Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Производная и ее вычисление

Понятие производной. Механический смысл производной

Пусть ф-ция $y=f(x)$ определена в т. x_0 и в некоторой ее окрестности. Дадим x_0 прращение Δx такое, чтобы точка $x_0+\Delta x$ не вышла из области определения ф-ции. Функция $y=f(x)$ при этом получит приращение $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$ определяет среднюю скорость изменения ф-ции $y=f(x)$ на промежутке $(x,x+\Delta x)$. При $\Delta x\to 0$ получим скорость изменения ф-ции в т. x_0, если такой предел существует.

Опр. Если $\exists$ конечный предел отношения приращения ф-ции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x\to 0$, то этот предел называется производной ф-ции $y=f(x)$ в т. x_0 и обозначается одним из символов: $y',\ f'(x_0),\ \dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{df(x)}{dx}$.

Т.о. $f'(x_0)\overset{def}{=}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Если ф-ция $y=f(x)$ непрерывна в т. x_0 ($\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$), нахождение ее производной сводится к раскрытию неопределенного выражения вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Пример. Найти производную ф-ции $y=x^3$ в т. $x_0=2$.

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^3-8}{\Delta x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8+12\Delta x+6\Delta x^2+\Delta x^3-8}{\Delta x}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(12+6\Delta x+\Delta x^2\right)=12$$

Односторонние производные

Опр. Если ф-ция $y=f(x)$ определена в т. x_0 и в некоторой ее левосторонней окрестности, тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ называется левосторонней производной ф-ции $y=f(x)$ в т. x_0, если этот предел $\exists$ и обозначается $f'_-(x_0)$.

Аналогично оределяется правосторонняя производная

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Из теоремы об односторонних пределах следует, что ф-ция $y=f(x)$, определенная в некоторой окрестности т. x_0, имеет в этой точке производную

$f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой обе односторонние производные. В этом случае $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$.

Опр. Если ф-ция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала $(a, в)$, то функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в этом интервале; операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

Геометрический смысл производной

Пусть ф-ция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности т. x_0. На графике ф-ции $y = f(x)$ возьмем т. $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ и проведем через эти точки секущую M_0M.

Опр. Предельное положение секущей M_0M, когда т. М по кривой стремится к т. M_0, называют касательной к этой кривой в т. M_0. Заметим, что в силу непрерывности ф-ции $y = f(x)$ в т. x_0

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Следовательно при $\Delta x \to 0$ $|M_0M| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$.

Обозначим через $k = tg\alpha$ угловой коэффициент касательной. Из определения касательной и непрерывности ф-ции при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ следует,

$k = tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Т.о. если $\exists f'(x_0)$ (конечная), то график ф-ции $y = f(x)$ имеет в т. M_0 невертикальную касательную, угловой коэффициент которой равен значению производной в т. x_0, т.е. $k = tg\alpha = f'(x_0)$. Справедливо и обратное утверждение: если у графика ф-ции $y = f(x)$ $\exists$ невертикальная касательная в т. x_0, то ф-ция имеет в этой точке конечную производную.В этом и состоит геометрический смысл производной.

Ур-ие прямой, проходящей через заданную т. $M_0(x_0, y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

При $k = f'(x_0)$ и $y_0 = f(x_0)$ будем иметь ур-ие касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

к графику ф-ции $y = f(x)$ в т. $M_0(x_0, y_0)$.

Опр. Прямая, проходящая через т. $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно касательной,называется нормалью к кривой вт. $M_0(x_0, y_0)$. $k_1k_2 = -1$ - условие $\perp$ прямых.

Уравнение нормали будет иметь вид:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Пример. Составить ур-ие касательной и нормали к графику ф-ции $y = x^3$ при $x_0 = 2$.

Найдем $y_0, f'(x_0)$.

$y_0 = f(2) = 8, y' = 3x^2 \Rightarrow f'(2) = 12$

$y = 8 + 12(x-2) \Rightarrow y = 12x - 16 - \textit{касательная}$

$y = 8 - \frac{1}{12}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{x}{12} + 8\frac{1}{6} - \textit{нормаль}$

Теорема. Если ф-ция $y = f(x)$ имеет в т. x_0 конечную производную, то эта ф-ция непрерывна в т. x_0.

Док-во.

Воспользуемся определением производной: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Из существования предела следует, что отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ отличается от своего предела $f'(x_0)$ на б.м. при $\Delta x \to 0$ величину, т.е.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$.

Тогда $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$

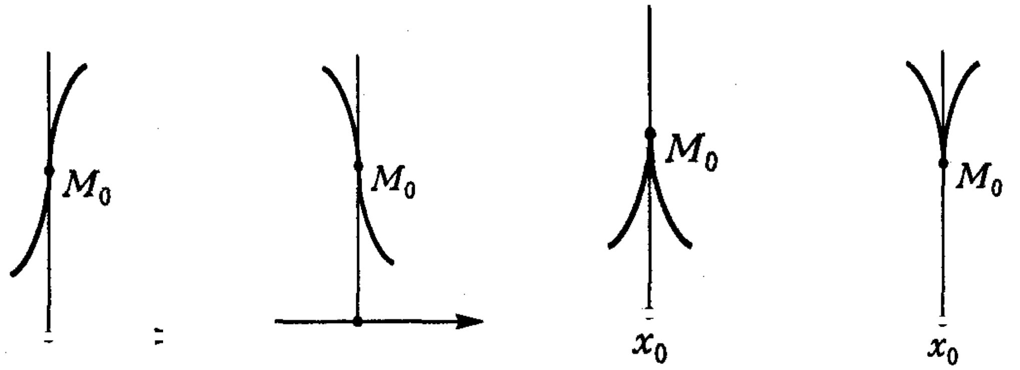
Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ будем иметь $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(x_0)\Delta x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x)\Delta x = 0$ т.е $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т.е ф-ция $y = f(x)$ непрерывна в т. x_0.

Если непрерывная в т. x_0 ф-ция имеет в этой точке односторонние производные, но при этом $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ в этом случае график ф-ции $y = f(x)$ не имеет касательной в т.M_0,

$$f'_-(x_0) = tg\alpha_1$$
$$f'_+(x_0) = tg\alpha_2$$

Т.о. не всякая непрерывная в т. x_0 ф-ция имеет в этой т. производную.

Может оказаться, что функция непрерывна в точке x_0 и при этом $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$. В случае бесконечной производной касательная $\perp$ оси OX и имеет ур-ие $x = x_0$. Возможны следующие случаи.



$f'(x_0)=+\infty$ $\quad$ $f'(x_0)=-\infty$ $\quad$ $f'(x_0-0)=+\infty,\ f'(x_0+0)=-\infty$ $\quad$ $f'(x_0-0)=-\infty,\ f'(x_0+0)=+\infty$

Основные правила нахождения производной

Вычисление производной, исходя из определения производной

1. Пусть $f(x)=C$ на $[a,b]$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0 \textit{для} \forall x\in[a,b]$$

$C'=0$

2. Пусть $f(x)=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$.

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x)=\cos x$$

$(\sin x)'=\cos x$.

3. Пусть $f(x)=\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$. $(\cos x)'=-\sin x$.

4. Пусть $f(x)=a^x, x\in(-\infty,+\infty)$

$$\left(a^x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^x\ln a$$

$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

5. Пусть $f(x) = \log_a x, x \in (0, +\infty)$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \dfrac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x \Delta x \ln a} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Производная суммы, произведения и частного

Теорема Пусть ф-ция $U(x)$ и $V(x)$ имеют производные в т.x_0.Тогда их сумма, произведение и частное тоже буджут иметь в т. x_0 производные, которые вычисляются по формулам:

$$(U + V)' = U' + V'$$

$$(U \cdot V)' = U'V + V'U$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2} \, при \cdot V(x_0) \neq 0$$

Доказательство.

Ограничимся доказательством формулы $(U \cdot V)' = U'V + V'U$.

$$(UV)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x_0 + \Delta x)V(x_0 + \Delta x) - U(x_0)V(x_0)}{\Delta x}$$

В числителе дроби прибавим и вычтем $U(x_0)V(x_0 + \Delta x)$

Тогда

$$(U\cdot V)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x_0+\Delta x)V(x_0+\Delta x)-U(x_0)V(x_0)+U(x_0)V(x_0+\Delta x)-U(x_0)V(x_0+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V(x_0+\Delta x)\left[U(x_0+\Delta x)-U(x_0)\right]+U(x_0)\left[V(x_0+\Delta x)-V(x_0)\right]}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta U\cdot V(x_0+\Delta x)+U(x_0)\Delta V}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta U}{\Delta x}V(x_0+\Delta x)+\frac{\Delta V}{\Delta x}U(x_0)\right) = U'(x_0)V(x_0)+V'(x_0)U(x_0)$$

Существование пределов следует из условия существования производных ф-ций $U(x)$ и $V(x)$ в т. x_0.

В частности $(CV(x))' = C'V(x)+CV'(x) = CV'(x)$.

