ точка $x = 1$ является граничной, и теорему Коши можно применять.

3. Перечень задач для самостоятельной работы

3.1. Проиллюстрировать геометрически теорему Ферма на примере функции $y = \cos x$ на промежутке $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}]$.

3.2. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = 5^{\sin x}$ на промежутке $[0, 2\pi]$.

Ответ: $c_1 = \frac{\pi}{2}$, $c_2 = \frac{3\pi}{2}$.

3.3. Для функции $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{x^4}$ выполнено условие теоремы Ролля: $f(-1) = f(1)$. Убедиться в том, что $f'(x) \neq 0$ на $[-1, 1]$ и объяснить это кажущееся противоречие с теоремой Ролля.

3.4. Задана функция $f(x) = (x^2-1)(x^2-5x+6)$. С помощью теоремы Ролля доказать, что все корни уравнения $f'(x) = 0$ – различные вещественные числа, и указать интервалы, на которых эти корни расположены.

3.5. Показать, что уравнение $x^n + px + q = 0$ не может иметь более двух действительных корней при четном n и более трех при нечетном n.

3.6. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y = x^3$ на промежутке $[-1, 2]$. Сделать чертеж.

3.7. С помощью теоремы Лагранжа доказать, что если $f'(x) = 0$ на (a, b), то $f(x) = \mathrm{const}$ на $[a, b]$.

3.8. Доказать с помощью теоремы Лагранжа неравенство $\dfrac{b-a}{b} \leqslant \ln\dfrac{b}{a} \leqslant \dfrac{b-a}{a}$ при условии $0 < a < b$.

3.9. Проверить справедливость теоремы Коши для функций $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ на промежутке $[1, 2]$.

3.10. Применима ли теорема Коши к функциям $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = x^3 - 6x$ на промежутке $[0, 1]$? На промежутке $[1, 2]$?

Тема 2. **Раскрытие неопределенных выражений по правилу Лопиталя**

В гл. “Введение в математический анализ” при вычислении пределов были рассмотрены так называемые неопределенные выражения ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞) и указаны способы их раскрытия. Напомним, что метод раскрытия той или иной неопределенности существенно зависел от ее вида. В данной теме будет рассмотрен универсальный метод раскрытия неопределенностей (так называемое правило Лопиталя), основанный на использовании дифференциального исчисления.

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Какие неопределенности раскрываются по правилу Лопиталя? В чем заключается это правило?

По правилу Лопиталя раскрываются неопределенности вида $(\frac{0}{0})$ и $(\frac{\infty}{\infty})$. Суть правила Лопиталя в том, что при определенных условиях предел отношения бесконечно малых или бесконечно больших функций совпадает с пределом отношения их производных, то есть

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)},\ \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Например, $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3\cos 3x}{4\cos 4x}=-\dfrac{3}{4}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\left(\tfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0.$$

1.2. Когда применимо правило Лопиталя?

Ответом на поставленный вопрос является содержание следующих теорем.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки x_0 (за исключением, может быть, самой точки x_0) и дифференцируемы в этой окрестности, причем $g'(x)\neq 0$ при $x\neq x_0$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.
3. $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то есть при выполнении условий 1 – 3 предел отношения бесконечно малых функций существует и равен пределу отношения их производных.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки x_0 (за исключением, может быть, самой точки x_0) и дифференцируемы в этой окрестности, причем $f'(x)\neq 0$ и $g'(x)\neq 0$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.
3. $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\tfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то есть предел отношения бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных.

Обе теоремы доказываются на основании теоремы Коши и справедливы для односторонних пределов при $x\to\infty$.

1.3. Как быть в случае, если окажется, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует?

В этом случае нельзя делать вывод, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ тоже не существует. Следует попытаться найти этот предел другим способом. Например, если при вычислении $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ попытаться применить правило Лопиталя, то окажется, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{x}$ не существует. Это лишь означает, что правило Лопиталя неприменимо. Данный предел, тем не менее, существует и легко находится:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\sin x = 0$ по теореме о пределе произведения бесконечно малой величины на ограниченную функцию.

1.4. Как быть, если в результате применения правила Лопиталя окажется, что $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ тоже представляет собой неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$?

Применять правило Лопиталя повторно, если только это правило применимо к функциям $f'(x)$ и $g'(x)$.

1.5. Существуют ли приемы, позволяющие путем дифференцирования раскрыть неопределенности вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞?

Путем несложных преобразований каждую из перечисленных неопределенностей можно привести либо к виду $\dfrac{0}{0}$, либо к виду $\dfrac{\infty}{\infty}$ и после этого использовать правило Лопиталя. При решении задач такие случаи будут рассмотрены.

2. Решение задач

2.1. Неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\frac{1}{x^2-8}\cdot 2x}{4x-5}=\dfrac{6}{7}$.

По ходу решения мы убедились, что правило Лопиталя в данном случае применимо (все условия теоремы 1 выполнены).

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

При вычислении предела мы трижды воспользовались правилом Лопиталя. На последнем этапе решения вместо правила Лопиталя можно было бы воспользоваться первым замечательным пределом ($\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$).

Следует иметь в виду, что во многих случаях повторное применение правила Лопиталя значительно облегчается, если полученное выражение предварительно преобразовать. В частности, сомножители, имеющие конечные отличные от нуля пределы, можно заменить их предельными значениями.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})^2}{1+\cos 3x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})^2}{1+\cos 3x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{2(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})\frac{1}{\cos^2 x}}{-3\sin 3x}$.

Прежде чем применять правило Лопиталя повторно, заменим сомножитель $\frac{1}{\cos^2 x}$ его предельным при $x\to\frac{\pi}{3}$ значением, равным 4. Это значительно облегчит повторное применение правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})}{-3\sin 3x\cos^2 x}=-\frac{8}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}x-\sqrt{3}}{\sin 3x}=-\frac{8}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{3\cos 3x}=\frac{32}{9}.$$

В процессе применения правила Лопиталя часто бывает выгодно использовать известные из гл. “Введение в математический анализ” эквивалентные бесконечно малые величины. Напомним, что если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то при $x\to x_0$

$$\begin{array}{lll}\sin\alpha(x)\sim\alpha(x), & \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x), & e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),\\ \operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x), & \operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x), & \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x).\end{array}$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x\cdot\ln(1+x^2)}{\operatorname{tg}x-x}$.

Решение. Прежде чем применить правило Лопиталя, воспользуемся тем, что $\arcsin x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x\cdot\ln(1+x^2)}{\operatorname{tg}x-x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x^2}{\operatorname{tg}x-x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\frac{1}{\cos^2 x}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\cdot\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\sin^2 x}=1\cdot 3=3.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Решение. Попытка применить правило Лопиталя приводит к пределу

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x},$$

который не существует, так как в числителе $\lim\limits_{x\to 0}2x\sin\frac{1}{x}=0$, а $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ не существует. Таким образом, правило Лопиталя неприменимо.

Попробуем найти предел, используя приемы, рассмотренные в гл. “Введение в математический анализ”:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\frac{x}{\sin x}\sin\frac{1}{x}=0,$$

так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, функция $\sin\frac{1}{x}$ ограничена, а сомножитель x стремится к нулю. Предел равен 0 по теореме о произведении бесконечно малой величины на ограниченную функцию.

2.2. Неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\pi+0}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\ln(x-\pi)}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\pi+0}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\ln(x-\pi)}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pi+0}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{x-\pi}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi+0}\frac{x-\pi}{\cos^2\frac{x}{2}}\left(\frac{0}{0}\right).$$

Интересно, что применяя правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, мы пришли к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Применяя вновь правило Лопиталя, получим

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi+0}\frac{x-\pi}{\cos^2\frac{x}{2}}\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi+0}\frac{1}{-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha>0$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha x^\alpha}=\dfrac{1}{\infty}=0.$

Вывод. Логарифмическая функция $y=\ln x$ при $x\to+\infty$ возрастает медленнее, чем степенная функция $y=x^\alpha$ с любым положительным показателем степени. Например,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{100}}=0 \text{ и } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[100]{x}}=0.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^n}$, $a>1$, $n\in N$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^n}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}.$

При $n=1$ предел будет равен ∞. Если же $n>1$, вновь имеет место неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя вновь правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}}.$$

Очевидно, в общем случае для нахождения $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^n}$ правило Лопиталя придется применить n раз. В результате будем иметь

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^n a}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^n a}{n!}=\frac{+\infty}{n!}=+\infty.$$

Вывод. Показательная функция a^x $(a>1)$ при $x\to+\infty$ возрастает быстрее, чем степенная функция x^n с любым, даже сколь угодно большим показателем степени. Например,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{10^x}{x^{10}}=+\infty \text{ и } \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^{1000}}=+\infty.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}+\sqrt{x}}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. Попытка применить правило Лопиталя приводит к той же неопределенности, но более сложного вида, поэтому применять правило Лопиталя не имеет смысла. Предел легко находится, если сравнить порядок бесконечно больших величин числителя и знаменателя. И в числителе, и в знаменателе бесконечно большие величины одного (первого) порядка, поэтому предел равен отношению коэффициентов при первых степенях, то есть $\frac{3}{2}$. Этот же результат можно было получить, как это делалось в гл. "Введение в математический анализ", путем деления числителя и знаменателя на x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}+\sqrt{x}}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{2+\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}=\frac{3}{2}.$$

2.3. Неопределенности вида $(0\cdot\infty)$

Покажем, как неопределенность вида $(0\cdot\infty)$ легко сводится к неопределенностям вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)u(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\frac{1}{u(x)}}\left(\frac{0}{0}\right)\text{ или}$$

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)u(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{\frac{1}{\alpha(x)}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to0+0}\sin x\cdot\ln x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0+0}\sin x\cdot\ln x(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}=-\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\sin x\cdot\dfrac{1}{\cos x}=0$, так как $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0+0}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to1}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\cdot\ln(3-2x)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to1}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(3-2x)(\infty\cdot0)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(3-2x)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{3-2x}\cdot(-2)}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{3-2x} = \frac{4}{\pi}.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \cos x\cdot\ln(\operatorname{tg} x)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \cos x\cdot\ln\operatorname{tg} x(0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{0}{1} = 0.$$

2.4. Неопределенности вида $(\infty-\infty)$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ $(\infty-\infty)$.

Решение. В результате приведения к общему знаменателю получим неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, и это позволит применить затем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}\left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что при вычислении предела разности двух функций обе функции могут оказаться бесконечно большими разных знаков. В таком случае неопределенности просто не будет. Интересно, что такая ситуация будет иметь место, если в рассмотренном примере знаменатель первого слагаемого заменить на $(1-x)$. Тогда

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{1}{\ln x}\right) = +\infty - (-\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{1}{\ln x}\right) = -\infty - (+\infty) = -\infty.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0+0}(e^{1/x}+\ln x)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0+0} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln x = -\infty$, следовательно, имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Чтобы получить частное, вынесем слагаемое $e^{1/x}$ за скобку. В результате получим

$$\lim_{x\to 0+0}(e^{1/x}+\ln x) = \lim_{x\to 0+0} e^{1/x}\left(1+\frac{\ln x}{e^{1/x}}\right).$$

Найдем предел

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{e^{1/x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=-\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{e^{1/x}}=\frac{0}{\infty}=0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0+0}(e^{1/x}+\ln x)=+\infty$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$.

Решение. При $x\to+\infty$ имеет место неопределенность вида $\infty(\infty-\infty)$. Чтобы получить частное, умножим и разделим заданную функцию на сумму $(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1})$. В результате получим

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}(x^3+1-x^3+1)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{3/2}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Попытка применить правило Лопиталя приведет к такой же неопределенности, но более сложного вида. Поэтому применять правило Лопиталя нет смысла. В гл. “Введение в математический анализ” такие неопределенности раскрывались путем сравнения порядка бесконечно больших величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби. В данном случае и в числителе, и в знаменателе стоят бесконечно большие одного и того же порядка $\frac{3}{2}$, поэтому предел будет равен отношению коэффициентов при $x^{3/2}$ в числителе и знаменателе, то есть $\frac{2}{1+1}$ (см. пример 4 п. 2.2). Итак,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})=1.$$

2.5. Неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞

Пусть требуется найти $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}$ и при этом имеет место одна из неопределенностей 0^0, ∞^0 или 1^∞.

Воспользуемся тем, что степенно-показательную функцию $(u(x))^{v(x)}$, которая определена при условии, что $u(x)>0$, можно представить в виде

$$(u(x))^{v(x)}=e^{v(x)\cdot\ln u(x)}.$$

В силу непрерывности показательной функции

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)},$$

при этом во всех трех случаях в показателе степени будет иметь место неопределенность $(0\cdot\infty)$, которая далее легко сводится к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0+0} \sqrt[\ln x]{\sin^2 x}$.

Решение. $$\lim_{x\to 0+0} \sqrt[\ln x]{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0+0}(\sin x)^{\frac{2}{\ln x}}(0^0) =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{2}{\ln x}\cdot\ln\sin x (0\cdot\infty)}.$$

Найдем предел показателя степени:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{2}{\ln x}\cdot\ln\sin x = \lim_{x\to 0+0}\frac{2\ln\sin x}{\ln x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{2}{\sin x}\cdot\cos x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} 2\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x = 2.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt[\ln x]{\sin^2 x} = e^2$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\pi x/2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\pi x/2}(1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}\pi x/2\cdot\ln(2-x)(\infty\cdot 0)}$.

Найдем предел показателя степени:

$$\lim_{x\to 1}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(2-x) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = e^{2/\pi}$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0+0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0+0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}(\infty^0) = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\sin x\ln\operatorname{ctg} x(0\cdot\infty)}$

Найдем предел показателя степени:

$$\lim_{x\to 0+0}\sin x\ln\operatorname{ctg} x = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\frac{1}{\sin x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cos x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0+0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = e^0 = 1$.

