Глава I

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ТЕМА 1. **Алгебра матриц**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Понятие матрицы

Возникновение линейной алгебры связано с задачей решения системы линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестные, a_{ij} - любые действительные числа, которые называются коэффициентами при неизвестных, b_i - действительные числа, называемые свободными членами системы.

Коэффициенты при неизвестных удобно записывать в виде следующей таблицы:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m_1} & a_{m_2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов, называется матрицей размера m x n.

Следует обратить внимание на обозначение a_{ij} коэффициентов матрицы А. Индекс i показывает номер строки, в которой находится элемент a_{ij}, индекс j – номер столбца матрицы, который содержит элемент a_{ij}. Для матрицы размера m x n $i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n$. Для краткости матрицу А записывают в виде: $\text{A} = (a_{ij})$ $(i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n)$.

Заметим, что в приложениях математики используются матрицы, элементами которых могут быть, например, векторы, функции, производные функций и другие математические объекты.

1.2. Какие виды матриц существуют ?

1. Если $m \neq n$ матрица называется прямоугольной.

2. При $m = n$ матрица называется квадратной матрицей порядка n. Квадратная матрица порядка n имеет вид:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональ квадратной матрицы, идущая из левого верхнего угла в правый угол, принято называть главной диагональю.

3. При $m = 1$ матрица $\mathrm{A} = (a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n})$ называется матрицей-строкой.

4. При $n = 1$ матрица $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m_1} \end{pmatrix}$ называется матрицей-столбцом.

5. Квадратная матрица вида

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & ...\ 0 \\ . & . & . \quad . \quad . \\ 0 & 0 & ...\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется диагональной.

6. Диагональная матрица E вида

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

называется единичной.

7. Квадратная матрица, у которой элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется треугольной.

8. Матрица, все элементы которой равны нулю, называют нулевой и обозначают

$$\mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Нулевая матрица не обязательно должна быть квадратной.

1.3. Какие матрицы называются равными ?

Матрицы $\mathrm{A} = (a_{ij})$ и $\mathrm{B} = (b_{ij})$ одного и того же размера m x n называются равными, если равны их элементы с одинаковыми индексами, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$, где $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$. При этом пишут A = B.

1.4. Какое преобразование матрицы называют ее транспонированием ?

Транспонированием называется операция замены строк матрицы ее столбцами с теми же номерами. Матрицу, транспонированную по отношению к матрице A, принято обозначать A^{T}.

Пример. Пусть $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, тогда $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

1.5. Какие операции над матрицами называются линейными операциями ?

Линейными операциями называют:

1. Умножение матрицы на число.

2. Сложение матриц.

1.6. Как вводятся линейные операции над матрицами ?

Определение 1. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$ такая, что для любых i и j имеет место равенство $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$. При этом принята запись $B = \lambda A$. Определение означает, что при умножении матрицы на это число умножаются все элементы матрицы.

Определение 2. Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного и того же размера называется матрица $C = (c_{ij})$, такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. При этом принята запись $C = A + B$.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 2A - 3B$.

Решение. $C = 2A + (-3) \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -6 & -21 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 7 & 0 & -23 \\ -3 & 2 & 17 \end{pmatrix}$.

Еще раз подчеркнем, что матрицы разных размеров складывать нельзя.

1.7. Какими свойствами обладают линейные операции над матрицами ?

Пусть A, B и C матрицы одного размера, а λ и μ некоторые числа. Тогда имеют место равенства:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
4. $(\lambda \cdot \mu)A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$;
5. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu \cdot A$.

Докажите свойства 1-5 самостоятельно.

1.8. Можно ли матрицы перемножить ?

Умножать матрицу A на матрицу B можно лишь когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

1.9. Определение операции умножения матриц

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размера m x n на матрицу $B = (b_{ij})$ размера n x p называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Таким образом, элемент c_{ij} матрицы $C = A \cdot B$ равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Из определения следует, что матрица $C = A \cdot B$ будет иметь размер m x p.

Пример. Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ размера 3х2 на матрицу $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ размера 2х4.