Итак, постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Самостоятельно: используя формулу $\left(\frac{U}{V}\right)'$ получить производные $y = tgx, y = ctgx$.

Производная сложной функции

Теорема. Пусть ф-ция $y = f(U)$ и $U = g(x)$ определяют сложную ф-цию $y = f(g(x))$ в некоторой окрестности т. x_0. Если при этом $\exists g'(x_0)$ и $\exists f'(U_0)$, причем $U_0 = g(x_0)$, тогда сложная ф-ция $y = f(g(x))$ имеет в т. x_0 производную, которая находится по формуле

$$y'(x_0) = f'(U_0)g'(x_0)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dU}\frac{dU}{dx}$$

Доказательство.

Дадим аргументу x_0 приращение Δx. Тогда U_0 получит приращение ΔU, а Δy получит приращение Δy. По условию теоремы

$$\exists \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x} = g'(x_0) \quad (1)$$

$$\exists \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta U} = f'(x_0) \quad (2)$$

По теореме о пределе, которая утверждает, что функция, имеющая предел, отличается от своего предела на б.м. величину, из (2) будем иметь

$$\frac{\Delta y}{\Delta U} = f'(U_0)+\alpha(\Delta U), \text{ где } \lim_{\Delta U\to 0}\alpha(\Delta U) = 0.$$

Тогда

$\Delta y = f'(U_0)\Delta U + \alpha(\Delta U)\Delta U$

Разделим обе части равенства на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(U_0)\dfrac{\Delta U}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta U)\dfrac{\Delta U}{\Delta x}$.

Найдем предел каждого слагаемого в правой части

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(U_0)\dfrac{\Delta U}{\Delta x} = f'(U_0)\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta U}{\Delta x} = f'(U_0)g'(x_0)$

Воспользовались тем, что постоянный множитель можно выносить за знак предела и условием (1) теоремы.

Докажем, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta U)\dfrac{\Delta U}{\Delta x} = 0$.

Т.к. ф-ция $U = g(x)$ имеет производную в т.x_0, то она непрерывна в этой точке и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta U = 0$. Отсюда и из того,что $\lim\limits_{\Delta U \to 0} \alpha(\Delta U) = 0$ следует.что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta U)\dfrac{\Delta U}{\Delta x} = 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(U_0)g'(x_0)$

или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dU}\dfrac{dU}{dx}$, что и требовалось доказать.

Пример. Найти производную ф-ции $y = \sin^3 x$.

$y = U^3, U = \sin x$

$\dfrac{dy}{dU} = 3U^2, \dfrac{dU}{dx} = \cos x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 3U^2 \cos x = 3\sin^2 x \cdot \cos x$.

Пример. Найти производную ф-ции

$y = \ln^3(\cos x)$

$y = U^3, U = \ln V, V = \cos x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dU}\dfrac{dU}{dV}\dfrac{dV}{dx}$

$\dfrac{dy}{dU} = 3U^2, \dfrac{dU}{dV} = \dfrac{1}{V}, \dfrac{dV}{dx} = -\sin x$

$\dfrac{dy}{dx} = 3U^2\dfrac{1}{V}(-\sin x) = 3(\ln V)^2\dfrac{1}{V}(-\sin x) = 3(\ln\cos x)^2\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)$

Производная функции $y = x^\lambda \ (x > 0, \lambda \in R)$

Применим метод логарифмического дифференцирования.
Прологарифмируем обе части равенства $y = x^\lambda$

$\ln y = \lambda \ln x$

Возьмем от обеих частей равенства производные по переменной x, при этом производную от $\ln y$ возьмем по правилу вычисления производной сложной ф-ции:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \lambda\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \cdot \lambda\frac{1}{x} = \lambda x^{\lambda-1}$$

$$\left(x^{\lambda}\right)' = \lambda x^{\lambda-1}$$

Формула получена при x > 0, но и при x < 0 производная находится по такой же формуле.

Производная обратной функции

Теорема. Пусть ф-ция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности т. x_0 и при этом $\exists f'(x_0) \neq 0$. Тогда ее обратная ф-ция $x = \varphi(y)$ имеет производную в т. $y_0\left(y_0 = f(x_0)\right)$, причем

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

т.е. производная обратной ф-ции равна обратной величине производной данной ф-ции.

Док-во.

Т.к. ф-ция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой $O(x_0)$, она имеет однозначную обратную ф-цию $x = \varphi(y)$, непрерывную в т. y_0. Получим формулу для производной ф-ции $x = \varphi(y)$.

Дадим аргументу . y_0 приращение Δy, при этом ф-ция $x = \varphi(y)$ получит приращение $\Delta x \neq 0$. Воспользуемся определением производной:

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$ т.к. ф-ция непрерывна и производная существует и не равна 0 по условию теоремы.

Т.о. теорема доказана.

На основании доказанной теоремы можно получить производные для обратных тригонометрических ф-ций.

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$$

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$$

$$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty$$

$$\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty$$

Получим первую из приведенных формул:

Пусть $y = \arcsin x, -1 < x < 1$. Тогда $x = \sin y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \cos y$ причем $\cos y > 0, т.к. -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ и ф-ция $x = \sin y$ непрерывна на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом условия теоремы выполнены и поэтому $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, что и требовалось доказать.

Гиперболические функции и их производные

В приложениях математики широко используются следующие функции:

$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ - гиперболический синус

$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ - гиперболический косинус

$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ - гиперболический тангенс

$cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ - гиперболический котангенс.

Гиперболические ф-ции интересны тем, что для них имеют место формулы, которые аналогичны или почти аналогичны соответствующим формулам в тригонометрии. Приведем некоторые из них:

$$sh\left(x+y\right) = shx \cdot chy + shy \cdot chx$$

$$ch\left(x+y\right) = chx \cdot chy + shy \cdot shx$$

$$ch^2 x - sh^2 x = 1$$

$$ch^2 x + sh^2 x = ch2x$$

$$2shx \cdot chx = sh2x$$

Сходство гиперболических ф-ций с тригонометрическими проявляется и в формулах для производных

$$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$$

$$(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$$

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x}$$

$$(cthx)' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{sh^2x - ch^2x}{sh^2x} = -\frac{1}{sh^2x}, x \neq 0$$

Таблица производных основных элементарных функций

1) $C' = 0$

2) $\left(x^{\lambda}\right)' = \lambda x^{\lambda-1}$

3) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

$\left(e^x\right)' = e^x$

4) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}, x > 0$

5) $\left(\sin x\right)' = \cos x$

6) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

7) $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$

8) $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi n$

9) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$

10) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$

11) $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

12) $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

13) $\left(shx\right)' = chx$

14) $\left(chx\right)' = shx$

15) $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$

16) $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}, x \neq 0$

Таблица производных сложных функций $y = f(u(x))$

1) $\left(u^{\lambda}\right)' = \lambda u^{\lambda-1} u'$

2) $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \ln a \cdot u'$

$\left(e^{u}\right)' = e^{u} u'$

3) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, u > 0$

4) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

5) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

6) $(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}, u \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

7) $(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}, u \neq \pi n$

8) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, |u| < 1$

9) $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, |u| < 1$

10) $(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$

11) $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

12) $(shu)' = chu \cdot u'$

13) $(chu)' = shu \cdot u'$

14) $(thu)' = \frac{u'}{ch^2 u}$

15) $(cthu)' = -\frac{u'}{sh^2 u}, u \neq 0$

Примеры

1) $\left[\left(1+x^5\right)^{10}\right]' = 10\left(1+x^5\right)^9 5x^4$

2) $\left(arctg^4 x\right)' = 4arctg^3 x\frac{1}{1+x^2}$

3) $\left(\sqrt[3]{\sin^2(\ln x)}\right)' = \left(\sin^{\frac{2}{3}}(\ln x)\right)' = \frac{2}{3}\sin^{-\frac{1}{3}}(\ln x)\left[\sin(\ln x)\right]' = \frac{2}{3}\sin^{-\frac{1}{3}}(\ln x)\cos(\ln x)(\ln x)' =$

$\frac{2}{3}\sin^{-\frac{1}{3}}(\ln x)\cos(\ln x)\frac{1}{x}$

4) $\left(2^{arctg\sqrt{x}}\right)' = 2^{arctg\sqrt{x}}\ln 2\left(arctg\sqrt{x}\right)' = 2^{arctg\sqrt{x}}\ln 2\frac{1}{1+x}\left(\sqrt{x}\right)' = 2^{arctg\sqrt{x}}\ln 2\frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Логарифмическое дифференцирование

Функцию вида $y = (f(x))^{g(x)}$ $(f(x) > 0)$, содержащую переменную величину как в основании, так и в показателе степени, называют степенно-показательной. Для нахождения производной такой ф-ции применяют так называемое логарифмическое дифференцирование. Для этого прологарифмируем исходную ф-цию: $\ln y = g(x)\ln f(x)$. Возьмем производные по переменной х от левой и правой частей полученного равенства, считая у сложной ф-цией от х. Тогда производная левой части $(\ln y)' = \frac{1}{y}y'$. Производную правой части найдем по формуле производной произведения, причем второй сомножитель тоже сложная ф-ция

$$\frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Отсюда $y' = (f(x))^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$.