3. Перечень задач для самостоятельной работы

В заданиях 1 – 33 предлагается найти указанные пределы

	Ответы:
1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$	$\dfrac{2}{3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-3)}{3x^2-x-10}$	$\dfrac{4}{11}$
4. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 x}$	$\dfrac{9}{2}$
5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$	$\dfrac{m}{n}a^{m-n}$
6. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{x\sin x}{1-\cos 4x}$	$\dfrac{1}{2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\mathrm{arctg}^2\,x}{\mathrm{tg}\,x-x}$	3
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\frac{2}{\pi}\arccos x)}{\ln(1+x)}$	$\dfrac{2}{\pi}$
9. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\pi-2\,\mathrm{arctg}\,x}{\ln(1+\frac{1}{x})}$	2
10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x-1}{\ln x}$	1
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$	1
13. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt[3]{x^2+7}}$	± 1
14. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^2\cdot\ln x$	0
15. $\lim\limits_{x\to \infty} x\cdot\sin\dfrac{\pi}{x}$	π
16. $\lim\limits_{x\to \infty} x\cdot(e^{2/x}-1)$	2
17. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n\cdot e^{-x}$	0
18. $\lim\limits_{x\to 0} x^{-100}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$	0

19. $\lim\limits_{x\to\pi} (\pi^2 - x^2)\cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ $\qquad 4\pi$

20. $\lim\limits_{x\to 1} \cos\dfrac{\pi x}{2}\cdot \ln(1-x)$ $\qquad 0$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$ $\qquad \dfrac{1}{2}$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$ $\qquad \dfrac{1}{6}$

23. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \ln x)$ $\qquad +\infty$

24. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$ $\qquad 1$

25. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}}$ $\qquad \sqrt{e}$

26. $\lim\limits_{x\to 1} (3-2x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$ $\qquad e^{4/\pi}$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x^2]{\cos x}$ $\qquad e^{-\frac{1}{2}}$

28. $\lim\limits_{x\to 0+0} (1+x)^{\ln x}$ $\qquad 1$

29. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ $\qquad e$

30. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{x^x - 1}$ $\qquad 1$

31. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$ $\qquad 1$

32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$ $\qquad \dfrac{1}{3}$

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$ $\qquad \dfrac{1}{2}$

Тема 3. **Формула Тейлора**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Идея формулы Тейлора заложена в понятии дифференцируемой функции. В чем она заключается?

Приращение Δy дифференцируемой в точке x_0 функции представимо в виде

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \text{ или}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \text{ или}$$

$$f(x) = P_1(x) + o(x - x_0), \qquad (1)$$

где $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – многочлен первой степени; $o(x - x_0)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(x - x_0)$ при $x \to x_0$.

Естественно, возникает вопрос, нельзя ли по аналогии с (1) представить функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n),$$

где $P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n$ – многочлен степени n; $o((x-x_0)^n)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(x - x_0)^n$ при $x \to x_0$?

1.2. Ответ на поставленный вопрос

Имеет место следующая

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, а в самой точке имеет производные до n-го порядка включительно, тогда при $x \to x_0$ имеет место формула

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \qquad (2)$$

где

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
– многочлен степени n относительно $(x-x_0)$; $o((x-x_0)^n)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(x-x_0)^n$.

Формула (2) называется формулой Тейлора[1], многочлен $P_n(x)$ – многочленом Тейлора. Функцию
$$r_n(x)=f(x)-P_n(x)$$
принято называть остаточным членом формулы Тейлора. С учетом этого формулу Тейлора можно записать в виде
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x),$$
где $r_n(x)=o((x-x_0)^n)$ при $x\to x_0$.

При $n=1$ имеем $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+o(x-x_0)$, при $n=2$ будем иметь
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$
и т.д.

1.3. Чем замечательна формула Тейлора?

Так как при $x\to x_0$ слагаемое $r_n(x)=o((x-x_0)^n)$ формулы Тейлора является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем любой член многочлена Тейлора, это позволяет в окрестности точки x_0 приближенно представить функцию $f(x)$ в виде многочлена:
$$f(x)\simeq a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n,$$
при этом коэффициенты a_k этого многочлена вычисляются по удивительно простой формуле
$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$
Среди всех функций многочлены являются самыми простыми. Поэтому понятно, как важно и для самой математики, и для ее приложений иметь возможность представить произвольную функцию приближенно в виде многочлена. Такую возможность дает формула Тейлора.

[1] Б. Тейлор (1685 – 1731) – английский математик.

1.4. Можно ли остаточный член $r_n(x)$ выразить каким-то образом через $f(x)$?

Существует несколько форм записи $r_n(x)$ через производную $(n+1)$-го порядка от функции $f(x)$. Наиболее распространенной является запись $r_n(x)$ в форме Лагранжа[2]:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где $c = x_0 + \theta \cdot \Delta x$ – некоторая точка между x и x_0. Интересно, что эта форма записи $r_n(x)$ отличается от $(n+1)$-го члена формулы Тейлора лишь тем, что производная $(n+1)$-го порядка вычисляется не в самой точке x_0, а в некоторой соседней с ней точке $c = x_0 + \theta \cdot \Delta x$, где $0 < \theta < 1$.

1.5. Как выглядит формула Тейлора в частном случае, когда $x_0 = 0$?

При $x_0 = 0$ формула Тейлора имеет самый простой вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n),$$

или

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n).$$

Этот частный случай формулы Тейлора называется формулой Маклорена[3].

2. Решение задач

2.1. Формулы Маклорена для основных элементарных функций имеют следующий вид:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n);$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

[2] Ж. Лагранж (1736 – 1813) – французский математик и механик.

[3] К. Маклорен (1698 – 1746) – шотландский математик.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) =$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$

4. $(1+x)^a = 1 + ax + \ldots + \frac{a \ldots (a-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) =$
$= 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k!} x^k + o(x^n);$

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) =$
$= \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$

Покажем, как получены формулы для $\sin x$ и $(1+x)^n$. Остальные формулы рекомендуется получить самостоятельно.

Решение. Пусть $f(x) = \sin x$. Очевидно, условия теоремы выполняются в любой окрестности точки $x_0 = 0$. Для производной порядка m от функции $\sin x$ ранее была получена формула $(\sin x)^{(m)} = \sin(x + m \cdot \frac{\pi}{2})$, поэтому

$$f^{(m)}(0) = \sin(m \cdot \tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{для } m = 2k, \\ (-1)^k & \text{для } m = 2k+1,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Тогда по формуле Маклорена для функции $f(x) = \sin x$ имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

при $x \to 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Заметим, что остаточный член записан в виде $o(x^{2n+2})$, а не в виде $o(x^{2n+1})$ потому, что слагаемое многочлена со степенью $(2n+2)$ равно нулю. Интересно отметить, что многочлен Тейлора для нечетной функции $f(x) = \sin x$ содержит слагаемые только с нечетными степенями аргумента.

Пусть $f(x) = (1+x)^a$, где a – некоторое фиксированное число. Так как $f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}$, то $f^{(n)}(0) = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)$ и, следовательно,

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a \ldots (a-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

при $x \to 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.2. Функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ разложить по формуле Тейлора до слагаемых третьего порядка включительно:

а) по степеням x; б) по степеням $(x - \frac{\pi}{4})$.

Решение.

а) $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$.

Найдем $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$:

$$f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0; \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = \frac{-2}{\cos^3 x} \cdot (-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \Rightarrow f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = \frac{2\cos x \cdot \cos^3 x - 2\sin x \cdot 3\cos^2 x(-\sin x)}{\cos^6 x} =$$

$$= \frac{2\cos^2 x + 6\sin^2 x}{\cos^4 x} \Rightarrow f'''(0) = 2.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2}{3!}x^3 + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \text{ при } x \to 0.$$

б) $f(x) = f(\frac{\pi}{4}) + \dfrac{f'(\frac{\pi}{4})}{1!}(x - \frac{\pi}{4}) + \dfrac{f''(\frac{\pi}{4})}{2!}(x - \frac{\pi}{4})^2 +$

$$+ \frac{f'''(\frac{\pi}{4})}{3!}(x - \tfrac{\pi}{4})^3 + o((x - \tfrac{\pi}{4})^3).$$

Найдем $f(\frac{\pi}{4})$, $f'(\frac{\pi}{4})$, $f''(\frac{\pi}{4})$, $f'''(\frac{\pi}{4})$:

$$f(\tfrac{\pi}{4}) = \operatorname{tg}\tfrac{\pi}{4} = 1; \qquad f'(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2;$$

$$f''(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\cos^3\frac{\pi}{4}} = 4; \qquad f'''(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{2\cos^2\frac{\pi}{4} + 2\sin^2\frac{\pi}{4}}{\cos^4\frac{\pi}{4}} = 16.$$

Таким образом, при $x \to \frac{\pi}{4}$

$$\operatorname{tg} x = 1 + 2\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) + \frac{4}{2!}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^2 + \frac{16}{3!}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^3 + o\Big(\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^3\Big) =$$

$$= 1 + 2\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) + 2\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^2 + \frac{8}{3}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^3 + o\Big(\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^3\Big).$$

2.3. Получить разложение по формуле Маклорена гиперболических функций $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Решение. Воспользуемся разложением

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \tag{1}$$

Заменив в нем x на $-x$, будем иметь

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \qquad (2)$$

Путем вычитания из разложения (1) разложения (2) и последующего деления на 2 получим

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

Аналогично, складывая (1) и (2) и деля на 2, будем иметь

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

Интересно сравнить разложения для $\operatorname{sh} x$ и $\sin x$, для $\operatorname{ch} x$ и $\cos x$.

2.4. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ по формуле Маклорена. С помощью полученного разложения найти $f^{(6)}(0)$ и $f^{(7)}(0)$.

Решение. Воспользуемся разложением

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Заменяя в нем x на x^2 и полагая $a = \frac{1}{2}$, получим

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^4 + \ldots + \frac{\frac{1}{2}\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^{2n} + o(x^{2n}).$$

После преобразования коэффициентов полученного разложения будем иметь

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2^2 2!}x^4 + \ldots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Найдем с помощью полученного разложения $f^{(6)}(0)$ и $f^{(7)}(0)$. В формуле Маклорена $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, откуда $f^{(k)}(0) = a_k \cdot k!$. В нашем случае $a_6 = \dfrac{1\cdot 3}{2^3 3!} = \dfrac{1}{16}$, следовательно, $f^{(6)}(0) = a_6 \cdot 6! = 45$. Так как полученное разложение не содержит слагаемого с x^7, то $a_7 = 0$ и $f^{(7)}(0) = 0$.

2.5. Получить разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \ln \dfrac{\sin x}{x}$ до слагаемого с x^4.

Решение. Попытаемся решить задачу, используя полученные в задаче 2.1 разложения для $\sin x$ и $\ln(1+x)$. Так как $\sin x =$ $= x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^6)$, то $\dfrac{\sin x}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} + o(x^5)$. Далее воспользуемся разложением

$$\ln(1+\alpha(x)) = \alpha(x) - \frac{\alpha^2(x)}{2} + o(\alpha^2(x)),$$

где $\alpha(x) = -\dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} + o(x^5)$,

$$\alpha^2(x) = \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)\right)^2 = \left(-\frac{x^2}{3!}\right)^2 + o(x^5).$$

Тогда при $x \to 0$ будем иметь

$$\ln\frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3!}\right)^2 + o(x^5) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^5).$$

2.6. Вычислить $\sqrt[4]{e}$ с точностью до 0.001.

Решение. Воспользуемся разложением

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x).$$

Чтобы выяснить, сколько слагаемых разложения следует взять, чтобы обеспечить вычисление $\sqrt[4]{e}$ с точностью до 0.001, нужно найти такое n, при котором $|r_n(x)| < 0.001$. Воспользуемся остаточным членом в форме Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

В нашем случае $x = \frac{1}{4}$, $0 < c < \frac{1}{4}$, $f^{(n+1)}(c) = e^c$. Очевидно, что $e^c < 3$ и тогда $r_n(\frac{1}{4}) < \dfrac{3}{(n+1)!}\frac{1}{4^{n+1}}$. Уже при $n = 3$ имеем $r_3(\frac{1}{4}) = \dfrac{3}{4!}\frac{1}{4^4} = \frac{1}{2048} < 0.001$, поэтому при вычислении $\sqrt[4]{e}$ с точностью до 0.001 достаточно в формуле Маклорена для e^x взять слагаемые до x^3 включительно:

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

При $x = \frac{1}{4}$ будем иметь

$$\sqrt[4]{e} \simeq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16\cdot 2} + \frac{1}{64\cdot 4} \simeq 1.285.$$

2.7. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{130}$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой Маклорена для функции $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, представим $\sqrt[3]{130}$ в виде

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5\sqrt[3]{1+\tfrac{5}{125}} = 5(1+0.04)^{1/3}.$$

Воспользуемся разложением

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + r_n(x)$$

при $a = \frac{1}{3}$. В нашем случае $x = 0.04$ – достаточно мало, поэтому можно ограничиться, например, тремя слагаемыми:

$$(1+x)^{1/3} \simeq 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2!}x^2 = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}.$$

При $x = 0.04$ будем иметь

$$(1+0.04)^{1/3} \simeq 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.04 - \frac{1}{9} \cdot 0.0016 = 1.01316.$$

Оценим допущенную погрешность. Запишем остаточный член $r_2(x)$ в форме Лагранжа:

$$r_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3, \text{ где } x = 0.04,\ 0 < c < 0.04;$$

$$f'''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)(1+x)^{-8/3} = \frac{10}{27(1+x)^{8/3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(c) = \frac{10}{27(1+c)^{8/3}}.$$

Тогда

$$r_2(0.04) = \frac{1}{3!}\frac{10}{27(1+c)^{8/3}}(0.04)^3 < \frac{10(0.04)^3}{3! \cdot 27} = \frac{0.00064}{162} < 0.0001.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{130} = 5(1+0.04)^{1/3} \simeq 5 \cdot 1.01316 = 5.0658$, при этом допущенная ошибка не превышает 0.0001.

2.8. Для каких x приближенная формула $\cos x \simeq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ справедлива с точностью до 0.0001?

Решение. Воспользуемся формулой Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + r_3(x), \text{ где } r_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4.$$

Так как $f^{(4)}(x) = \cos x$, то $r_3(x) = \dfrac{\cos c}{4!}x^4$. Очевидно, $|r_3(x)| \leqslant \dfrac{x^4}{4!}$. По условию задачи должно выполняться неравенство $\dfrac{x^4}{4!} < 0.0001$, откуда $|x| < \sqrt[4]{24 \cdot 0.0001} \simeq 0.222$.