Решение. Операция умножения A на B возможна, т.к. матрица A имеет два столбца, а у матрицы B две строки.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 0 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot3 & 1\cdot1+0\cdot1 & 1\cdot(-1)+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot(-2)\\ 2\cdot2+(-1)\cdot3 & 2\cdot1+(-1)\cdot1 & 2\cdot(-1)+(-1)\cdot0 & 2\cdot0+(-1)\cdot(-2)\\ (-2)\cdot2+1\cdot3 & (-2)\cdot1+1\cdot1 & (-2)\cdot(-1)+1\cdot0 & (-2)\cdot0+1\cdot(-2)\end{pmatrix}=$$

$=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 2\\ -1 & -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ - матрица размера 3х4.

Заметим, что в данном примере умножать матрицу B на матрицу A нельзя. Почему ?

1.10. Какими свойствами обладает операция умножения матриц ?

1. В общем случае $A\cdot B\neq B\cdot A$; (даже если обе операции допустимы).
2. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$; 3. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

Свойство 2 и свойство 3 имеют место при условии, что размерности матриц разрешают указанные операции.

Убедимся на примере в справедливости свойства 1.

Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & 7\end{pmatrix}$. Тогда

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -3\\ -3 & 29\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 3\\ 18 & 26\end{pmatrix}.$$

Очевидно, $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Если какие-нибудь матрицы A и B удовлетворяют условию $A\cdot B=B\cdot A$, то они называются перестановочными. Перестановочные матрицы существуют. Например, единичная матрица порядка n

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\ldots0 & 0\\ 0 & 1 & 0\ldots0 & 0\\ . & . & . \quad . \quad . & ..\\ 0 & 0 & 0\ldots0 & 1\end{pmatrix}$$

перестановочна с любой квадратной матрицей A того же порядка, причем

$$A\cdot E=E\cdot A=A.$$

Таким образом, единичная матрица E играет в алгебре квадратных матриц одного размера роль единичного элемента.

Заметим, что случайно матрицы могут оказаться перестановочными.

Например,

$$\begin{pmatrix}26 & 45\\ 15 & 26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -12\\ -4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -12\\ -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}26 & 45\\ 15 & 26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Убедитесь в этом самостоятельно.

2. Решение задач

2.1. Заданы матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Найти

$A+B$, $A-B$, $2A-4B$, $A-A$.

Решение. Согласно определениям операции сложения матриц и умножения матрицы на число будем иметь

1. $A+B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$.

2. $A-B=A+(-1\cdot B)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$.

3. $2A-4B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 8 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 12 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 20 \\ -26 & 6 \end{pmatrix}$.

4. $A-A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$.

O – нулевая матрица того же размера, что и матрица A.

2.2. Заданы матрицы

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Найти произведения $A\cdot B$ и $B\cdot C$.

Решение.

1. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}=$

2x$\underline{2}$ $\underline{2}$x3$=\begin{pmatrix} 2\cdot 3+(-1)\cdot 1 & 2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4) & 2\cdot 1+(-1)\cdot 2 \\ 1\cdot 3+3\cdot 1 & 1\cdot(-2)+3\cdot(-4) & 1\cdot 1+3\cdot 2 \end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & -14 & 7 \end{pmatrix}$.

2. $B\cdot C=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 4+(-2)(-1)+1\cdot 2 \\ 1\cdot 4+(-4)(-1)+2\cdot 2 \end{pmatrix}=$

2x$\underline{3}$ $\underline{3}$x1

$=\begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix}$.

2x1

2.3. Среди заданных матриц указать пары матриц, которые можно перемножать и найти их произведения

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

2x3 2x2 1x3

$$D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3x3 2x2 3x1

Решение. Сравнивая размеры матриц, приходим к выводу, что можно перемножать следующие пары матриц:

$A\cdot D$, $A\cdot F$, $B\cdot A$, $B\cdot E$, $C\cdot D$, $C\cdot F$, $D\cdot F$, $E\cdot A$, $E\cdot B$, $F\cdot C$.

Найдем указанные произведения матриц

1. $A\cdot D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix};$

2. $A\cdot F=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix};$

3. $B\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -1 & -11 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix};$

4. $B\cdot E=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=B;$

5. $C\cdot D=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -1 & 13 \end{pmatrix};$

6. $C\cdot F=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 \end{pmatrix};$

7. $D\cdot F=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix};$

8. $E\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=A;$

9. $E\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=B.$

Заметим, что $E\cdot B=BE=B$.

10. $F\cdot C=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot(2\ \ -1\ \ 3)=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ -4 & 2 & -6 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$

Сравните $C\cdot F$ и $F\cdot C$ (это интересно).