Примеры

1) $y = x^x$

$\ln y = x\ln x$

$\frac{y'}{y} = \ln x + x\frac{1}{x}$

$y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

$$2)\, y=\left(1-\sqrt{x}\right)^{\cos 3x}$$

$$\ln y=\cos 3x \ln\left(1-\sqrt{x}\right)$$

$$\frac{y'}{y}=-\sin 3x\cdot 3\ln\left(1-\sqrt{x}\right)+\cos 3x\frac{\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{1-\sqrt{x}}$$

$$y'=\left(1-\sqrt{x}\right)^{\cos 3x}\left(-\sin 3x\cdot 3\ln\left(1-\sqrt{x}\right)-\cos 3x\frac{1}{1-\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$3)\, y=\frac{\left(x+1\right)^5\sqrt{x-1}\cdot\sin^2 x}{\left(x+4\right)^3 e^{x^5}}$$

$$\ln y=\ln\left[\frac{\left(x+1\right)^5\sqrt{x-1}\cdot\sin^2 x}{\left(x+4\right)^3 e^{x^5}}\right]$$

$$\ln y=5\ln\left(x+1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(x-1\right)+2\ln\sin x-3\ln\left(x+4\right)+x^5$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{5}{x+1}+\frac{1}{2\left(x-1\right)}+\frac{2\cos x}{\sin x}-\frac{3}{x+4}+5x^4$$

$$y'=y\left(\frac{5}{x+1}+\frac{1}{2\left(x-1\right)}+\frac{2\cos x}{\sin x}-\frac{3}{x+4}+5x^4\right)$$

$$y'=\frac{\left(x+1\right)^5\sqrt{x-1}\cdot\sin^2 x}{\left(x+4\right)^3 e^{x^5}}\left(\frac{5}{x+1}+\frac{1}{2\left(x-1\right)}+\frac{2\cos x}{\sin x}-\frac{3}{x+4}+5x^4\right)$$

Дифференциал

Понятие дифференцируемой ф-ции и дифференциала

Опр. Пусть ф-ция $y=f(x)$ определена в т. x_0 и некоторой ее окрестности. Ф-ция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в т. x_0 , если ее приращение в этой точке $f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$ можно представить в виде

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+O\left(\Delta x\right) \qquad (1),$$

где A – некоторая константа, $O\left(\Delta x\right)$ - б.м. более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x\to 0$.

Опр. Линейная относительно Δx часть Δy дифференцируемой ф-ции называется дифференциалом ф-ции $y=f(x)$ в т. x_0 и обозначается $df\left(x_0\right)$ или dy .

Т.о.

$$df\left(x_0\right)\overset{def}{=}A\cdot\Delta x \quad (2)$$

и тогда приращение Δy дифференцируемой ф-ции запишется в виде

$$\Delta y = dy + O\left(\Delta x\right) \quad (3)$$

Теорема. Для того, чтобы ф-ция $y = f(x)$ была дифференцируемой в т. x_0, необходимо и достаточно, чтобы эта ф-ция имела в т. x_0 производную $f'\left(x_0\right)$, при этом

$$dy = f'\left(x_0\right)dx \quad (4)$$

Док-во необходимости

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в т. x_0 , т.е.
$\Delta y = A\cdot\Delta x + O\left(\Delta x\right)$ при $\Delta x \to 0$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \underbrace{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{O\left(\Delta x\right)}{\Delta x}}_{=0} = A$. Следовательно производная в точке существует и равна А., т.о. $f'\left(x_0\right) = A$.

Док-во достаточности

Пусть существует производная $f'\left(x_0\right)$, т.е. $\exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'\left(x_0\right)$. Тогда по теореме о перделе $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'\left(x_0\right) + \alpha\left(\Delta x\right)$. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha\left(\Delta x\right) = 0$, где
$\Delta y = f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x + \alpha\left(\Delta x\right)\cdot\Delta x$.
Т.к. $\alpha\left(\Delta x\right)\Delta x = O\left(\Delta x\right)$, при $\Delta x \to 0$, то выполнение равенства (5) и означает дифференцируемость ф-ции $y = f(x)$ в т. x_0.

Таким образом, для ф-ции одной переменной дифференцируемость и существование производной – понятия равносильные. Этим и объясняется тот факт, что и операцию нахождения производной и операцию нахождения дифференциала принято называть дифференцированием ф-ции.

Теперь, когда установлена формула $dy = f'\left(x_0\right)dx$, ясна природа обозначения производной $f'\left(x_0\right) = \dfrac{dy}{dx}$.

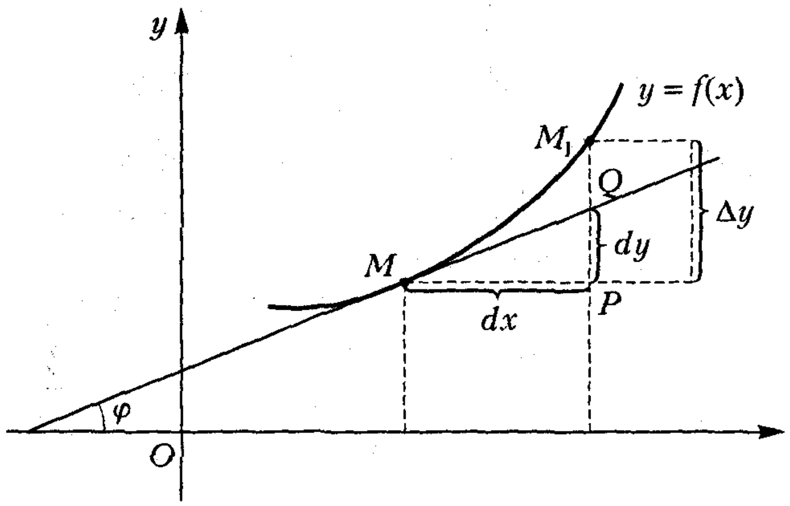
Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности

Мы уже доказывали, что ф-ция, имеюща в т. x_0 производную, непрерывна в этой точке.

Теорема. Если ф-ция $y = f(x)$ дифференцируема в т. x_0 , то она непрерывна в этой точке.
Напомним, что обратное утверждение неверно.

Геометрический смысл дифференциала

Пусть ф-ция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности т. x_0, а в самой т. x_0 дифференцируема. Дифференцируемость равносильна $\exists$ производной, а $\exists$ производной равносильно $\exists$ касательной к графику ф-ции в т. $M\left(x_0, y_0\right)$. Проведем эту касательную и возьмем т. $M_1\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)$ на графике ф-ции.



$$\Delta y = \left|PM_1\right| = \left|PQ\right| + \left|QM_1\right|$$
$$\left|PQ\right| = \left|MP\right| tg\alpha = f'\left(x_0\right)\Delta x = dy$$
$$\left|QM_1\right| = O\left(\Delta x\right)\cdot при \cdot \Delta x \to 0$$
$$\left|PM_1\right| = \Delta y - приращение \cdot функции$$
$$\left|PQ\right| = dy - приращение \cdot ординаты \cdot касательной$$

Т.о. дифференциал в т. x_0 равен приращению ординаты касательной в т. $M_0\left(x_0, y_0\right)$ графика ф-ции.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Еще раз подчеркнем, что при замене Δy на dy получающаяся погрешность оказывается б.м. более высокого порядка малости, чем Δx.

Итак

$$\Delta f\left(x_0\right) \approx df\left(x_0\right) \Rightarrow f\left(x_0+\Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\Delta x.$$

Полученное приближенное равенство широко используется в приближенных вычислениях.

Пример. Найти приближенно $\sqrt{101}$

Решение. Требуется найти значение ф-ции $y = \sqrt{x}$ в т.101.

В качестве x_0 удобно взять 100, $y(x_0) = y(100) = \sqrt{100} = 10$, $\Delta x = 101 - 100 = 1б$

$$y'\left(x_0\right) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2*10} = \frac{1}{20}$$

$y(101) = 10 + \frac{1}{20} \cdot 1 = 10.05$

$\sqrt{101} \approx 10.05$

Пример. Вычислить приближенно $\frac{2.96}{\sqrt{(2.96)^2 - 5}}$.

Решение. Требуется найти значение ф-ции $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$ в т. x=2.96.

В качестве x_0 удобно взять 3. $f(3) = \frac{3}{2}$, $\Delta x = 0.04$.

$$f'(x_0) = \frac{\sqrt{x^2 - 5} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 5}}}{x^2 - 5} = \frac{x^2 - 5 - x^2}{\left(x^2 - 5\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{5}{\left(x^2 - 5\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(3) = -\frac{5}{8}$$

$$\frac{2.96}{\sqrt{(2.96)^2 - 5}} \approx \frac{3}{2} - \frac{5}{8}(-0.04) = 1.5 + 0.025 = 1.525$$

Пример. Вычислить $\sin 46^0$.
Требуется найти значение ф-ции $f(x) = \sin x$ в т. 46^0.