2.9. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора (метод выделения главной части).

Если функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$, то первое отличное от нуля слагаемое разложения этой функции по формуле Тейлора является ее главной частью, и это можно эффективно использовать при вычислении пределов.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\,\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. Воспользуемся известными разложениями

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$
$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3).$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3))-(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))-2x}{x-(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}=2.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}(1^\infty)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}$. Найдем предел показателя степени:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}\,\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x}}{x^2}\,\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\frac{x^2}{3!}+o(x^2))}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{3!}+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{6}.$$

При вычислении предела было использовано разложение в ряд Маклорена для $\sin x$ и $\ln(1+x)$.

Окончательно будем иметь $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-1/6}$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}))$ двумя способами (с использованием формулы Тейлора и по правилу Лопиталя).

1. Воспользуемся разложением при $x\to\infty$:

$$\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o(\tfrac{1}{x^2}).$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\tfrac{1}{x}))=\lim_{x\to\infty}(x-x^2(\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{x^2}+o(\tfrac{1}{x^2})))=\frac{1}{2}.$$

2. Найдем предел по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\tfrac{1}{x}))=\lim_{x\to\infty}x^2(\tfrac{1}{x}-\ln(1+\tfrac{1}{x}))=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}}.$$

Имеет смысл ввести переменную $t = \frac{1}{x}$, которая при $x \to \infty$ стремится к 0. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{(1+t)^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

В данном случае первый способ выглядит предпочтительнее. В других случаях, возможно, удобнее использовать второй способ.

Теперь, когда вы знаете несколько способов раскрытия неопределенностей, в каждом конкретном случае нужно уметь выбрать наиболее эффективный.

3. Перечень задач для самостоятельной работы

3.1. Получить разложение по формуле Тейлора функции $y = e^x$

а) по степеням x; б) по степеням $(x-2)$.

3.2. Получить разложение по формуле Маклорена функций $y = \cos x$, $y = \ln(1+x)$.

3.3. Разложить многочлен $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ по степеням $(x+1)$.

Ответ: $x^3 + 3x^2 - 2x + 4 = (x+1)^3 - 5(x+1) + 8$.

3.4. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ в окрестности точки $x_0 = 1$ до членов третьего порядка включительно.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}(x-1)^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

3.5. Используя известные формулы, получить разложения по степеням x следующих функций:

$f(x) = e^{-x^2}$, $f(x) = \sin x \cos x$, $f(x) = \cos^2 x$,

$f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Указание. Следует представить функции в виде

$$f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = x(1+x)^{-1},$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

3.6. Для функции $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$ найти первые три члена разложения по степеням $(x-2)$. Вычислить приближенно с использованием полученного разложения $f(2.1)$. Найти точное значение $f(2.1)$. Сравнить полученные результаты и сделать вывод.

3.7. Пользуясь приближенной формулой $e^x \simeq 1+ +x + \frac{x^2}{2!}$, найти $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ и оценить погрешность.

Ответ: 0.78, $|r_2(-\frac{1}{4})| < 0.01$.

3.8. Найти $\cos 10^\circ$ с точностью до 0.001.

3.9. Оценить абсолютную погрешность приближенной формулы $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$ при $0 \leqslant x \leqslant 0.4$.

Ответ: $|r_4(0.4)| < 0.004$.

3.10. Используя полученные ранее разложения, выделить главные части заданных бесконечно малых при $x \to 0$ величин

	Ответы:
1. $\alpha(x) = x - \sin x$,	$\alpha(x) \sim \dfrac{x^3}{6}$;
2. $\alpha(x) = e^x - e^{-x}$,	$\alpha(x) \sim 2x$;
3. $\alpha(x) = e^{x^3} - x^3 - 1$,	$a(x) \sim \dfrac{x^6}{2}$;
4. $\alpha(x) = \ln(e^x - x - \frac{x^2}{2})$,	$\alpha(x) \sim \dfrac{x^3}{6}$;
5. $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - x$,	$\alpha(x) \sim \dfrac{x^3}{3}$.

3.11. Найти указанные пределы:

	Ответы:
1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}$,	1;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3} - x^3 - 1}{x^6}$,	$\dfrac{1}{2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(e^x - x - \frac{x^2}{2}}{x^2 \sin x}$, $\qquad \dfrac{1}{6}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$, $\qquad -\dfrac{1}{3}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, $\qquad 1$.

Тема 4. Приложение дифференциального исчисления к исследованию функций и построению графиков

В гл. “Введение в математический анализ” были рассмотрены такие важные элементы исследования поведения функции, как нахождение области определения, исследование функции на четность и нечетность, на периодичность. Была дана классификация точек разрыва функции и методика определения характера точек разрыва. Что же касается таких важных вопросов, как исследование функции на монотонность и экстремум, нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, то методами гл. “Введение в математический анализ” эти вопросы удавалось решить лишь в простейших случаях.

Теория дифференциального исчисления дает простой и эффективный способ решения как этих, так и ряда других вопросов, касающихся поведения функции. Полное исследование функции с привлечением теории предела и непрерывности и дифференциального исчисления позволяет строить графики довольно сложных функций, а также решать другие многочисленные задачи как самой математики, так и ее приложений.

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Чем существенно отличается поведение касательной в точках графика строго возрастающей или неубывающей функции от поведения касательной в точках графика строго убывающей или невозрастающей функции?

Касательная в точках графика строго возрастающей (рис. 1 и 2) или неубывающей (рис. 3) функции либо образует с положительным направлением оси Ox острый угол, либо ей параллельна.

Касательная, проведенная в точках графика строго убывающей (рис. 4 и 5) или невозрастающей (рис. 6), либо образует с положительным направлением оси Ox тупой угол, либо ей параллельна.

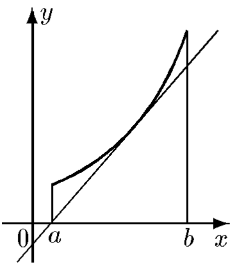


Рис. 1

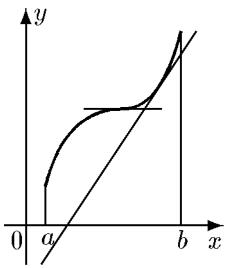


Рис. 2

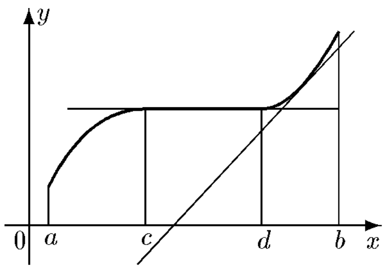


Рис. 3

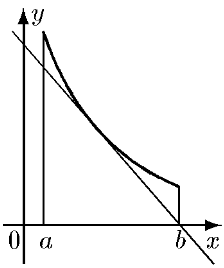


Рис. 4

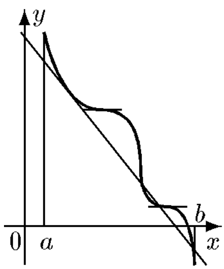


Рис. 5

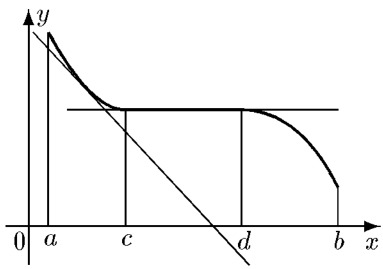


Рис. 6

1.2. В чем состоит необходимое и достаточное условие монотонности функции?

Рис. 1 – 6 являются геометрической иллюстрацией следующих теорем.

Теорема 1. Для того чтобы дифференцируемая на (a,b) функция $f(x)$ была возрастающей или неубывающей на (a,b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)\geqslant 0\ \ \forall x\in(a,b)$ (рис. 1–3).

Теорема 2. Для того чтобы дифференцируемая на (a,b) функция $f(x)$ была убывающей или невозрастающей на (a,b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)\leqslant 0\ \ \forall x\in(a,b)$ (рис. 4–6).

Заметим, что для строго возрастающей (строго убывающей) на (a,b) функции $f'(x)$ может обращаться в 0 лишь в нескольких изолированных друг от друга точках интервала (a,b) (рис. 2 и 5), в отличие от неубывающей (невозрастающей) функции, для которой $f'(x)$ обращается в 0 на некоторых промежутках, составляющих часть (a,b) (рис. 3 и 6).

1.3. Указать точки локального максимума и локального минимума функции $y=f(x)$ (рис. 7). Какой особенностью обладает функция в окрестности точки максимума? В окрестности точки минимума?

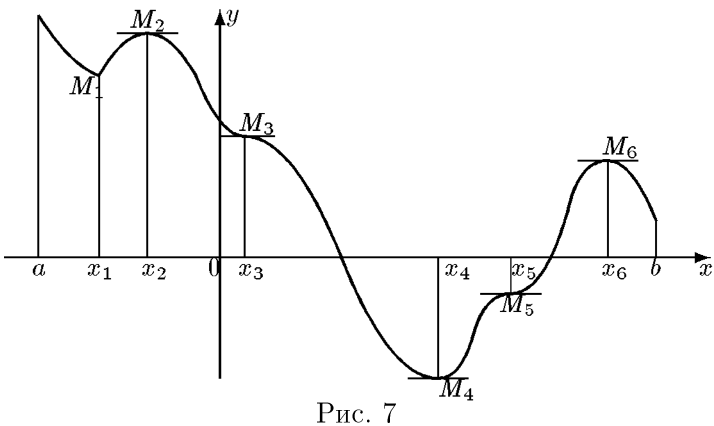


Рис. 7

Согласно определению, функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум, если существует окрестность точки x_0, во всех точках которой, отличных от x_0, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$. На рис. 7 такой особенностью обладают точки x_1 и x_4, следовательно, в этих точках функция имеет локальный минимум.

Аналогично, функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум, если существует окрестность точки x_0, во всех точках которой, отличных от x_0, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Именно так ведет себя функция в окрестности точек x_2 и x_6, являющихся, таким образом, точками локального максимума.

Точки локального минимума и максимума называются точками локального экстремума.

1.4. В чем отличие локального минимума (максимума) от наименьшего (наибольшего) значения функции в ее области определения?

Локальный минимум функции является ее наименьшим значением лишь в некоторой окрестности точки локального минимума. Если же $f(x_0)$ – наименьшее значение функции в ее области определения, то неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$ выполняется не в некоторой окрестности точки x_0, а для всех x из области определения функции. Аналогично, если в точке x_0 функция принимает наибольшее во всей области определения значение, то для всех x из области определения будет выполняться неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Еще одно очень важное отличие – локальный экстремум функция может иметь только во внутренних точках области определения, а наибольшее и наименьшее значение она может принимать и в граничных точках. Для функции, изображенной на рис. 7, $f(x_4)$ – наименьшее значение, $f(a)$ – наибольшее.

1.5. Может ли значение функции в точке локального минимума оказаться больше значения этой же функции в точке локального максимума?

Может. Например, на рис. 7 $f_{\min}(x_1) > f_{\max}(x_6)$. Это обстоятельство наиболее ярко подчеркивает локальный характер понятия экстремума.

1.6. Как ведет себя производная $f'(x)$ в точках экстремума?

В точках M_2, M_4, M_6 графика функции $y = f(x)$ касательная параллельна оси Ox, следовательно, $f'(x_2) = 0$, $f'(x_4) = 0$, $f'(x_6) = 0$. В точке M_1 график функции касательной не имеет, следовательно, производная этой функции в точке x_1 не существует. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 3 (необходимое условие экстремума). Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум, то ее производная в этой точке равна 0 или не существует.

1.7. На рис. 7 в точках M_3 и M_5 графика касательная параллельна оси Ox, а экстремума в точках x_3 и x_5 нет. О чем это свидетельствует?

Это свидетельство того, что равенство нулю первой производной является только необходимым условием экстремума, но не является достаточным для наличия экстремума.

Точки, в которых $f'(x) = 0$, а также точки, в которых производная не существует, – это только "подозрительные" на экстремум точки. Такие точки принято называть критическими. Для функции $y = f(x)$, изображенной на рис.7, критическими являются точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6. Однако в критических точках x_3 и x_5 экстремума нет.

1.8. В чем заключается достаточное условие наличия экстремума в критической точке?

Если на основании теоремы 1 и 2 расставить вдоль графика функции $y = f(x)$ на рис. 7 знаки $f'(x)$, то становится очевидной следующая

Теорема 4 (достаточное условие экстремума). Если при переходе через критическую точку слева направо производная $f'(x)$ изменяет свой знак, то функция $f(x)$ имеет в этой точке локальный экстремум, причем, если знак изменяется с плюса на минус, то это точка максимума, если с минуса на плюс – точка минимума.

При переходе через критические точки x_3 и x_5 производная не меняет знака, поэтому экстремума в этих точках нет.

Пример 1. Исследовать на монотонность и экстремум функцию $y = x^3e^{-x}$.

Решение. Функция определена на всей числовой оси, причем $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^{-x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6}{e^x} = 0$, следовательно, график функции при $x \to +\infty$ "прижимается" к оси Ox.

Найдем производную функции:

$$y' = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = x^2e^{-x}(3 - x).$$

Из уравнения $x^2e^{-x}(3 - x) = 0$ найдем критические точки $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Разобьем область определения функции критическими точками на интервалы $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ и $(3, +\infty)$, определим знак $f'(x)$ на каждом интервале и результаты занесем в таблицу

x	$(-\infty,0)$	0	(0,3)	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	−
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$27/e^3$	$\searrow$
		нет		max	

При переходе через критическую точку $x_1 = 0$ знак $f'(x)$ не меняется, следовательно, экстремума в точке нет; при переходе через точку $x_2 = 3$ знак $f'(x)$ меняется с (+) на (−). Это означает, что в точке $x = 3$ функция имеет максимум $f(3) = \frac{27}{e^3}$.

График функции $y = x^3 e^{-x}$ изображен на рис. 8.