В качестве x_0 удобно взять 45^0 . $f\left(45^0\right) = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\Delta x = 1^0 = \frac{\pi}{180} = \frac{3.14}{180} \approx 0.017$. $f'\left(45^0\right) = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin 46^0 \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = 0.7191$$

Основные правила дифференцирования

Таблица дифференциалов

Т.к. нахождение дифференциала ф-ции $y = f(x)$ по формуле $dy = f'(x_0)dx$ сводится к отысканию производной $f'(x)$, формулы для дифференциала суммы, произведения и частного имеют тот же вид, что и соответствующие формулы для производной:

$$d(U + V) = dU + dV$$

$$d(U \cdot V) = dU \cdot V + dV \cdot U$$

$$d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{dU \cdot V - dV \cdot U}{V^2}\, при \cdot V(x_0) \neq 0$$

На основании таблицы производных простых элементарных ф-ций запишем таблицу дифференциалов:

1) $d(C)=0$

2) $d\left(x^{\lambda}\right)=\lambda x^{\lambda-1}dx$

3) $d\left(a^{x}\right)=a^{x}\ln a\cdot dx$

$d\left(e^{x}\right)=e^{x}dx$

4) $d\left(\log_{a}x\right)=\dfrac{dx}{x\ln a}$

$d(\ln x)=\dfrac{dx}{x},\, x>0$

5) $d(\sin x)=\cos x\cdot dx$

6) $d(\cos x)=-\sin x\cdot dx$

7) $d(tgx)=\dfrac{dx}{\cos^{2}x},\, x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$

8) $d(ctgx)=-\dfrac{dx}{\sin^{2}x},\, x\neq\pi n$

9) $d(\arcsin x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}},\, |x|<1$

10) $d(\arccos x)=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}},\, |x|<1$

11) $d(arctgx)=\dfrac{dx}{1+x^{2}}$

12) $d(arcctgx)=-\dfrac{dx}{1+x^{2}}$

13) $d(shx)=chx\cdot dx$

14) $d(chx)=shx\cdot dx$

15) $d(thx)=\dfrac{dx}{ch^{2}x}$

16) $d(cthx)=-\dfrac{dx}{sh^{2}x},\, x\neq 0$

Дифференциал сложной функции

Пусть функции $y=y(x), x=x(t)$ определяют сложную ф-цию $y=y(x(t))$. Для такой ф-ции независимой переменной является t и поэтому по формуле для дифференциала ф-ции независимой переменной будем иметь

$$dy=\frac{dy}{dt}dt$$

По формуле производной сложной ф-ции $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$

и тогда $dy=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}dt=y'(x)\frac{dx}{dt}dt$

но $\frac{dx}{dt}dt=dx$ и поэтому окончательно будем иметь $dy=y'(x)dx$.

Полученная формула для дифференциала сложной ф-ции по форме записи совпадает с формулой для дифференциала ф-ции $y=y(x)$ независимой переменной x. Т.о. форма записи $dy=y'(x)dx$ дифференциала ф-ции $y=y(x)$ не зависит от того является ли x независимой переменной или является ф-цией новой переменной. Это св-во носит название св-ва инвариантности формы записи дифференциала.

Производные высших порядков

Пусть ф-ция $y=f(x)$ имеет производную на некотором множестве X. Тем самым на этом множестве определена новая ф-ция $f'(x)$, которая, в свою очередь, тоже может иметь производную на множестве X или какой-то ее части.

Опр. Если $\exists$ производная от производной $f'(x)$, то она называется производной второго порядка от ф-ции $y=f(x)$ и обозначается одним из символов $y''(x),\frac{d^2y}{dx^2}, f''(x),\frac{d^2f}{dx^2}$.

Т.о.

$$f''(x)\overset{def}{=}\left(f'(x)\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Опр. Если $\exists$ производная от производной $f''(x)$, то она называется производной третьего порядка от ф-ции $y=f(x)$ и обозначается одним из символов $y'''(x),\frac{d^3y}{dx^3}, f'''(x),\frac{d^3f}{dx^3}$.

Аналогично вводится производная $n-$го порядка, которую принято обозначать $y^{(n)}(x), f^{(n)}(x),\frac{d^ny}{dx^n}$.

Т.о.

$$f^{(n)}(x)\overset{def}{=}\left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Пример.

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

....

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Например $(\sin x)^{(30)} = \sin(x + 15\pi) = -\sin x$.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть ф-ция задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha < t < \beta$$

Требуется найти $y'(x) = \frac{dy}{dx}$. Будем рассматривать $y'(x)$ как отношение dy к dx, предполагая, что обе ф-ции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы.

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \text{при} \cdot x'(t) \neq 0.$$

Иногда, чтобы подчеркнуть, по каким переменным берутся производные, формулу записывают в виде:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \ x'_t \neq 0.$$

Пример. Составить ур-ие касательной и нормали к астроиде

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad \text{в т. } t = \frac{\pi}{4}.$$

Решение.

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) - \textit{касательная}$$

$$y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) - \textit{нормаль}$$

$$x_0 = \cos^3 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y_0 = \sin^3 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3\sin^2 t \cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)} = -tgt$$

$$y'\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right) = -tg\frac{\pi}{4} = -1$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{4} - 1\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - x - \textit{касательная}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{4} + 1\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - x - \textit{нормаль}$$

Дифференцирование неявной функции

Опр. Ф-ция $y = f(x)$ называется неявной ф-цией независимой переменной x, если она задана ур-ием $F(x, y) = 0$, неразрешенным относительно y.

Для нахождения производной y'_x неявно заданной ф-ции используется простой прием:

обе части равенства $F(x, y) = 0$ дифференцируем по ***x***, считая, что ***y*** зависит от ***x***, с нчетом правила дифференцирования сложной ф-ции. Из полученного ур-ия находим y'_x.

$$1) x^2 + y^2 - 9 = 0$$
$$2x + 2yy'_x = 0$$
$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$2) e^{xy} + \sin(x + 2y) - 2x^2 = 0$$
$$e^{xy}(y + xy'_x) + \cos(x + 2y)(1 + 2y'_x) - 4x = 0$$
$$y'_x = \frac{4x - ye^{xy} - \cos(x + 2y)}{xe^{xy} + 2\cos(x + 2y)}$$

Основные теоремы дифференциального исчисления

Знание производной $f'(x)$ часто позволяет делать заключение о поведении самой ф-ции $y = f(x)$. Эти заключения основываются на следующих теоремах:

Теорема 1. Пусть ф-ция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности т.x_0, а в самой точке дифференцируема. Тогда
1) Если $f'(x_0) > 0$, ф-ция возрастает в т.x_0.

2) Если $f'(x_0) < 0$, ф-ция убывает в т.x_0.

Док-во. Пусть $f'(x_0) > 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$

По теореме о пределе в некоторой окрестности т.x_0 выполняется неравенство $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$. Если при этом
$\Delta x < 0 (x_0 + \Delta x < x_0) \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$.

Если $\Delta x > 0 (x_0 + \Delta x > x_0) \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$.

Таким образом при переходе через т.x_0 слева направо значения ф-ции $f(x)$ от меньших, чем $f(x_0)$ переходят к большим, чем $f(x_0)$. Это и означает, что ф-ции $f(x)$ в т.x_0 возрастает.

Аналогично доказывается теорема для случая $f'(x_0) < 0$.

Теорема 2. (**теорема Ферма**). Пусть ф-ция $y = f(x)$ определена на промежутке $[a,b]$ и в некоторой т. x_0 промежутка $[a,b]$ принимает наибольшее(наименьшее) значение. Тогда , если в т. x_0 ф-ция имеет производную, то $f'(x) = 0$ она равна нулю.