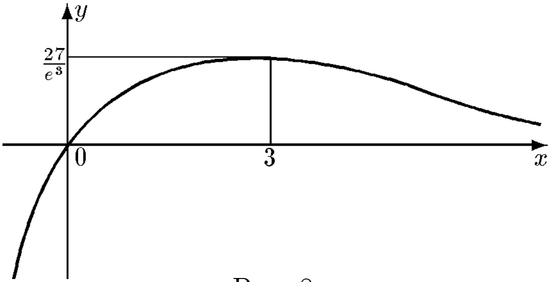


Рис. 8

Полученный график можно существенно уточнить, если провести исследование на так называемые выпуклость, вогнутость и перегиб.

1.9. Чем существенно отличается поведение графика функции $y = f(x)$ (рис. 9) в окрестности точек M_1, M_2, M_5 от его поведения в окрестности точек M_3, M_4?

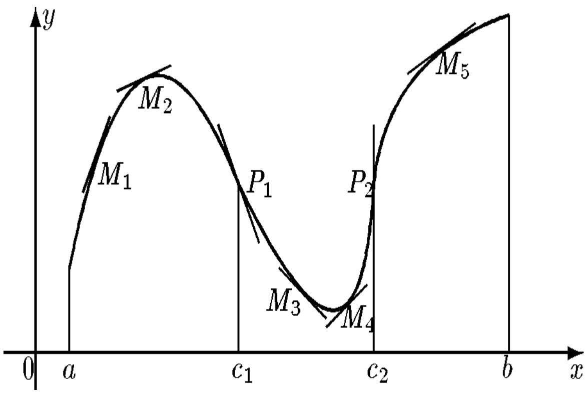


Рис. 9

В окрестности точек M_1, M_2, M_5 график функции располагается **под** касательной, проведенной в этих точках. В точках, обладающих таким свойством, кривую принято называть выпуклой. В окрестности точек M_3 и M_4 график функции располагается **над** касательной. В этом случае кривую называют вогнутой в соответствующих точках. Аналогичная терминология используется и для самой функции $y = f(x)$. Функция $f(x)$, график которой изображен на рис. 9, выпукла в каждой точке интервалов (a, c_1) и (c_2, b) и вогнута в точках интервала (c_1, c_2).

1.10. Какой особенностью обладают точки P_1, P_2 графика (рис. 9)?

В окрестности точек P_1 и P_2 кривая располагается по разные стороны от касательных, проведенных в этих точках. С одной стороны от каждой из этих точек кривая вогнута, с другой – выпукла. Кривая в точках P_1 и P_2 переходит с одной стороны касательной на другую, пересекая касательную. Такие точки кривой принято называть точками перегиба, а соответствующие им значения аргумента (в нашем случае это c_1 и c_2) называют точками перегиба функции $y = f(x)$.

1.11. Можно ли путем дифференцирования функции $y = f(x)$ решить вопрос о выпуклости (вогнутости) ее графика?

Проследим, как будет вести себя с увеличением аргумента производная $f'(x)$ вдоль вогнутой (рис. 10) и выпуклой (рис. 11) кривой. Для вогнутой кривой (рис. 10) $\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2 < \operatorname{tg}\alpha_3$, а так как $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, это означает, что для вогнутой на некотором промежутке кривой производная $f'(x)$ возрастает. Для выпуклой кривой (рис. 11) $\operatorname{tg}\alpha_1 > \operatorname{tg}\alpha_2 > \operatorname{tg}\alpha_3$, то есть $f'(x)$ убывает.

Таким образом, рис. 10 и 11 являются геометрической иллюстрацией следующей теоремы.

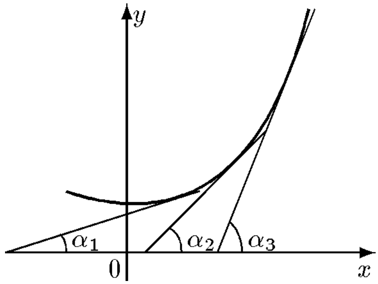


Рис. 10

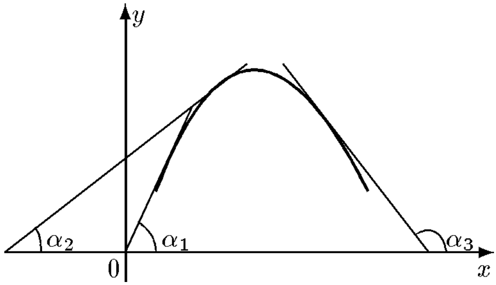


Рис. 11

Теорема 5. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b). Тогда если $f''(x) > 0 \;\; \forall x \in (a, b)$, то кривая $y = f(x)$ вогнута на (a, b), если же $f''(x) < 0 \;\; \forall x \in (a, b)$, то кривая $y = f(x)$ выпукла на (a, b).

1.12. В чем заключается необходимое условие наличия перегиба у функции $y = f(x)$ в точке x_0?

Из теоремы 5 следует, что если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 перегиб и ее вторая производная $f''(x)$ непрерывна в этой точке, то $f''(x_0) = 0$. Кроме того, вторая производная в точке перегиба может и не существовать. Таким образом, точки перегиба функции $y = f(x)$ находятся среди точек, в которых $f''(x) = 0$ или не существует. Здесь следует вспомнить, что точки экстремума функции $y = f(x)$ находятся среди множества точек, в которых $f'(x) = 0$ или не существует. Вспомним также, что условие $f'(x) = 0$ достаточным для наличия экстремума не является. Аналогично, равенства нулю второй производной в некоторой точке недостаточно для наличия в этой точке перегиба.

Иллюстрацией к сделанному замечанию является, например, функция $f(x) = x^4$, у которой $f''(0) = 0$, но перегиба в точке $x = 0$ нет, так как $f''(x) = 12x^2 > 0$ и слева, и справа от точки $x = 0$, следовательно, кривая $y = x^4$ вогнута.

1.13. В чем заключается достаточное условие наличия перегиба у функции $y = f(x)$ в точке x_0?

Вернемся к графику функции $y = f(x)$, изображенному на рис. 9, и расставим на основании теоремы 5 вдоль графика знаки $f''(x)$ (рис. 12). Заметим, что при переходе через точки P_1 и P_2 вторая производная $f''(x)$ меняет знак. Таким образом, имеет место

Теорема 6 (достаточное условие перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет вторую производную $f''(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, может быть, саму точку x_0). Тогда если при переходе через точку

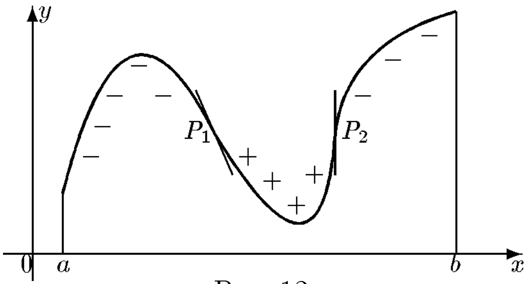


Рис. 12

x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 перегиб.

Итак, с помощью первой своей производной функция $f(x)$ исследуется на монотонность и экстремум, с помощью второй – на выпуклость, вогнутость и перегиб.

Пример 1. Исследовать на выпуклость, вогнутость и перегиб функцию $y = x^3e^{-x}$ (исследованную ранее на монотонность и экстремум).

Решение. Найдем вторую производную:

$$y'' = (3x^2e^{-x} - x^3e^{-x})' = 6xe^{-x} - 3x^2e^{-x} - 3x^2e^{-x} + x^3e^{-x} =$$
$$= e^{-x}(6x - 6x^2 + x^3) = xe^{-x}(x^2 - 6x + 6).$$

Найдем точки, в которых $f''(x) = 0$ (подозрительные на перегиб). Так как $e^{-x} \neq 0$, то $f''(x) = 0$ при $x_1 = 0$ и в точках $x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{3}$, являющихся корнями уравнения $x^2 - 6x + 6 = 0$. Разобьем полученными точками область определения функции на интервалы и определим знак $f''(x)$ на каждом интервале. Результаты занесем в таблицу

x	(-∞,0)	0	(0,3-$\sqrt{3}$)	3-$\sqrt{3}$	(3- $\sqrt{3}$,3+$\sqrt{3}$)	3+$\sqrt{3}$	(3+$\sqrt{3}$,+∞)
f''	—	0	+	0	—	0	+
f	Выпукла	0	Вогнута		Выпукла		Вогнута

При переходе через точки x_1, x_2 и x_3 знак $f''(x)$ меняется, следовательно, функция $y = x^3e^{-x}$ имеет в этих точках перегиб.

Вычислим значения функции в точках перегиба и на основании проведенного исследования уточним ранее построенный график (рис. 8). В результате получим график заданной функции (рис. 13).

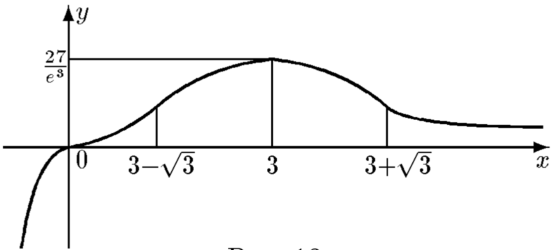


Рис. 13

Из приведенного примера видно, как значительно уточняется график функции на основании ее исследования на выпуклость, вогнутость и перегиб.

Рассмотренная функция непрерывна вместе со своими производными $f'(x)$ и $f''(x)$. Для таких функций интервалы выпуклости и вогнутости отделяются друг от друга только точками перегиба, в которых $f''(x) = 0$. В более сложных случаях знак $f''(x)$ может изменяться также при переходе через точки разрыва второй производной. К этим точкам, в частности, относятся точки разрыва функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$ (рис. 14).

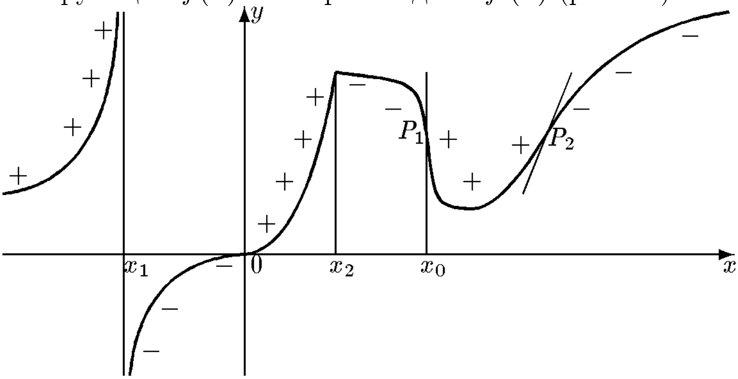


Рис. 14

На рис. 14 вдоль графика функции $f(x)$ расставлены знаки $f''(x)$. В точках 0, P_1, P_2 функция имеет перегиб, в точке x_1 – разрыв, в точке x_2 терпит разрыв $f'(x)$.

Следует отметить, что если $f'(x_0) = \infty$ (касательная перпендикулярна оси Ox), то функция $f(x)$ в точке x_0 также имеет перегиб. На рис. 14 такой точкой является P_1.

1.14. Что можно сказать о поведении функции $y = f(x)$ в точке x_0, если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$?

Если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) > 0$ (кривая в критической точке вогнута), то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 минимум (рис. 15). Если же $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) < 0$ (кривая в критической точке выпукла), то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (рис. 16). Это утверждение принято называть вторым достаточным условием экстремума функции.

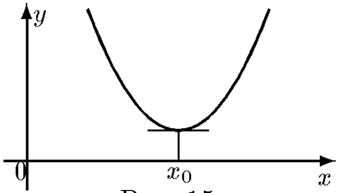


Рис. 15

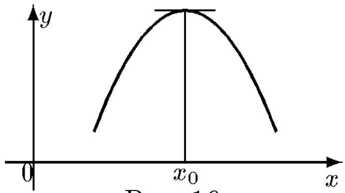


Рис. 16

1.15. Используются ли при исследовании функций производные высших порядков?

С помощью формулы Тейлора может быть доказана следующая

Теорема 7. Если первая из производных, не обращающихся в точке x_0 в нуль, имеет четный порядок, то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум (максимум, если эта производная отрицательна, и минимум, если она положительна); если же первая из производных (порядка выше второго), не обращающихся в точке x_0 в нуль, имеет нечетный порядок, то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 перегиб.

1.16. Каким общим свойством обладают прямые (l_1), (l_2) и (l_3) относительно изображенных на рис. 17–19 кривых?

В каждом случае с удалением точки $M(x, y)$ кривой от начала координат расстояние d от этой точки до соответствующей прямой стремится к нулю. Прямые, обладающие таким свойством, принято называть асимптотами соответствующих кривых. Асимптоты подразделяются на вертикальные (рис. 17), горизонтальные (рис. 18) и наклонные (рис. 19).

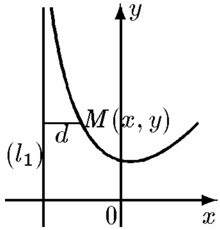


Рис. 17

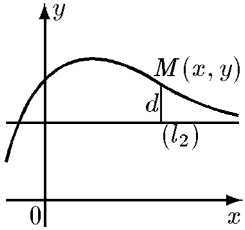


Рис. 18

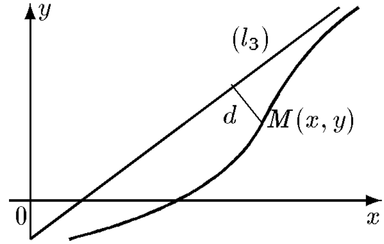


Рис. 19

1.17. Графики каких элементарных функций имеют асимптоты?

1. $y = \dfrac{k}{x}$ (рис. 20 и 21).

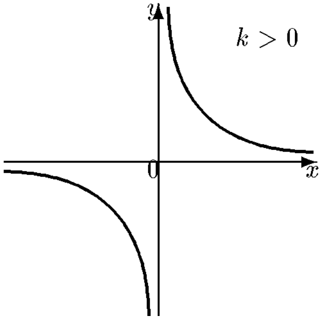


Рис. 20

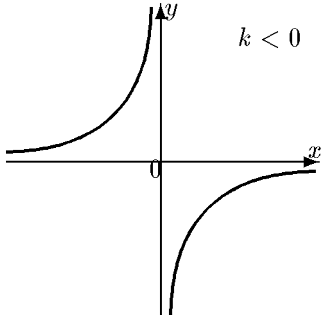


Рис. 21

$x = 0$ – вертикальная асимптота;
$y = 0$ – горизонтальная асимптота.