Доказательство

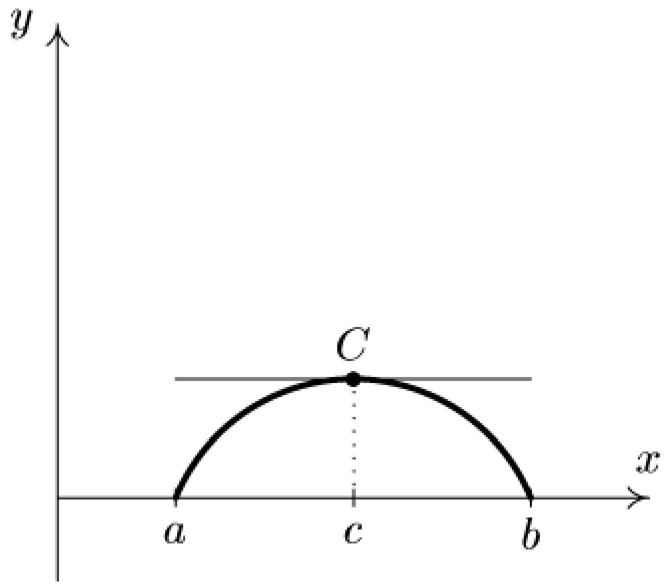
Пусть для определенности $f(x_0)$ - наибольшее значение ф-ции на $[a,b]$, т.е. $f(x) \le f(x_0)$ для $\forall x \in [a,b]$. Предположим, что $f'(x) \ne 0$. Тогда, если $f'(x_0) > 0$, то по теореме 1 ф-ция в т. x_0 возрастает и это значит, что в некоторой правой полуокрестности т. x_0 будет выполняться неравенство $f(x) > f(x_0)$, а это противоречит тому, что $f(x_0)$ - наибольшее значение ф-ции. Если же предположить, что $f'(x_0) < 0$, тогда по теореме 1 ф-ция в т. x_0 убывает и, следовательно в некоторой левой полуокрестности т. x_0 будет выполняться неравенство $f(x) > f(x_0)$, что тоже противоречит тому, что $f(x_0)$ - наибольшее значение ф-ции. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема Ферма имеет простую геометрическую иллюстрацию: если в некоторой т. x_0 промежутка $[a,b]$ ф-ция принимает наибольшее(наименьшее) значение и $\exists$ производная, то касательная к графику ф-ции в т. x_0 будет параллельна оси OX.

Заметим, что в т. наибольшего(наименьшего значения ф-ции), эта ф-ция может и не иметь производной. График такой ф-ции не имеет в соответствующей т. касательной.

Теорема 3 (теорема Ролля). Пусть
1) ф-ция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a,b]$,
2) $\exists$ конечная производная $f'(x)$ хоты бы на интервале (a,b),
3) на концах промежутка $[a,b]$ ф-ция принимает равные значения $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри промежутка $[a,b]$ найдется т. с такая, что $f'(c) = 0$.



Доказательство. По теореме вейершрасса непрерывная на $[a,b]$ ф-ция принимает на этом промежутке свои наименьшее ***m*** и наибольшее значение ***M***, т. е.
$m \le f(x) \le M \cdot \forall x \in [a,b]$.
Возможны два случая:
1) $m = M \Rightarrow f(x) = const$ на $[a,b]$ $\Rightarrow f'(x) = 0 \cdot \forall x \in [a,b]$
2) $m < M$. В этом случае, т.к. по условию теоремы $f(a) = f(b)$, либо наименьшее, либо наибольшее значение ф-ция принимает во внутренней т. x = c промежутка $[a,b]$. Тогда по теореме Ферма (все условия теоремы выполнены) $f'(c) = 0$.

Заметим, что при выполнении условий теоремы Ролля $f'(x)$ может обращаться в ноль в нескольких точках промежутка $[a,b]$.

Следствие. В частном случае, когда , смысл теоремы Ролля в том, что между нулями дифференцируемой ф-ции лежит, по крайней мере, один ноль ее производной.

Теорема Лагранжа. Пусть

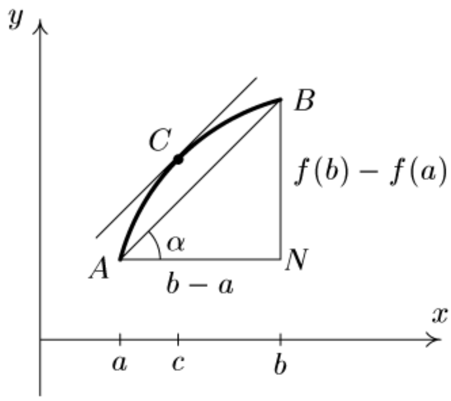
1) ф-ция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$,
2) $\exists$ конечная производная $f'(x)$ хоты бы на интервале (a,b),
тогда внутри промежутка $[a,b]$ найдется т. с такая, что
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Доказательство. Введем вспомогательную ф-цию $F(x) = f(x) - \lambda x$. Число λ подберем так, чтобы $F(x)$ удовлетворяла условиям теоремы Ролля. Первые два условия теоремы Ролля выполнены при любом λ. Найдем λ, при котором $F(b) = F(a)$, т.е. $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b \Rightarrow \lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Итак ф-ция $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} x$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля $\Rightarrow \exists т.c \in [a,b] : F'(c) = 0$.
$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Дадим геометрическую иллюстрацию теоремы Лагранжа $tg\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

$f'(c) = tg\alpha$



Теорема Лагранжа утверждает, что на графике ф-ции $f(x)$ имеется т. $M(c, f(c))$ касательная к которой параллельна хорде АВ, соединяющей граничные т. графика. Таких точек на графике может быть несколько.

Замечание 1. Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа при $f(a) = f(b)$.

Замечание 2. Применим теорему Лагранжа к ф-ции $y = f(x)$ на промежутке $[x, x+\Delta x] \in [a,b]$.:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(c), c\in[x,x+\Delta x] \text{ или } \Delta y=f'(c)\Delta x.$$

Это равенство принято называть формулой конечных приращений Лагранжа.

Теорема (Коши). Пусть

1) ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a,b]$,
2) $\exists$ конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ хоты бы на интервале (a,b),
3) $g'(x)\neq 0\cdot\forall x\in(a,b)$.

Тогда внутри промежутка $[a,b]$ найдется т.с такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Заметим, что теорема Лагранжа следует из теоремы Коши при $g(x)=x$.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенных выражений

Раскрытие неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Теорема. Пусть
1) ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности т. x_0 за исключением, быть может самой т. x_0.
2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$
3) $\exists$ конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x)\neq 0$ в рассматриваемой окрестности.

тогда если существует $\exists$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

Т.е при выполнении перечисленных условий предел отношения ф-ций совпадает с пределом отношения их производных.

Доказательство. Если ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ не определены в т. x_0 доопределим их, приняв $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

Доопределенные таким образом ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ будут непрерывны и в т. x_0. Возьмем x из окрестности т. x_0. и будем рассматривать $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[x_0,x]$, если $x>x_0$ или на $[x,x_0]$ если $x<x_0$. Условия теоремы таковы, что ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют на $[x_0,x]$ (или$[x,x_0]$) условиям теоремы Коши. По этой теореме между $x\cdot u\cdot x_0$ найдется т.с такая, что $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$,

т.к $f\left(x_0\right)=0, g\left(x_0\right)=0$ будем иметь $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)}$. Перейдем в этом равенстве к пределу при $x\to x_0$, $c\to x_0$. По условию теоремы предел правой части существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=\lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=A$ следовательно будет существовать и предел левой части, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=A$, что и требовалось доказать.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\ln\left(\cos x\right)}{2\pi-x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}\left(-\sin x\right)}{-1}=\lim\limits_{x\to 2\pi}tgx=0$.

Замечание 1. Теорема верна и при $x\to\infty$.

Замечание 2. Может оказаться, что при использовании правила Лопиталя отношение $\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$ при $x\to x_0$ тоже будет неопределенностью вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. В этом случае правило используется повторно, если $f'\left(x\right)$ и $g'\left(x\right)$ удовлетворяют условиям теоремы.

Пример. Найти придел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$.

Правило Лопиталя использовалось трижды.

Раскрытие неопределенностей вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Теорема. Пусть

1) ф-ции $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности т. x_0 за исключением, быть может самой т. x_0.

2) $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=\infty, \lim\limits_{x\to x_0}g\left(x\right)=\infty$

3) $\exists$ производные $f'\left(x\right)$ и $g'\left(x\right)$, отличные от нуля.

тогда если существует $\exists$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=A$ (конечный или нет), то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=A.$$

Т.е при выполнении перечисленных условий предел отношения ф-ций совпадает с пределом отношения их производных.

Пример. Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a^x}{x^n}\left(a>1, n\in N\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a^x}{x^n}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a^x\ln^2 a}{n\left(n-1\right)x^{n-2}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=...=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a^x\ln^n a}{n!}=+\infty$$

Показательная ф-ция $y=a^x$ при $x\to+\infty$ растет быстрее, чем степенная $y=x^n$ при любом n.

Пример. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=\not\exists$$ правило Лопиталя неприменимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

Раскрытие неопределенностей вида $(0\cdot\infty),(\infty-\infty),(0^0),(\infty^0),(1^\infty)$

Каждую из этих неопределенностей можно свести к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

$$1.\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\ln(\pi-2x)(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\ln(\pi-2x)}{\frac{1}{\cos x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\frac{-2}{\pi-2x}}{\frac{(-\sin x)\to-1}{\cos^2 x}}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2 x}{\pi-2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{4\cos x\sin x}{-2}=0$$

$$2.\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)(\infty-\infty)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\right)\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\ln x+1-1}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}\right)=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{x-(x-1)}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

Неопределенности вида $(0^0),(\infty^0),(1^\infty)$ сводятся к виду $(0\cdot\infty)$ путем предварительного логарифмирования.

Пример. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x^2-1}}\left(1^\infty\right)$

$$y = x^{\frac{1}{x^2-1}}$$

$$\ln y = \ln x^{\frac{1}{x^2-1}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x^2-1}\ln x$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\ln y = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 1} y = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{2}}$$

В процессе применения правила Лопиталя часто удобно использовать известные эквивалентные б.м. Напомним,что если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$, то при $x \to x_0$

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$$
$$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$$
$$tg\alpha(x) \sim \alpha(x)$$
$$arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$$
$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$$
$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$$

Пример. $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x\ln(1+x^2)}{tgx - x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x^2}{tgx - x}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2\cdot(\cos^2 x)\to 1}{1-\cos^2 x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2} = 3$$

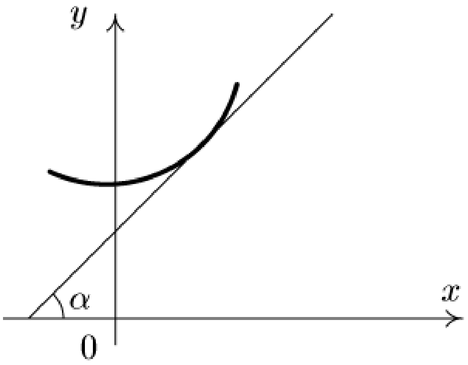
Исследование функций и построение графиков

Исследование функций на монотонность

Теорема. Для того, чтобы дифференцируемая ф-ция $f(x)$ была возрастающей на промежутке (a,b) необходимо и достаточно, чтобы производная в каждой т. (a,b) была положительной

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \quad \Rightarrow tg\alpha > 0 \Rightarrow 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

(касательная к кривой $f(x)$ в каждой т. (a,b) образует острый угол с осью OX).



$y' = \operatorname{tg}\alpha > 0$

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 - две произвольные точки на промежутке (a,b) и $x_1 < x_2$. Тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа и

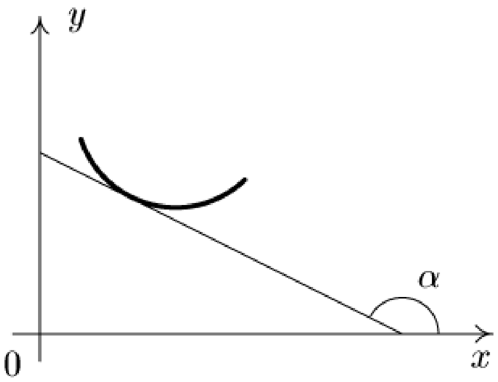
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), c \in (x_1, x_2).$$

Т.к. по условию $f'(c) > 0$ и $x_1 < x_2$, то $f(x_2) > f(x_1)$ и ф-ция является возрастающей.

Теорема. Для того, чтобы дифференцируемая ф-ция $f(x)$ была убывающей на промежутке (a,b) необходимо и достаточно, чтобы производная в каждой т. (a,b) была отрицательной

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \quad \Rightarrow tg\alpha < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$$

(касательная к кривой $f(x)$ в каждой т. (a,b) образует тупой угол с осью ОХ).



$y' = \operatorname{tg}\alpha < 0$

Доказательство аналогично предыдущей теореме (сам-но).

Пример. Определить промежутки, на которых ф-ция $f(x) = x^3 - 12x + 11$ возрастает и убывает.

Решение.

$ОДЗ\left(x \in (-\infty, +\infty)\right)$ $3x^2 - 12 > 0 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2\left(x < -2 \cup x > 2\right)$ -ф-ция возрастает

$3x^2 - 12 < 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2\left(-2 < x < 2\right)$ -ф-ция убывает.

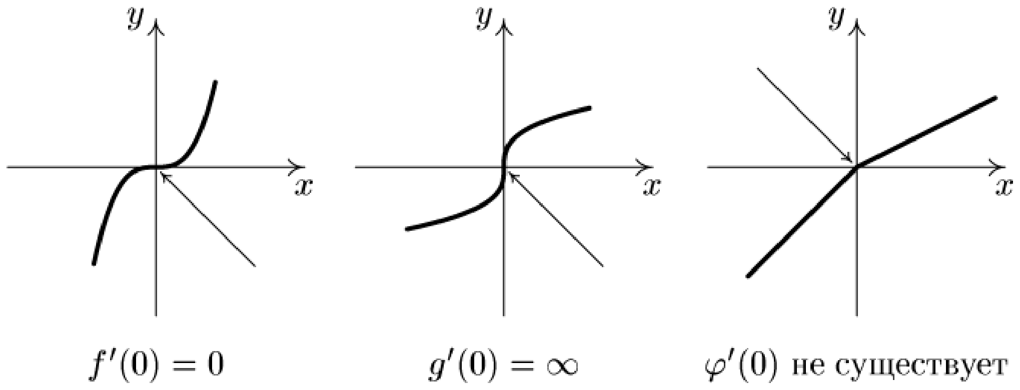


Рис. 9.2. Возрастающие функции

∇ **Пример 2.** На рис. 9.2 изображены три функции:

1) $f(x) = x^3$; 2) $g(x) = x^{1/3}$; 3) $\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \leqslant 0, \\ 2x, & \text{при } x > 0. \end{cases}$

Точки локального экстремума функции

Опр. Функция $y = f(x)$ имеет в т. x_0 локальный максимум, если для всех x из некоторой окрестности т. x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ при $x \neq x_0$.

Опр. Функция $y = f(x)$ имеет в т. x_0 локальный минимум, если для всех x из некоторой окрестности т. x_0 выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ при $x \neq x_0$.

Точки локального минимума и максимума называются точками **локального экстремума** функции.

Замечание. Локальные экстремумы не следует путать с наибольшим и наименьшим значением ф-ции.

Теорема. (необходимое условие локального экстремума)

Если ф-ция $y = f(x)$ имеет в т. x_0 локальный экстремум, тогда $f'(x) = 0$ либо не существует.

Доказательство. Т.к. в т. x_0 ф-ция $f(x)$ имеет локальный экстремум, то $\exists$ такой интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в котором значение ф-ции $f(x_0)$ является наибольшим(наименьшим) среди всех других значений этой ф-ции. Тогда по теореме Ферма, произволная ф-ции в т. x_0 равна нулю, если она существует.

Опр. Внутренние точки из области определения ф-ции $y = f(x)$ в которых $f'(x) = 0$ или не существует, называются критическими точками 1-го рода. Точки, в которых производная равна нулю, называются стационарными точками.