2. $y = a^x$ (рис. 22), $y = \log_a x$ (рис. 23).

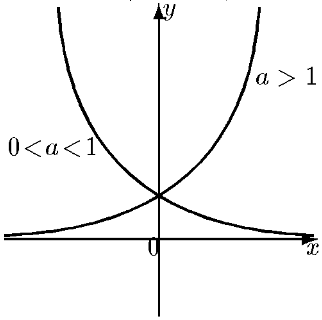


Рис. 22

$y = 0$ – горизонтальная асимптота

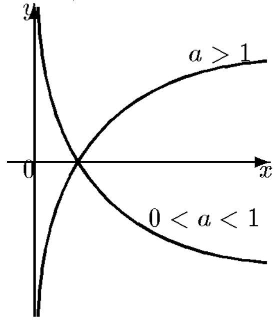


Рис. 23

$x = 0$ – вертикальная асимптота

3. $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 24), $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 25).

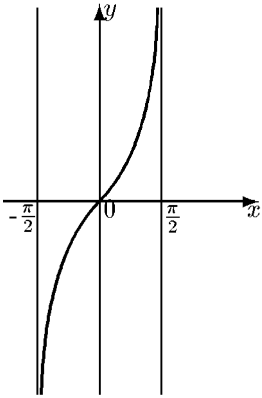


Рис. 24

$x = \pm\frac{\pi}{2}$ – вертикальная асимптота

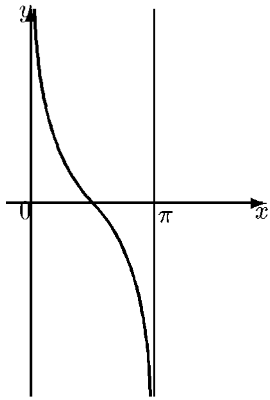


Рис. 25

$x = 0$, $x = \pi$ – вертикальные асимптоты

4. $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 26), $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 27).

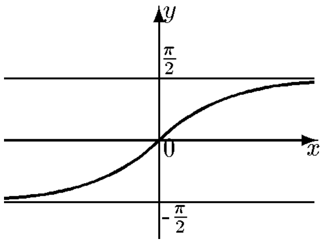


Рис. 26

$y = \pm\frac{\pi}{2}$ – горизонтальная асимптота

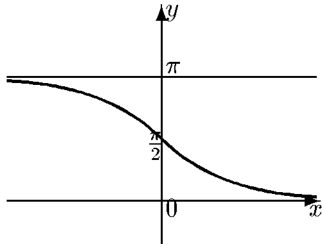


Рис. 27

$y = 0$, $y = \pi$ – горизонтальные асимптоты

5. Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ имеет наклонные асимптоты, уравнения которых $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ (рис. 28).

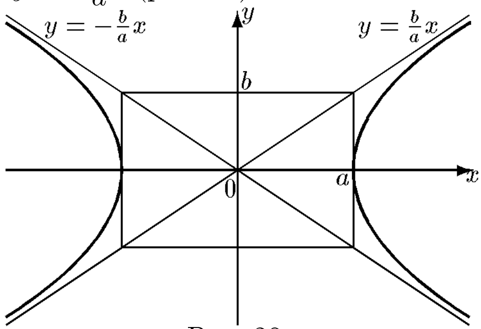


Рис. 28

1.18. Как найти асимптоты графика функции $y = f(x)$?

Если выполняется хотя бы одно из условий
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty,$$
то прямая $x = x_0$ будет вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис. 20, 21, 24 и 25).

Если существует хотя бы один из пределов
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b \text{ или } \lim_{x\to +\infty} f(x) = b,$$
то прямая $y = b$ будет горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис. 20, 21, 26 и 27).

Прямая $y = kx + b$ будет наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Наклонная асимптота при $x \to -\infty$ находится аналогично. Может оказаться, что при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ кривая $y = f(x)$ имеет одну и ту же асимптоту.

Заметим, что горизонтальную асимптоту $y = b$ можно считать частным случаем наклонной при $k = 0$.

Пример 1. Найти асимптоты графика функции $y = e^{1/x} - x$.

Решение. $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ – область определения функции. Выясним характер точки разрыва:

$$\lim_{x\to 0-0} (e^{1/x} - x) = e^{-\infty} - 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to 0+0} (e^{1/x} - x) = e^{+\infty} - 0 = +\infty.$$

В точке $x = 0$ разрыв второго рода, прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота.

Выясним, имеет ли график наклонную асимптоту $y = kx+b$, где $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b$. В нашем случае

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(e^{1/x}/x - 1\right) = -1,$$

$$\lim_{x\to\infty} (e^{1/x} - x + x) = \lim_{x\to\infty} (e^{1/x}) = e^0 = 1.$$

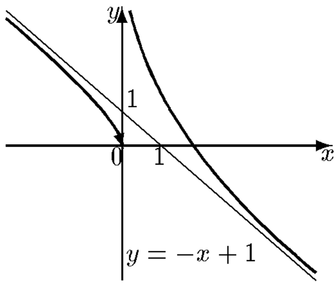


Рис. 29

Таким образом, график функции $y = e^{1/x} - x$ имеет одну и ту же наклонную асимптоту $y = -x + 1$ и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$. Проведенное исследование позволяет построить график функции (рис. 29).

На основании вышеизложенного материала можно предложить следующую **схему полного исследования функции и построения ее графика**:

1. Найти область определения функции и точки разрыва (если таковые имеются).

2. Исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность.

3. Найти односторонние пределы функции в точках разрыва и граничных точках области определения (в частности, при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$). Заметим, что точки разрыва второго рода в случае, когда хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности, дают нам вертикальные асимптоты графика функции.

4. Найти горизонтальные и наклонные асимптоты графика.

5. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.

6. Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость, перегиб.

7. Найти (если удастся) точки пересечения графика с осями координат. Для уточнения графика можно дополнительно найти значения функции еще в нескольких точках.

Построение графика функции после завершения ее исследования по всем приведенным пунктам зачастую вызывает затруднения. Построение графика значительно облегчается, если он будет вырисовываться постепенно, от пункта к пункту проводимого исследования. Поэтому по завершении каждого пункта исследования рекомендуется делать соответствующие уточнения графика функции и наносить их на чертеж.

2. Решение задач

2.1. Изобразить схематично график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям:

1. $D(y) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$ – область определения функции.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. График функции имеет наклонную асимптоту $y = x$.

4. $f'(0) = 0$, $f'(-2) = 0$, $f_{\max}(-2) = 3$.

5. В точке $x = 0$ функция имеет перегиб, при этом $f(0) = 0$.

6. Уравнение $f(x) = 0$ имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = 1.5$.

Решение. Из первых двух условий следует, что в точках $x = -1$ и $x = 1$ функция имеет разрыв второго рода и что прямые

$x = -1$ и $x = 1$ являются вертикальными асимптотами искомого графика. Построим эти прямые и на основании заданных пределов изобразим поведение функции вблизи вертикальных асимптот и при $x \to \pm\infty$ (рис. 30).

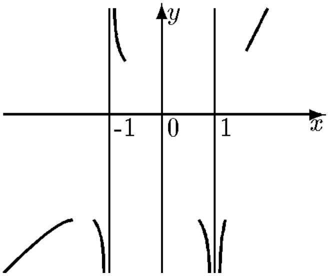


Рис. 30

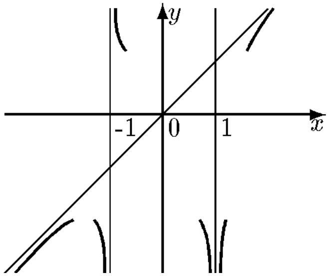


Рис. 31

Построим прямую $y = x$, являющуюся по условию задачи наклонной асимптотой, и уточним с использованием этой асимптоты поведение функции при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ (кривая должна приближаться к своей асимптоте $y = x$ при $x \to \pm\infty$) (рис. 31).

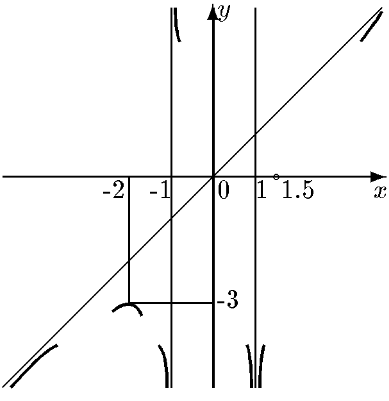


Рис. 32

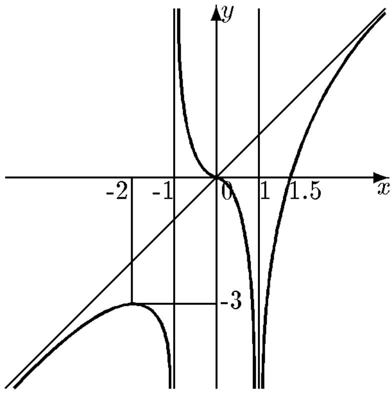


Рис. 33

Нанесем на чертеж точку экстремума $x = -2$, $y = -3$ и заданные в условии точки пересечения графика с осью Ox (рис. 32).

Соединим изображенные на рис. 32 части графика плавными линиями, проводя их через точки $x = 0$ и $x = 1.5$ оси Ox с перегибом в начале координат. Так как по условию $f'(0) = 0$, то кривую следует провести так, чтобы ось Ox была бы касательной к ней в начале координат (рис. 33).

2.2. Построить график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям:

1. $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, причем $f(-x) = -f(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.
3. Наклонных асимптот нет.
4. $f_{\max}(2) = 3$, причем $f'_-(2) = 0$, $f'_+(2) = -1$.
5. $f''(x) < 0$ для $x \in (0, 2)$ и $f''(x) > 0$ для $x \in (2, +\infty)$.
6. $f(x) = 0$ при $x = \frac{1}{2}$.

Решение. Так как по условию $f(-x) = -f(x)$ (функция $y = f(x)$ нечетная), то график симметричен относительно начала координат.

Так как $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, то прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота.

Так как $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$, то прямая $y = 1$ – горизонтальная асимптота.

По условию $f'_-(2) \neq f'_+(2)$. Это означает, что в точке максимума производная не существует и график функции не имеет в этой точке касательной. Но при этом существуют односторонние касательные, причем так как $f'_-(2) = 0$ и $f'_+(2) = -1$, то касательная слева параллельна оси Ox, а касательная справа образует с осью Ox угол $135°$. Таким образом, соответствующая точка графика – угловая точка.

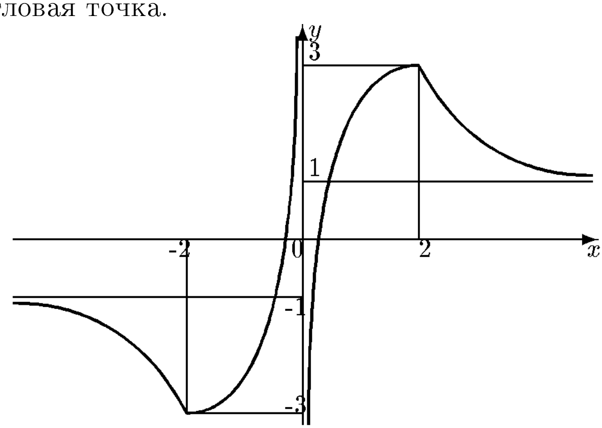


Рис. 34

Из условия 5 следует, что для $x \in (0, 2)$ кривая выпукла, а для $x \in (2, +\infty)$ – вогнута.

Так как $f(\frac{1}{2}) = 0$, то кривая пересекает ось Ox в точке $x = \frac{1}{2}$.

С учетом всего изложенного, строим график на множестве $(0, +\infty)$. Для $x \in (-\infty, 0)$ график будет симметричен построенному относительно начала координат (рис. 34).

2.3. Исследовать функцию $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$ и построить ее график.

Решение. Проведем исследование по пунктам 1 – 7 приведенной выше схемы полного исследования функции.

1. $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

2. Так как $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} - (-x) = \sqrt[3]{x^2} + x$, то, очевидно, $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то есть функция не является ни четной, ни нечетной и, следовательно, ее график симметрии не имеет.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

4. Так как функция определена и непрерывна на всей числовой оси, то ее график вертикальных асимптот не имеет. Выясним вопрос о существовании наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right) = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^2} - x + x) = \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ график наклонных асимптот не имеет.

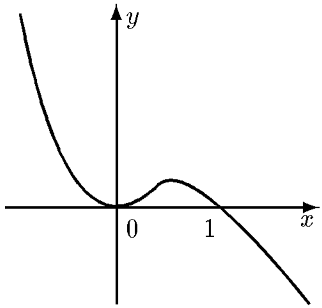


Рис. 35

Если к тому, что нам удалось выяснить, добавить тот факт, что $f(x) = 0$ в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, то можно сделать первый набросок графика (рис. 35).

5. Исследуем функцию на монотонность и экстремум:

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{2 - 3\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}},$$

$f'(x) = 0$ при $x = \frac{8}{27}$, в точке $x = 0$ производная не существует, причем $\lim\limits_{x\to0-} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0+} f'(x) = +\infty$. И, таким образом, в начале координат график функции имеет вертикальную касательную. Итак, $x_1 = \frac{8}{27}$ и $x_2 = 0$ – критические точки. Разобьем этими точками область определения на интервалы $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{8}{27})$, $(\frac{8}{27}, +\infty)$. Установим знак $f'(x)$ на каждом интервале и заполним таблицу

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{8}{27})$	$\frac{8}{27}$	$(\frac{8}{27},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	Нет	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$
		min		max	

6. Найдем $f''(x)$ и исследуем функцию на выпуклость, вогнутость и перегиб:

$$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

Очевидно, что $f''(x) < 0$ для всех x, отличных от нуля (в точке $x = 0$ вторая производная не существует). Таким образом, кривая всюду выпукла, точек перегиба нет.

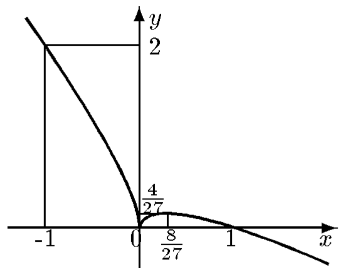


Рис. 36

Проведенное в пунктах 4 и 5 исследование значительно уточняет предварительный набросок графика (рис. 35). При построении уточненного графика учтем, что $f(-1) = 2$ (рис. 36).

2.4. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ и построить график.

Решение.

1. $D(y) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. Так как $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ и, следовательно, $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной. График симметрии не имеет.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty$,

$$\lim_{x\to1-0} f(x) = \lim_{x\to1-0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to1+0} f(x) = \lim_{x\to1+0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Таким образом, в точке $x = 1$ имеет место разрыв второго рода, а прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика. Горизонтальных асимптот график функции не имеет.

4. Выясним вопрос о существовании наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2(x-1)} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x-1}{2(x-1)} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{4}{2} = 2.$$

Таким образом, $y=x+2$ является наклонной асимптотой графика.

С учетом проведенных исследований можно сделать первый набросок графика (рис. 37).

5. Исследуем функцию на монотонность и экстремум:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3},$$

$f'(x) = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$ – критические точки. В точке $x = 1$ производная не существует, но эта точка не может быть критической, так как функция в ней не определена. Разобьем ось Ox критическими точками и точками разрыва на интервалы и заполним таблицу

x	(-∞,0)	0	(0,1)	1	(1,3)	3	(3,+∞)
$f'(x)$	$+$	0	$+$	Нет	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	Нет	↗	$\frac{27}{4}$	↘
						min	

Исследования показали, что в точке $x = 0$ экстремума нет, а касательная совпадает с осью Ox.

6. Найдем $f''(x)$ и исследуем функцию на выпуклость, вогнутость и перегиб:

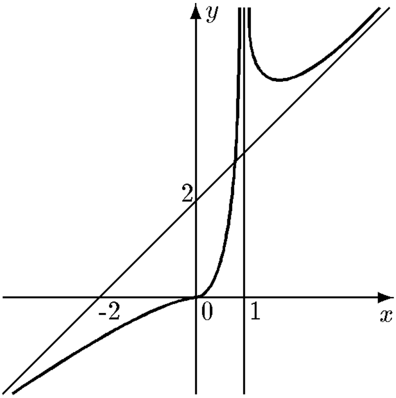


Рис. 37

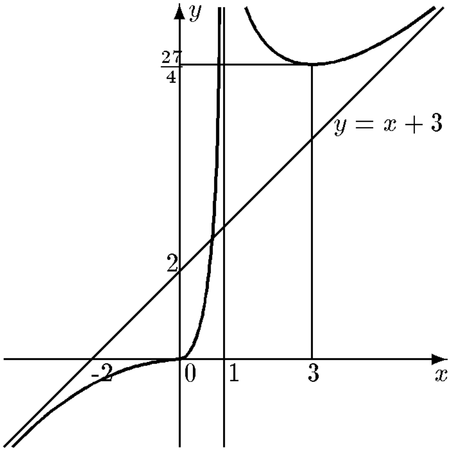


Рис. 38

$$f''(x) = \frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-(x^3-3x^2)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} =$$
$$= \frac{(3x^2-6x)(x-1)-3(x^3-3x^2)}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4},$$

$f''(x) = 0$ при $x = 0$. В точке $x = 1$ вторая производная не существует, но эта точка не может быть точкой перегиба, так как функция терпит в ней разрыв. Заполним таблицу

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	Нет	$+$
$f(x)$	Выпукла	0	Вогнута	Нет	Вогнута

Таким образом, в точке $x = 0$ график функции имеет перегиб.

Построим график по результатам всего проведенного исследования (рис. 38).

2.5. Провести исследование и построить график функции $y = \frac{x}{\ln x}$.

Решение.

1. $D(y) = (0,1) \cup (1,+\infty)$.
2. $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{x}{\ln x} = \frac{+0}{-\infty} = 0,$

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{-0} = -\infty,$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{+0} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1/x} = +\infty.$$

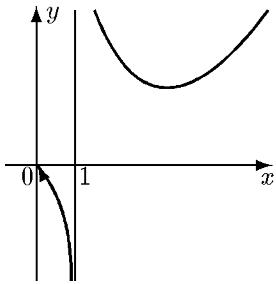


Рис. 39

Таким образом, в точке $x = 1$ разрыв второго рода, а прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика. Горизонтальных асимптот график функции не имеет.

3. Выясним вопрос о существовании наклонной асимптоты при $x \to +\infty$:
$$k = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0.$$
Таким образом, наклонных асимптот нет.

Сделаем набросок графика (рис. 39).

4. Исследуем функцию на монотонность и экстремум:
$$f'(x) = \frac{\ln x - x\cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x},$$
$f'(x) = 0$ при $x = e$ – критическая точка. В точке $x = 1$ производная не существует, но эта точка не может быть критической, так как функция в ней не определена. Заполним таблицу

x	(0,1)	1	$(1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	Нет	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	Нет	$\searrow$	e	$\nearrow$
				min	

Уточним график функции с учетом проведенного исследования (рис. 40).

5. Проведем исследование на выпуклость, вогнутость и перегиб:
$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1)\cdot 2\ln x \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{2-\ln x}{x\ln^3 x},$$
$f''(x) = 0$ при $x = e^2$. Заполним таблицу

x	(0,1)	1	$(1,e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	Нет	$+$	0	$-$
$f(x)$	Выпукла	Нет	Вогнута	$\frac{e^2}{2}$	Выпукла
				Перегиб	

Построим график функции $y = \frac{x}{\ln x}$ на основании всего проведенного исследования (рис. 41).

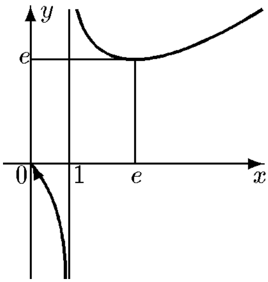


Рис. 40

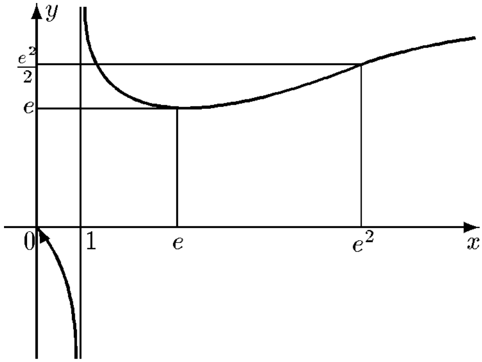


Рис. 41

2.6. Провести исследование и построить график функции $y = \frac{\cos 2x}{\cos x}$.

Решение.

1. Функция определена всюду за исключением точек $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$, в которых $\cos x = 0$. Функция периодическая с периодом 2π. Во всех точках области определения $f(-x) = f(x)$, следовательно, функция четная и ее график симметричен относительно оси Oy.

В силу периодичности функции имеет смысл провести ее исследование, например, на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, построить график функции на этом промежутке и затем периодически продолжить его на всю числовую ось.

2. Найдем односторонние пределы функции в точках разрыва на выделенном промежутке:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{-1}{+0} = -\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{-1}{+0} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{-1}{-0} = +\infty, \quad \lim_{x \to 3\frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{-1}{-0} = +\infty.$$

Таким образом, в точках $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ функция терпит разрыв второго рода, а прямые $x = \pm\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

3. Очевидно, горизонтальных и наклонных асимптот график функции не имеет. На основании проведенного исследования изобразим схематично поведение функции в окрестностях точек разрыва (рис. 42).

4. Исследуем функцию на монотонность и экстремум:

$$f'(x) = \frac{-2\sin 2x\cos x + \cos 2x \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{-4\sin x\cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x}{\cos^2 x} = -\frac{3\sin x\cos^2 x + \sin^3 x}{\cos^2 x},$$

$f'(x) = 0$ на промежутке $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = \pi$. Заполним таблицу

x	$(-\frac{\pi}{2},0)$	0	$(0,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\pi)$	π	$(\pi,\frac{3\pi}{2})$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	Нет	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	Нет	$\searrow$	-1	$\nearrow$
		max				min	

Сделаем набросок графика по проведенному исследованию (рис. 43).

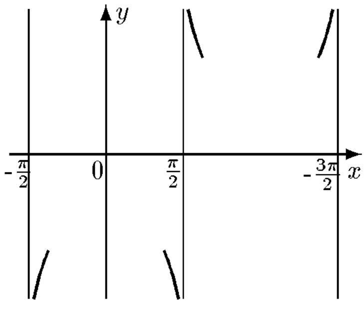


Рис. 42

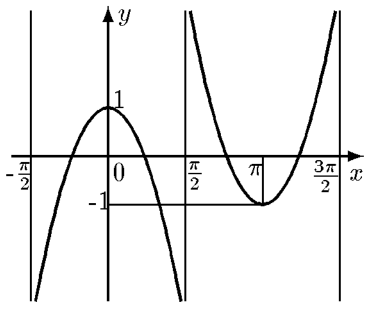


Рис. 43

5. Убедимся в том, что график не имеет точек перегиба. В самом деле,

$$f''(x) = -\frac{3\cos^4 x + 3\sin^2 x\cos^2 x + 2\sin^4 x}{\cos^3 x} = -\frac{3\cos^2 x + 2\sin^4 x}{\cos^3 x}.$$

Очевидно, $f''(x) \neq 0 \Rightarrow$ точек перегиба нет. На интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $f''(x) < 0$, то есть кривая выпукла, на интервале $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ $f''(x) > 0$, кривая вогнута. На рис. 43 график таким и изображен.

6. Найдем точки пересечения графика с осью Ox. Уравнение $\frac{\cos 2x}{\cos x} = 0$ на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ имеет четыре корня: $x_1 = -\frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$, $x_3 = \frac{3\pi}{4}$, $x_4 = \frac{5\pi}{4}$.

График функции $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$ с учетом этого уточнения и периодичности функции изображен на рис. 44.

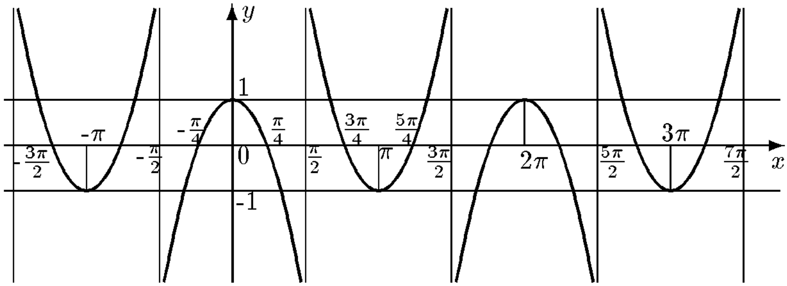


Рис. 44

2.7. Провести исследование и построить график функции $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Решение.

1. Так как $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 1 \ \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$, то функция определена на всей числовой оси. Очевидно, $f(-x) = -f(x)$, следовательно, график симметричен относительно начала координат.

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \arcsin 0 = 0 \Rightarrow$ прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

3. Вертикальных и наклонных асимптот график не имеет.

4. Исследуем функцию на монотонность и экстремум:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2}, \text{ если } |x| < 1, \\ -\dfrac{2}{1+x^2}, \text{ если } |x| > 1. \end{cases}$$

В точках $x = \pm 1$ производная не существует, но функция определена, поэтому $x = \pm 1$ – критические точки.

Так как функция нечетная, то достаточно провести исследование только на $[0, +\infty)$. Заполним таблицу

x	[0,1)	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	Нет	—
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$
		max	

5. Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость, перегиб:

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}, \text{ если } |x| < 1, \\ \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}, \text{ если } |x| > 1, \end{cases}$$

$f''(x) = 0$ в точке $x = 0$, в точках $x = \pm 1$ вторая производная не существует. Заполним таблицу

x	0	(0,1)	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	0	$-$	Нет	$+$
$f(x)$	0	Выпукла	$\frac{\pi}{2}$	Вогнута
			Угловая точка	

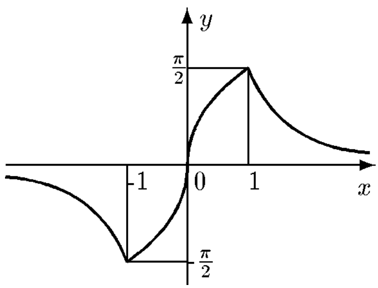


Рис. 45

В силу симметрии графика относительно начала координат функция в точке $x = 0$ имеет перегиб. График функции изображен на рис. 45.

2.8. Провести исследование и построить график функции $y = \sin 2x - x$.

Решение.

1. $D(y) = (-\infty, +\infty)$, $f(-x) = \sin(-2x) - (-x) =$
$= -\sin 2x + x = -f(-x) \Rightarrow$ функция нечетная и, таким образом, ее график симметричен относительно начала координат.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sin 2x - x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sin 2x - x) = -\infty$.

3. Так как функция определена на всей числовой оси, то ее график вертикальных асимптот не имеет. Выясним вопрос о наличии наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin 2x - x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sin 2x}{x} - 1\right) = -1,$$

$b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} (\sin 2x - x + x)$ – предел не существует, следовательно, график наклонных асимптот не имеет.