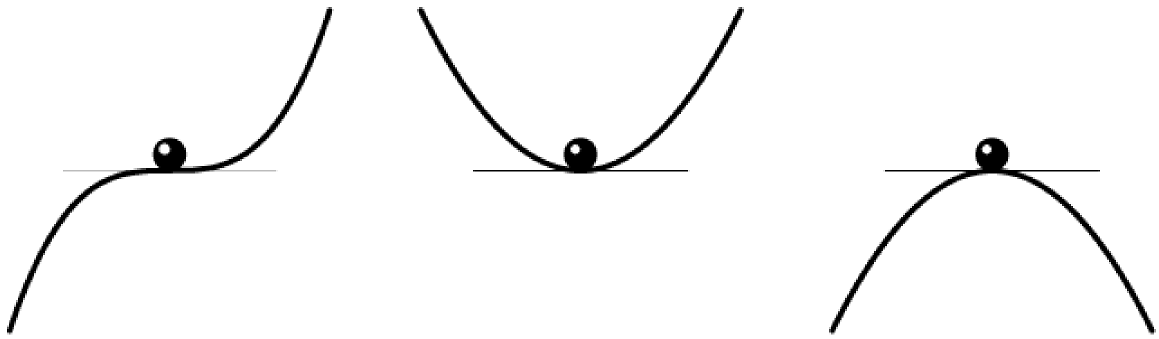


Рис. 9.3. Стационарные точки

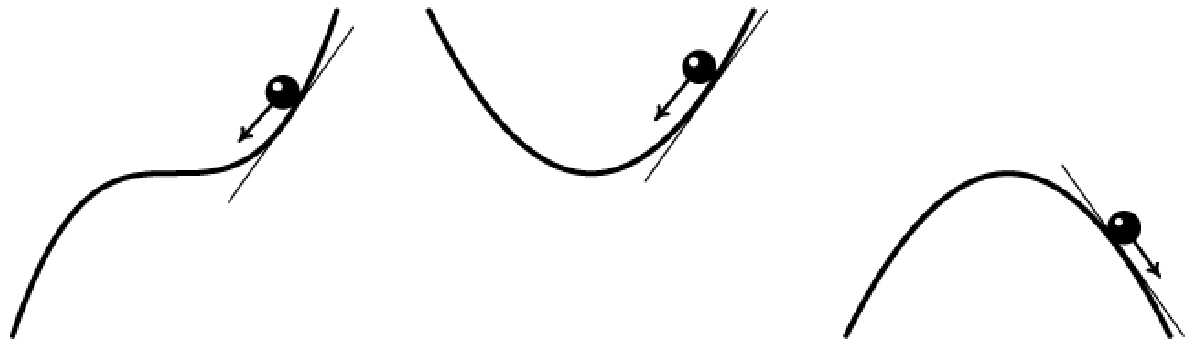
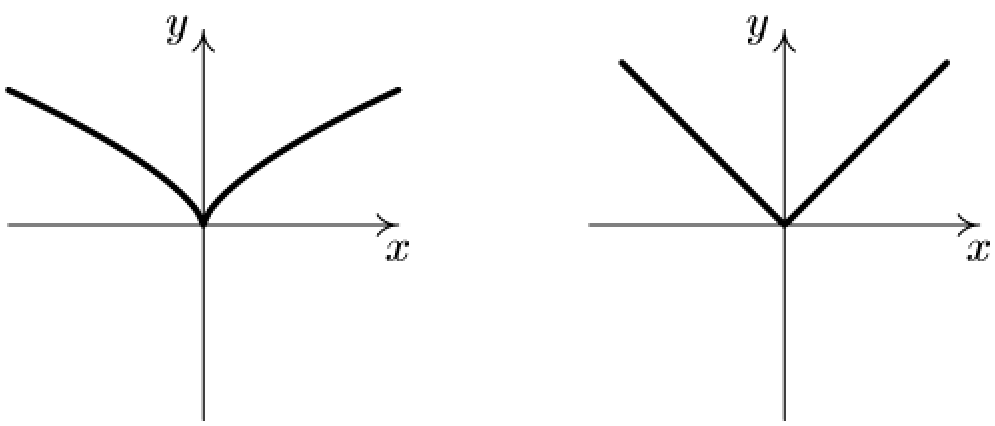


Рис. 9.4. Нестационарные точки



$g'(0) = \infty$ $\qquad\qquad$ $\varphi'(0)$ не существует

Рис. 9.5. Минимум функции в точке $x = 0$

Замечание. Из теоремы следует, что точки локального экстремума следует искать среди критических т. 1-го рода. Это не означает, что в критической т. обязательно будет экстремум.

Пример. $y = x^3, y' = 3x^2 \Rightarrow x = 0$ - критическая т. первого рода, но не экстремум.

Теорема. ***Первое достаточное условие локального экстремума***.

Если при переходе через критическую точку 1-го рода производная $f'(x)$ меняет свой знак, то в критической точке ф-ция имеет экстремум. При этом, если знак меняется с «+» на «-» - максимум в точке, если с «-» на «+» - минимум.

Доказательство. Пусть $f'(x)$ при переходе через т. x_0 меняет знак с + на -.

Пусть $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Применим ф-лу Лагранжа к ф-ции $y = f(x)$ на отрезке $[x, x_0]$. Получаем $f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x), c \in (x, x_0)$. Т.к. $f'(c) > 0$ и $x_0 - x > 0$, то $f(x_0) - f(x) > 0 \Rightarrow f(x_0) > f(x)$.

Рассмотрим интервал справа от x_0 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Применим ф-лу Лагранжа к ф-ции $y = f(x)$ на отрезке $[x_0, x]$. Получаем $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), c \in (x_0, x)$. Т.к. $f'(c) < 0$ и $x - x_0 > 0$, то $f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0) > f(x)$.Следовательно в окрестности т. x_0 $f(x_0) > f(x)$, т.е. в т. x_0 – локальный максимум.

Аналогично рассмотрим случай смены знака с – на +. т. x_0

Замечание. Если знак производной в критической точке не меняется, то экстремума в этой точке нет.

Схема исследования ф-ции $y = f(x)$ на экстремум

1) Находим область определения ф-ции, чтобы выявить точки разрыва.
2) Находим первую производную ф-ции $y = f'(x)$ и из условия $y' = 0$ или не существует, находим координаты критических точек (точек возможного экстремума ф-ции).
3) Наносим критические точки и точки разрыва ф-ции на числовую прямую и определяем знак первой производной в окрестности каждой критической точки (строим таблицу знаков первой производной) . При этом определяем интервалы возрастания и убывания ф-ции.
4) Делаем вывод о наличии экстремума в каждой критической точке по смене знака первой производной.
5) Вычисляем значение ф-ции в критических точках, наносим их на координатную плоскость и указываем характер поведения ф-ции (вид экстремума).

Замечание. Точки, в которых ф-ция терпит разрыв или граничные точки области определения не могут являться точками экстремума.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 3x$

1) ОДЗ: $(-\infty, +\infty)$

2) находим $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$,

Находим критические точки, корни производной $3(x^2 - 1) = 0, x_1 = -1, x_2 = 1$

3) разбиваем критическими точками ось OX на промежутки и смотрим знаки производной в каждом из промежутков

x	$-\infty, -1$	-1	-1,1	1	$1, +\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

f(x)	□	max (2)	□	min (-2)	□

$x_1 = -1$ -локальный максимум

$x_1 = 1$ -локальный минимум
интервалы монотонности ф-ции:
ф-ция возрастает $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,
ф-ция убывает $x \in (-1, +1)$.

Пример. Исследовать на экстремум ф-цию $y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{e^x}$

ОДЗ: $(-\infty, +\infty)$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{e^x} = \left(\frac{\infty}{0}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{e^x x^{\frac{1}{3}}} = 0$$

$$y' = \frac{\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} e^x - x^{\frac{2}{3}} e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x (2-3x)}{3\sqrt[3]{x} e^{2x}} = \frac{(2-3x)}{3\sqrt[3]{x} e^x}$$ критические точки

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}, y' = 0 \\ x_2 = 0, y' = не \cdot существует \end{cases}.$$

x	$-\infty, 0$	0	$0, \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}, +\infty$
$f'(x)$	-	не $\exists$	+	0	-
f(x)	□	min (0)	□	max (0.39)	□

Теорема. ***Второе достаточное условие экстремума ф-ци***и.

Пусть ф-ция $y = f(x)$ определена в т. x_0 и в некоторой окрестности этой точки.При этом она дважды дифференцируема и $f'(x) = 0$. Тогда,

1) если $f''(x_0) > 0$, то ф-ция $y = f(x)$ имеет в т. x_0 локальный минимум,

2) если $f''(x_0) < 0$, то ф-ция $y = f(x)$ имеет в т. x_0 локальный максимум.

Исследование функции на выпуклость, вогнутость и перегиб

Опр. Кривая называется выпуклой вверх в т.M_0, если в некоторой окрестности этой точки все точки кривой расположены под касательной, проведенной в т. M_0.

Опр. Кривая называется вогнутой (выпуклой вниз)в т.M_0, если в некоторой окрестности этой точки все точки кривой расположены над касательной, проведенной в т. M_0.

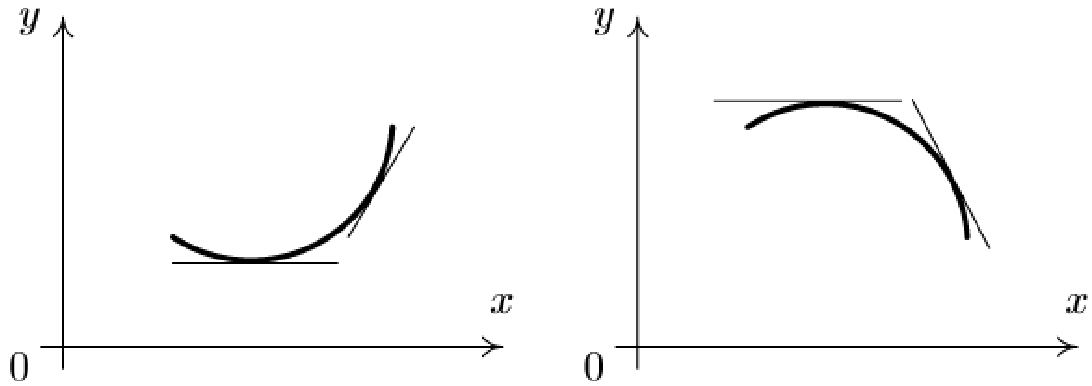


Рис. 9.13. Выпуклость вниз и выпуклость вверх

Опр. Т.M_0 называется точкой перегиба кривой, если в некоторой окрестности этой точки имеются точки кривой, расположенные по разные стороны от касательной.

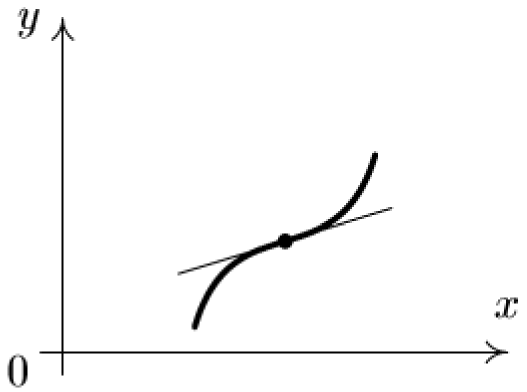


Рис. 9.15. Точка перегиба

Заметим, что понятие выпуклости, вогнутости и перегиба так же, как и понятие экстремума, являются локальными.