4. Исследуем функцию на монотонность и экстремум:

$f'(x) = 2\cos 2x - 1$, $f'(x) = 0$ в точках, где $\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Таким образом, множество критических точек представляет собой две последовательности $\{\frac{\pi}{6} + \pi n\}$ и $\{-\frac{\pi}{6} + \pi n\}$ точек. Вопрос о наличии экстремума в этих точках решим с помощью второго достаточного условия (п. 1.13). С этой целью выясним знак второй производной $f''(x) = -4\sin 2x$ в критических точках:

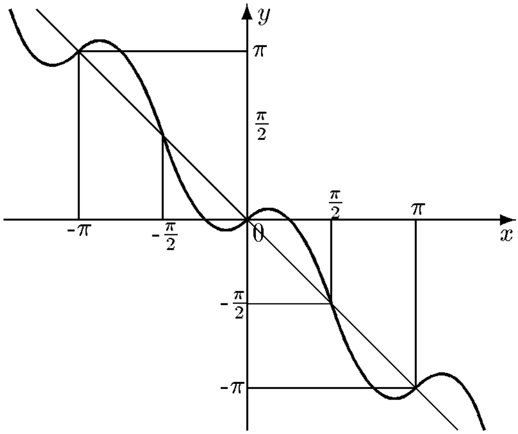


Рис. 46

$f''(\frac{\pi}{6} + \pi n) = -4\sin(\frac{\pi}{3} + 2\pi n) = -2\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ в точках $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$ функция $y = \sin 2x - x$ имеет максимум,

$f''(-\frac{\pi}{6} + \pi n) = -4\sin(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n) = 2\sqrt{3} > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ в точках $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$ функция $y = \sin 2x - x$ имеет минимум.

5. Найдем точки перегиба графика. $f''(x) = 0$ в точках $x = \frac{\pi n}{2}$. При переходе через эти точки $f''(x)$ изменяет знак, следовательно, в точках $x = \frac{\pi n}{2}$ функция $y = \sin 2x - x$ имеет перегиб.

График функции изображен на рис. 46.

2.9. По графику функции $y = f(x)$ (рис. 47) изобразить схематично график производной $f'(x)$.

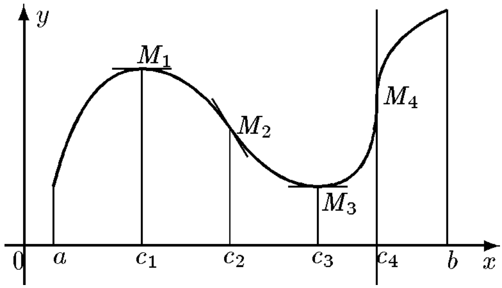


Рис. 47

Решение. В точках M_1 и M_3 касательная параллельна оси $Ox \Rightarrow f'(c_1) = 0$ и $f'(c_3) = 0$. Это означает что график функции $f'(x)$ пересекает ось Ox в точках $x = c_1$ и $x = c_3$. В точке M_4 графика касательная перпендикулярна оси $Ox \Rightarrow f'(c_4) = \infty$, а это означает, что прямая $x = c_4$ является вертикальной асимптотой графика $f'(x)$. На промежутках (a, c_2) и (c_4, b) кривая $y = f(x)$ выпукла $\Rightarrow f'(x)$ на этих промежутках убывает. На промежутке (c_2, c_4) кривая $y = f(x)$ вогнута $\Rightarrow f'(x)$ на этом промежутке возрастает. При переходе через точку перегиба M_2 вторая производная $f''(x)$ меняет знак с $(-)$ на $(+)$, следовательно, функция $f'(x)$ имеет в точке c_2 минимум. График производной $f'(x)$ изображен на рис. 48.

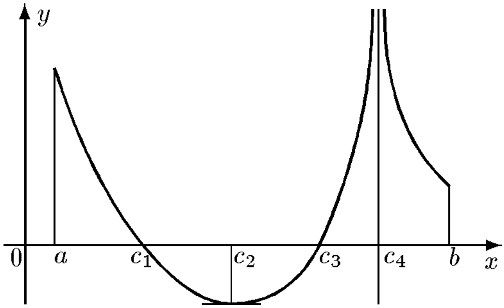


Рис. 48

2.10. По графику производной $f'(x)$ (рис. 49) изобразить схематично график функции $y = f(x)$.

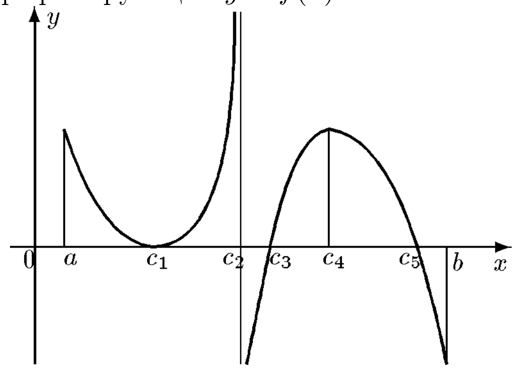


Рис. 49

Решение. $f'(c_1) = f'(c_3) = f'(c_5) = 0$, в точке $x = c_2$ производная не существует. Таким образом, $x = c_1$, $x = c_2$, $x = c_3$ и $x = c_5$ – критические точки функции $y = f(x)$. При переходе через точку $x = c_1$ производная $f'(x)$ знака не изменяет, и, следовательно, в этой точке экстремума нет. В остальных критических точках функция $y = f(x)$ имеет экстремум: максимум в точке $x = c_2$ ($f'(x)$ изменяет знак с $(+)$ на $(-)$), минимум в точке $x = c_3$ ($f'(x)$ изменяет знак с $(-)$ на $(+)$) и снова максимум в точке $x = c_5$ ($f'(x)$ изменяет знак с $(+)$ на $(-)$). Функция $f'(x)$ убывает на интервалах (a, c_1) и (c_4, b), следовательно, на этих промежутках кривая $y = f(x)$ выпукла. На интервалах (c_1, c_2) и (c_2, c_4) $f'(x)$ возрастает, и, следовательно, кривая $y = f(x)$ на этих промежутках вогнута. В точках $x = c_1$ и $x = c_4$ функция $y = f'(x)$ имеет экстремум $\Rightarrow$ $f''(c_1) = 0$ и $f''(c_4) = 0$. При переходе через эти точки $f''(x)$ изменяет знак $\Rightarrow$ в точках $x = c_1$ и $x = c_4$ функция $y = f(x)$ имеет перегиб. График функции $y = f(x)$ изображен на рис. 50.

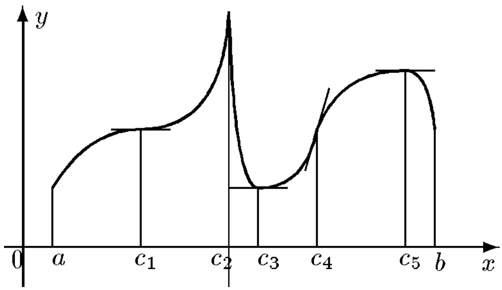


Рис. 50

2.11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$ на промежутке $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

Решение. По теореме Вейерштрасса непрерывная на замкнутом промежутке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ принимает на этом промежутке наименьшее и наибольшее значения. Если эта функция дифференцируема на $[a, b]$ за исключением, быть может, конечного числа точек, то наименьшее и наибольшее значение такая функция принимает либо на концах промежутка $[a, b]$, либо в точках экстремума. Точки экстремума функции находятся среди критических точек. Поэтому порядок нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной на $[a,b]$ функции $y = f(x)$ следующий:

1. Находим $f'(x)$ и критические точки x_1, x_2,..., x_n, принадлежащие промежутку $[a,b]$.

2. Вычисляем значения функции в критических точках и на концах промежутка $[a,b]$.

3. Из полученных чисел выбираем наибольшее и наименьшее.

Для заданной функции
$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-2x)^{-1/3}(2x-2) = \frac{4}{3}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2-2x}}$.
Найдем критические точки функции. Очевидно, $f'(x) = 0$ при $x = 1$. В точках $x = 0$ и $x = 2$ производная не существует. Критическая точка $x = 2$ не принадлежит заданному промежутку $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, поэтому вычислим значения функции в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и на концах промежутка $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$:

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(-\tfrac{3}{2}) = \sqrt[3]{\tfrac{21}{16}},\ f(\tfrac{3}{2}) = \sqrt[3]{\tfrac{9}{16}}.$$

Итак, $f(0) = 0$ – наименьшее, $f(-\frac{3}{2}) = \sqrt[3]{\frac{21}{16}}$ – наибольшее значения функции $y = (x^2-2x)^{2/3}$ на промежутке $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

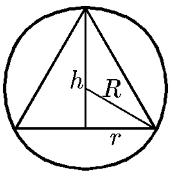


Рис. 51

2.12. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

Решение. Чтобы решить поставленную задачу, необходимо найти функциональную зависимость объема V конуса, вписанного в шар радиуса R, от его высоты h (рис. 51).

Обозначим через r радиус основания конуса. Тогда

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h.$$

Так как роль аргумента в задаче играет высота h конуса, необходимо выразить r^2 через h. По теореме Пифагора $r^2 = R^2-(h-R)^2$ и тогда

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2-(h-R)^2)h = \frac{1}{3}\pi(2Rh^2-h^3).$$

Далее задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $V(h) = \frac{1}{3}\pi(2Rh^2-h^3)$ на промежутке $[0, 2R]$.

Найдем критические точки функции

$V'(h) = \dfrac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) = \dfrac{1}{3}\pi h(4R - 3h)$,

откуда $V'(h) = 0$ при $h_1 = 0$ и $h_2 = \frac{4}{3}R$. Так как $V(0) = V(2R)$ — наименьшее значение функции, то при $h = \frac{4}{3}R$ объем конуса будет наибольшим.

2.13. На какой высоте следует повесить электрическую лампочку на столбе, чтобы освещенность горизонтальной площадки, отстоящей от столба на расстояние a, была наибольшей?

Решение. По условию задачи необходимо, прежде всего, получить функциональную зависимость освещенности I от высоты h лампочки на столбе (рис. 52).

Воспользуемся формулой

$$I = \frac{c \cdot \sin\alpha}{r^2},$$

где c – сила источника света; α – угол падения лучей; r – расстояние от освещаемой точки A до точки B, в которой находится источник света.

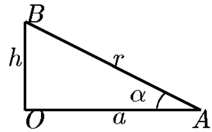


Рис. 52

Так как $\sin\alpha = \dfrac{h}{r}$, где $r = \sqrt{h^2 + a^2}$, то

$$I = \frac{c \cdot h}{\sqrt{(h^2 + a^2)^3}}, \text{ где } 0 < h < +\infty.$$

В данном случае функция рассматривается не на замкнутом промежутке $[a, b]$, а на множестве $(0, +\infty)$. Если при этом функция непрерывна и имеет во внутренней точке области определения единственный максимум (минимум), то это максимальное (минимальное) значение и будет наибольшим (наименьшим) значением функции в ее области определения.

Исследуем функцию $I = \dfrac{c \cdot h}{(h^2 + a^2)^{3/2}}$ на экстремум:

$$I'(h) = c\left(\frac{(h^2 + a^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(h^2 + a^2)^{1/2} \cdot 2h^2}{(h^2 + a^2)^3}\right) = c\frac{a^2 - 2h^2}{(h^2 + a^2)^{5/2}},$$

$I'(h) = 0$ при $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. При переходе через точку $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ производная $I'(h)$ изменяет знак с плюса на минус, следовательно, в точке $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ функция имеет максимум, который и будет наибольшим значением функции на $(0, +\infty)$. Таким образом, лампочку следует повесить на высоте $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

2.14. Определить, каким должно быть сопротивление r электронагревательного прибора, включенного в цепь тока с сопротивлением R, чтобы количество выделяемого тепла было максимальным.

Решение. Воспользуемся известной из курса физики формулой

$$Q = r \cdot I^2, \text{ где } I = \frac{E}{R+r}.$$

Исследуем функцию $Q(r) = r\dfrac{E^2}{(R+r)^2}$, где $0 < r < +\infty$, на экстремум:

$$Q'(r) = E^2\frac{(R+r)^2 - 2r(R+r)}{(R+r)^4} = E^2\frac{R-r}{(R+r)^3},$$

$Q'(r) = 0$ при $r = R$. Очевидно, $Q'(r) > 0$ при $r < R$ и $Q'(r) < 0$ при $r > R$. Таким образом, функция $Q(r)$ принимает при $r = R$ максимальное значение $Q_{\max} = \frac{E^2}{4R}$, которое и будет наибольшим значением функции во всей области определения.

2.15. При каком основании логарифма существуют числа, равные своему логарифму по этому основанию?

Решение. По условию задачи $\log_y x = x$, где $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$, откуда $x = y^x$ или $y = x^{1/x}$. Задача сводится к исследованию функции $y = x^{1/x}$.

Запишем функцию в виде $y = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Функция определена при $x > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1,$$

$$\lim_{x\to 0+} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

Исследуем функцию на экстремум: $y' = e^{\frac{\ln x}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}$; $y' = 0$ при $x = e$. При переходе через точку $x = e$ производная y' изменяет знак с плюса на минус. Таким образом, в точке $x = e$ функция имеет максимум $y_{\max} = e^{1/e}$. Это же значение будет наибольшим значением функции $y = x^{1/x}$ для $0 < x < +\infty$. Таким образом, уравнение $\log_y x = x$ будет иметь решение тогда и только тогда, когда основание логарифма удовлетворяет условию $0 < y < e^{1/e}$, $y \neq 1$.

3. Перечень задач для самостоятельной работы

3.1. Изобразить схематично график функции $y = f(x)$ на (a, b) в каждом из следующих случаев:

1. $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0\ \ \forall x \in (a, b)$,
2. $f'(x) > 0,\ f''(x) < 0\ \ \forall x \in (a, b)$,
3. $f'(x) < 0,\ f''(x) > 0\ \ \forall x \in (a, b)$,
4. $f'(x) < 0,\ f''(x) < 0\ \ \forall x \in (a, b)$,

считая для определенности, что $f(x) > 0$ на (a, b).

3.2. На рис. 53 изображен график функции $y = f(x)$.

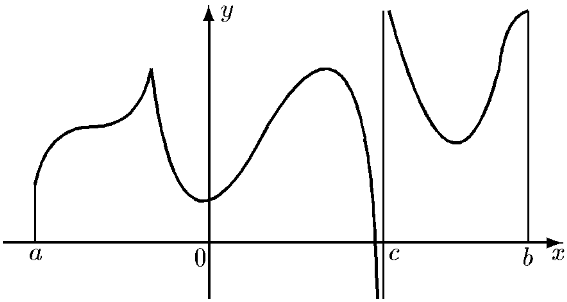


Рис. 53

Требуется:

1. Записать область определения функции.
2. Вдоль графика функции (над графиком) расставить знаки $f'(x)$.
3. Указать критические точки.
4. Указать точки экстремума.
5. Вдоль графика функции (под графиком) расставить знаки $f''(x)$.
6. Указать точки перегиба.
7. Провести касательные к графику в точках экстремума и в точках перегиба.

3.3. Изобразить схематично график функции $y = f(x)$ на (a, b), если известен график ее производной $f'(x)$ в каждом из следующих случаев (рис. 54–57):

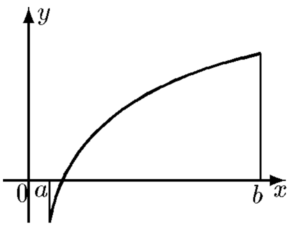


Рис. 54

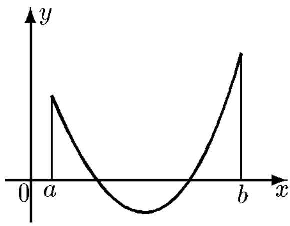


Рис. 55

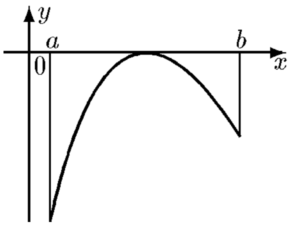


Рис. 56

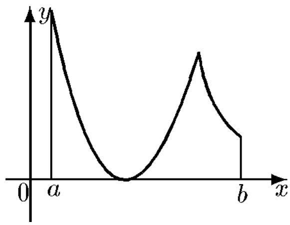


Рис. 57

3.4. Изобразить схематично график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей заданным условиям:

1. $D(y) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,
   $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = -\infty$.
3. $f_{\min}(1) = 3$, при этом $f'(1) = 0$.
4. Точек перегиба нет.
5. $f(0) = 4$.

3.5. Изобразить схематично график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей заданным условиям:

1. $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,
   $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$.
3. $y = x - 1$ – наклонная асимптота.
4. $f_{\min}(2) = 4$, при этом $f'(2) = 0$.
5. $x = -3$ – точка перегиба графика, $f(-3) = -5$.
6. $f(-1) = 0$.

3.6. Изобразить схематично график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей заданным условиям:

1. $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

3. $f_{\max}(0) = 0$, при этом $f'_-(0) = +\infty$, $f'_+(0) = -\infty$;
$f_{\min}(1) = -2$, при этом $f'(1) = 0$;
$f_{\max}(3) = 4$, при этом $f'(3) = 0$.

4. $x = 2$ и $x = 5$ – точки перегиба графика, при этом $f(2) = 0$, $f(5) = 2$.

5. $f'(2) = +\infty$.

В заданиях 3.7 – 3.44 требуется провести полное исследование заданных функций и построить их график.

3.7. $y = x^3 - 3x^2$

3.8. $y = (x+1)(x-2)^2$

3.9. $y = x^2(x+2)^2$

3.10. $y = \dfrac{x}{5} + \dfrac{5}{x}$

3.11. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

3.12. $y = \dfrac{x^2}{1-x}$

3.13. $y = \dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$

3.14. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

3.15. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

3.16. $y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$

3.17. $y = x \cdot e^x$

3.18. $y = \dfrac{e^x}{x}$

3.19. $y = x^2 e^{-x}$

3.20. $y = e^{1/x} - x$

3.21. $y = e^{x^2-2x}$

3.22. $y = e^{\frac{1}{x^2-2x}}$

3.23. $y = \ln(1+x^2)$

3.24. $y = x - \ln x$

3.25. $y = \dfrac{1}{\ln x}$

3.26. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

3.27. $y = x + \sin x$

3.28. $y = x \cdot \sin x$

3.29. $y = e^{\operatorname{tg} x}$

3.30. $y = \ln\cos x$

3.31. $y = x + \operatorname{arctg} x$

3.32. $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$

3.33. $y = (x-3)\sqrt{x}$

3.34. $y = \dfrac{x^{2/3}}{x+2}$

3.35. $y = \sqrt{x^3+1}$

3.36. $y^2 = x^3 + 1$

3.37. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

3.38. $y = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-2}$

3.39. $y = \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

3.40. $y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$

3.41. $y = x^{1/x}$

3.42. $y = (1+x)^{1/x}$

3.43. $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$

3.44. $y = \arcsin \frac{1-x}{1-2x}$

В заданиях 3.45 – 3.51 требуется найти наименьшее и наибольшее значения функции на указанном промежутке.

		Ответы:
3.45. $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$	$[-1, 4]$	0 и 16;
3.46. $y = x - 2\sqrt{x}$	$[0, 9]$	-1 и 3;
3.47. $y = x\sqrt[3]{x-1}$	$[-7, 2]$	$-\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}$ и 14;
3.48. $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$	$[\frac{1}{e}, e]$	0 и e;
3.49. $y = \sin 2x - x$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{2}$;
3.50. $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x$	$[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$	-2 и 2;
3.51. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$	$[0, 1]$	0 и $\frac{\pi}{4}$.

3.52. Сопротивление f дороги движению автомобиля при скорости v км/ч выражается формулами:

1. $f = 24 - \dfrac{2}{3}v + \dfrac{1}{30}v^2$ – на хорошем шоссе;
2. $f = 28 - \dfrac{1}{4}v + \dfrac{1}{50}v^2$ – на плохом шоссе;
3. $f = 17.5 - \dfrac{1}{40}v^2$ – на гранитной мостовой;
4. $f = 29 - \dfrac{2}{3}v + \dfrac{1}{15}v^2$ – на булыжной мостовой;
5. $f = 36.5 - \dfrac{3}{4}v + \dfrac{1}{30}v^2$ – на грунтовой дороге.

В каждом случае определить скорость, при которой сопротивление будет наименьшим.

Ответы: 1) $v = 10$ км/ч; 2) $v = 6.25$ км/ч; 3) наименьшей скорости нет; 4) $v = 5$ км/ч; 5) $v = 11.25$ км/ч.

3.53. Газовая смесь состоит из окиси азота и кислорода. Найти концентрацию кислорода, при которой окись азота, содержащаяся в смеси, окислится с максимальной скоростью, если скорость реакции выражается формулой $v = k(100x^2 - x^3)$, где k – константа; x – концентрация окиси азота (в объемных процентах).

Ответ: $x = 66.7\%$; концентрация кислорода – 33.3%.

3.54. Высота подъема y веса x человеком выражается соотношением $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a и b – константы. Найти, при каком весе x человек выполняет наибольшую работу?

Ответ: $x = a/2$.

3.55. Токопроводящий кабель состоит из медного провода с изоляцией. Если через x обозначить отношение радиуса медного провода к толщине изоляции, то скорость передачи телеграфного сигнала находится по формуле $v = Ax\ln\frac{1}{x}$, где A – константа. При каком x скорость будет наибольшей?

Ответ: $x = e^{-1}$.

3.56. Необходимо огородить плитами цветник, прилегающий к стене. Имеется 400 плит длиной 0.5 м. Ограда делается в форме прямоугольника. Какими должны быть размеры цветника, чтобы его площадь была наибольшей?

Ответ: 50 м, 100 м.

3.57. Требуется построить здание высотой h м и площадью S м^2 с наименьшей затратой материала на наружные стены. Определить длину и ширину стен.

Ответ: Длина и ширина стен равны величине $\sqrt{S}$.

3.58. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была минимальной?

Ответ: $\sqrt[3]{4V}$.

3.59. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

Ответ: $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

3.60. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

Ответ: $\dfrac{20}{\sqrt{3}}$.

3.61. Из круга вырезан сектор с центральным углом α. Из сектора свернута коническая поверхность. При каком значении α объем полученного конуса будет наибольшим?

Ответ: $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

3.62. Найти два таких положительных числа, чтобы их произведение было равно 108, а сумма квадрата одного и куба другого была наименьшей. Чему равна эта сумма?

Ответ: 18 и 6, 540.

3.63. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R.

Ответ: $\dfrac{4R}{\sqrt{5}}$ и $\dfrac{R}{\sqrt{5}}$.

3.64. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Ответ: $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$.

3.65. На эллипсе $2x^2 + y^2 = 18$ даны две точки $A(1, 4)$ и $B(3, 0)$. Найти на эллипсе точку C такую, чтобы площадь $\triangle ABC$ была наибольшей.

Ответ: $C(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

3.66. Сопротивление балки прямоугольного сечения на сжатие пропорционально площади сечения. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметра d, чтобы ее сопротивление было наибольшим?

Ответ: В сечении балки – квадрат со стороною $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

3.67. На отрезке длиной l, соединяющем два источника света силой I_1 и I_2, найти наименее освещенную точку.

Ответ: $\dfrac{l\sqrt[3]{I_1}}{\sqrt[3]{I_1} + \sqrt[3]{I_2}}$ – расстояние от источника силы I_1.

3.68. Сигнал с корабля можно различить в море на расстоянии 1 мили. Корабль А идет на юг, делая 6 миль в час, и в настоящее время находится в 5 милях к западу от корабля В, который идет на запад со скоростью 7 миль в час. Будут ли корабли в какой-либо момент времени на расстоянии, достаточном для приема сигнала?

Ответ: Нет.

Задачи 3.69 – 3.83 можно отнести к так называемым нестандартным задачам, но решение каждой из них сводится к исследованию той или иной функции методами дифференциального исчисления.

3.69. Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и имеют конечные производные на (a, b). Доказать, что существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & h'(c) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Указание. Воспользуйтесь теоремой Ролля для функции

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}.$$

3.70. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные и дифференцируемые на $[a, b]$ функции. Доказать, что у графика функции

$$y(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(a) & g(a) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix}$$

есть по крайней мере одна горизонтальная касательная.

3.71. Доказать неравенство

$$\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b > \frac{b}{1+b^2} \ln \frac{a}{b}, \text{ где } 0 < b < a < 1.$$

Указание. Воспользуйтесь теоремой Коши для функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \ln x$ и далее условием монотонности функции.

3.72. Доказать неравенства

$$\begin{array}{ll} 2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, & x > 1, \\ \ln(1+x) > \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}, & x > 0, \\ \sin x + \operatorname{tg} x > 2x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ a^x > x^a, & e \leqslant a < x. \end{array}$$

Указание. Неравенства доказываются с использованием условия монотонности. Например, докажем неравенство

$$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} \text{ для } x > 1.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}$ и исследуем ее на монотонность: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$. Очевидно, $f'(x) > 0$ при $x > 1$. Следовательно, $f(x)$ возрастает при $x > 1$. Это означает, что $f(x) > f(1)$ при $x > 1$. Так как $f(1) = 0$, то $f(x) > 0$ и $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$ при $x > 1$.

3.73. Показать, что функция $y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ является константой при $x \geqslant 1$ и найти эту константу.

Ответ: π.

3.74. Для функции $f(x) = \arcsin x + \arccos x + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$ найти $f(\frac{1}{10})$ и сравнить с $f(\frac{1}{7})$.

3.75. Показать, что кривая $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

3.76. Доказать, что любая дважды дифференцируемая функция между двумя точками экстремума имеет, по крайней мере, одну точку перегиба.

3.77. На примере функции $y = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8$ убедитесь, что между двумя точками перегиба функция может и не иметь экстремума.

3.78. Доказать, что линии $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$ и $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}$ асимптотически приближаются друг к другу при $x \to \pm\infty$.

3.79. Найти наибольшие члены последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, если $a_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$, $b_n = \sqrt[n]{n}$.

Ответ: a_{14} и b_3.

3.80. Сколько корней имеет уравнение $e^x = ax^2$?

Указание. Установить в зависимости от a число точек пересечения графика функции $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ и прямой $y = a$.

Ответ: При $a \leqslant 0$ корней нет,
при $0 < a < \frac{e^2}{4}$ – один корень,
при $a = \frac{e^2}{4}$ – два корня,
при $a > \frac{e^2}{4}$ – три корня.

3.81. Сколько корней имеет уравнение $\ln x = kx$?

Ответ: При $k \leqslant 0$ и $k = \frac{1}{e}$ – один корень,
при $0 < k < \frac{1}{e}$ – два корня,
при $k > \frac{1}{e}$ нет корней.

3.82. При каком условии уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет один вещественный корень? В каком случае оно имеет три вещественных корня?

Указание. Исследовать функцию $f(x) = x^3 + px + q$. Один вещественный корень будет при выполнении условий: $f_{\min} > 0$, либо $f_{\max} < 0$, либо $f' \leqslant 0$. Если же $f_{\max} \geqslant 0$ и $f_{\min} \leqslant 0$, то будет три вещественных корня.

Ответ: При $4p^3 + 27q^2 > 0$ – один вещественный корень, при $4p^3 + 27q^2 \leqslant 0$ – три вещественных корня.

3.83. В чашу, имеющую форму полушара радиуса a, опущен стержень длины $l > 2a$. Найти положение равновесия стержня.

Указание. В положении равновесия потенциальная энергия стержня относительно дна чаши будет иметь минимум.

Ответ: $\cos\phi = \dfrac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a}$, при этом $2a < l \leqslant 4a$.

Список литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1985. – Т. I.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1970, т. I.
4. Куваев М.Р. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1967. – Т. I.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Высшая школа, 1981. – Т. I.
6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1990.
7. Берман Г.И. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1971.

Указатель вопросов

Оглавление

Для заметок

Людмила Ивановна Лесняк
Владимир Александрович Старенченко

Производная и ее приложения

Учебное пособие

Редактор Н.И. Шидловская
Верстка В.Н. Романенко

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике
в издательской системе TEX – LaTEX
с использованием семейства шрифтов Computer Modern

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001 Подписано к печати 29.04.05.
Формат $60 \times 84_{1/16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 18,13. Уч.-изд.л. 20,31. Тираж 2000 экз. Заказ №

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пр. Ленина, 34а, тел. (382-2) 53-33-35

Отпечатано в типографии ОАО «Издательство Асиновское»,
г. Асино, ул. Проектная, 24