Функция $y = f(x)$ исследуется на выпуклость, вогнутость и перегиб с помощью второй производной.

Теорема. Пусть ф-ция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в каждой точке интервала(a,b). Тогда, если $f''(x) > 0$ во всех точках (a,b), то график ф-ции вогнут (выпуклый вниз) на интервале (a,b), если $f''(x)<0$ во всех точках (a,b), то график ф-ции – выпуклая вверх кривая на интервале (a,b).

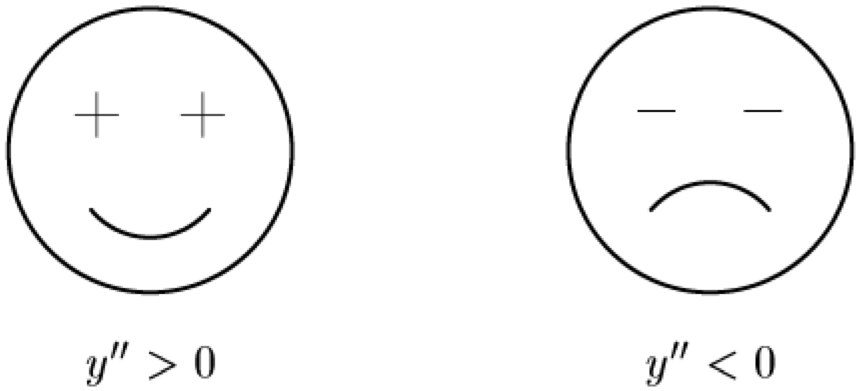


Рис. 9.14. Выпуклость вниз и выпуклость вверх

Опр. Точки из области определения ф-ции $y = f(x)$, в которых $f''(x)=0$ или не существует, называются критическими точками второго рода.

Теорема. ***Достаточное условие точек перегиба***.

Если в окрестности критической точки 2-го рода производная меняет знак, то это – точка перегиба.

Схема нахождения точек перегиба.

1) Находим область определения ф-ции, чтобы выявить точки разрыва.
2) Находим первую и вторую производную ф-ции $y = f'(x)$ и из условия $y''=0$ или не существует, находим координаты критических точек (точек возможного перегиба ф-ции).
3) Наносим критические точки и точки разрыва ф-ции на числовую прямую и определяем знак второй производной в окрестности каждой критической точки (строим таблицу знаков второй производной) . При этом определяем интервалы выпуклости и вогнутости ф-ции.
4) Делаем вывод о наличии перегиба в каждой критической точке по смене знака первой производной.
5) Вычисляем значение ф-ции в критических точках, наносим их на координатную плоскость .

Замечание. Точки, в которых ф-ция терпит разрыв или граничные точки области определения не могут являться точками перегиба.

Пример. Найти точки пергиба и исследовать ф-цию на выпуклость и вогнутость $y = x^3$

$y' = 3x^2, y'' = 6x, x = 0$ - критическая точка 2-го рода.

Пример. Найти точки пергиба и исследовать ф-цию на выпуклость и вогнутость $y = \frac{x}{x^2+4}$.

1) ОДЗ: $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = \frac{\left(x^2+4\right) - x \cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

2) $y'' = \frac{2x\left(x^2-12\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$

$$y'' = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = +\sqrt{12} = 2\sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$$

3)

x	$-\infty, -2\sqrt{3}$	-2√3	-2√3,0	0	0,2√3	2√3	$2\sqrt{3}, +\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
f(x)		т.пер. (-√3/8≈-0.2)		т.пер (0)		т.пер (√3/8≈0.2)	

Асимптоты графика функции

При исследовании функции на бесконечности ($x \to +\infty, x \to -\infty$) или в точках разрыва второго рода часто оказывается, что график ф-ции приближается к той или иной прямой. Такие прямые называются **асимптотами**. Асимптоты бывают вертикальными, горизонтальными и наклонными.

Опр. Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика ф-ции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ равен ∞ бесконечности. (т. x = a - точка разрыва 2-го рода).

$y = \frac{1}{x}$ x = 0 – вертикальная асимптота (x=0 – точка разрыва 2-го рода).

Опр. Прямая $y = A$ называется **горизонтальной асимптотой** графика ф-ции $y = f(x)$ при ($x \to +\infty, x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x \to +\infty} = A$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} = A$.

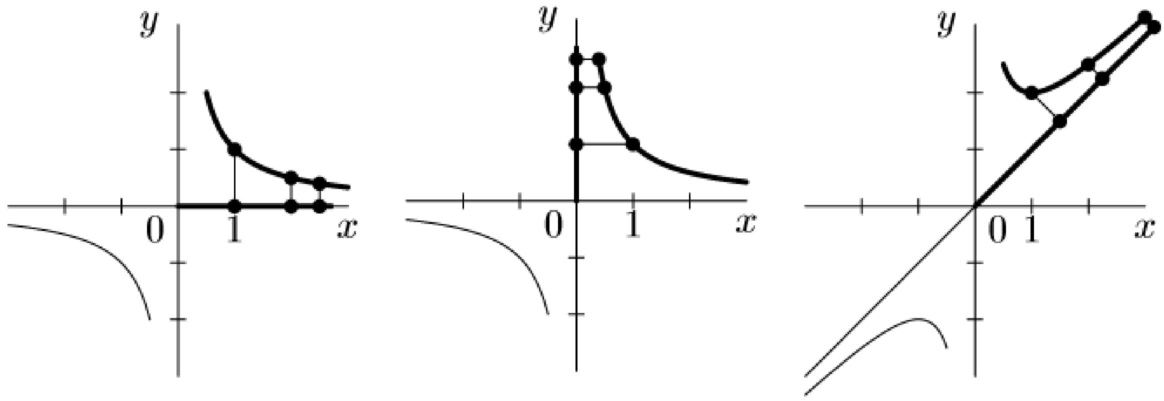
$y = \frac{1}{x}$ y = 0 –горизонтальная асимптота.($\lim\limits_{x \to \pm\infty} = 0$)

Опр. Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика ф-ции $y = f(x)$, при ($x \to +\infty, x \to -\infty$), если функцию $y = f(x)$ можно представить в виде

$f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty, x\to-\infty$.

Теорема. Для того, чтобы график ф-ции $y=f(x)$ имел при ($x\to+\infty, x\to-\infty$) наклонную асимптоту $y=kx+b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right).$$



а, горизонтальная *б*, вертикальная *в*, наклонная

Рис. 9.17. Асимптоты

Схема нахождения вертикальной асимптоты:

1)Находим область определения ф-ции.

2) Если т. x_0 является точкой разрыва ф-ции или граничной точкой области определения, то находим односторонние пределы ф-ции при $x\to x_0-0$ и $x\to x_0+0$.

3) Если хотя бы один из односторонних пределов окажется равным бесконечности, то прямая $x = x_0$ – вертикальная асимптота.

Схема нахождения наклонной (горизонтальной) асимптоты:

Ищем

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$$

Если хотя бы один из этих пределов окажется равным бесконечности или не будет существовать, то наклонных асимптот нет.

Если $k=0$, то возможно существование горизонтальной асимптоты

$y=b$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}f(x).$$

Пример. Найти асимптоты для графика ф-ции $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x}$

1) вертикальная асимптота $x=0$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2+2x-3}{x}=\frac{-3}{-0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2+2x-3}{x}=\frac{-3}{+0}=-\infty$$

2) горизонтальных асимптот нет

3)наклонная асимптота

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-kx\big)=2$$

$$y=x+2-\textit{наклонная}\cdot\textit{асимптота}$$

Схема полного исследования функции и построение ее графика

1) Найти ОДЗ и т. разрыва
2) Исследовать ф-цию на четность, нечетность и периодичность
3) Найти односторонние пределы в т. разрыва (вертикальные асимптоты) и в граничных точках области определения (горизонтальные асимптоты)
4) Найти наклонные асимптоты
5) Исследовать ф-цию на монотонность и экстремум
6) Исследовать ф-цию на выпуклость, вогнутость и перегиб
7) Найти точки пересечения с осями координат

$$y=\frac{x^2+1}{x-1}$$

1) ОДЗ: $x\neq 1$
2) ф-ция не является ни четной, ни нечетной
3) x = 1 – вертикальная асимптота

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2}{-0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2}{+0}=+\infty$$

горизонтальных асимптот нет

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=\infty$$

4) наклонные асимптоты

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{(x-1)x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-1\cdot x\right)=1$$

$$y=x+1-\textit{наклонная}\cdot\textit{асимптота}$$

5) $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}, y' = 0 \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2}$

x	$-\infty, 1-\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2},1$	1	$1,1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}, +\infty$
$f'(x)$	+	0	-	$\overline{\exists}$	-	0	+
f(x)	□	max $(2-2\sqrt{2})$	□		□	min $(2+2\sqrt{2})$	□

6) $y''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$ - точек перегиба нет