2.4. Заданы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5\\ -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Убедитесь для данных матриц в выполнении свойства

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C).$$

Решение.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 23\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)\cdot C=\begin{pmatrix}8\\ 23\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24 & 0 & -16\\ 69 & 0 & -46\end{pmatrix}$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}5\\ -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 0 & -10\\ -6 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}15 & 0 & -10\\ -6 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24 & 0 & -16\\ 69 & 0 & -46\end{pmatrix}$$

Итак, $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 0 & 3\\ -5 & 7 & 2 & 9\end{pmatrix}$. Чему равны ее элементы a_{13}, a_{24}, a_{32} ?

3.2. Заданы матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$. Найти $A+B$ и $2A-3B$.

3.3. Заданы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

и число $\lambda = 5$. Убедитесь в справедливости свойств

1) $(A+B)+C=A+(B+C)$

2) $\lambda\cdot(A+C)+C=\lambda\cdot A+\lambda\cdot C$.

3.4. Заданы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -4\\ 0 & 3\end{pmatrix},\quad C=(5\ \ -3),\ \ D=\begin{pmatrix}4\\ 7\end{pmatrix}.$$

Требуется убедиться, что $A\cdot B\neq B\cdot A$, $C\cdot D\neq D\cdot C$.

3.5. Среди заданных матриц укажите пары матриц, которые можно перемножать и найдите их произведения.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix},$$

$$D=(5\ \ 3\ \ 0),\quad E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

3.6. Заданы матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Убедитесь в справедливости свойства

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

2. Почему для данных матриц не имеет смысла проверять справедливость свойства

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)\ ?$$

ТЕМА 2. **Понятие определителя квадратной матрицы. Методы вычисления и свойства определителя**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Что называют перестановками и инверсиями во множестве чисел 1, 2, …, n ?

Определение 1. Любое множество, состоящее из n чисел $1,2,...,n$, расположенных в произвольном порядке, называют перестановкой чисел $1,2,...,n$.

Например, во множестве чисел 1, 2, 3 возможны следующие перестановки: (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3).

Перестановку из *n* чисел будем обозначать $(a_1, a_2, ... a_n)$, где каждое $\alpha_k (k = 1,2,...,n)$ является одним из чисел $1,2,...,n$ и среди α_k нет одинаковых.

Определение 2. Если в перестановке $(a_1, a_2, ... a_n)$ выбрать два числа α_i и α_j и при этом большее из них окажется расположенным в перестановке левее меньшего, тогда говорят, что числа α_i и α_j в данной перестановке образуют инверсию. Число инверсий в рассмотренных выше перестановках из чисел 1, 2, 3 равно соответственно 0, 2, 2, 1, 3, 1.

1.2. Понятие определителя квадратной матрицы порядка n

Пусть задана квадратная матрица A порядка *n*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим всевозможные произведения по n элементов матрицы А, взятых из разных строк и разных столбцов, т.е. произведения вида:

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n},$$

где индексы столбцов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ образуют некоторую перестановку из чисел $1, 2, \ldots, n$, индексы строк при этом располагаются в правильном порядке, т.е. без инверсий.

Число таких различных произведений будет равно числу различных перестановок из чисел $1, 2, \ldots, n$, т.е. равно произведению $n \cdot (n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1$, которое принято обозначать $n!$ (читается эн факториал). Обозначим число инверсий в перестановке ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$) через S. Очевидно число S будет зависеть от вида перестановки, т.е. $S = S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Определение 3. Определителем или детерминантом квадратной матрицы порядка n называется алгебраическая сумма $n!$
слагаемых вида

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n},$$

взятых со знаком плюс, если в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ четное число инверсий, и со знаком минус, если число инверсий нечетно.

Определитель принято обозначать

$$\Delta, \det A \text{ или } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ . \; . \; . & . \; . \; . \; . \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ . \; . \; . & . \; . \; . \; . \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^S a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (1)$$

где $\sum$ знак суммирования, сумма в нашем случае берется по всем различным перестановкам ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$), S – число инверсий в соответствующей перестановке.

Еще раз подчеркнем:

1. При составлении произведения $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$ берется по одному элементу из каждой строки и каждого столбца.

2. Число слагаемых определителя порядка n равно числу $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$.

3. Определитель – это число, которое ставится в соответствие только квадратной матрице.

4. Когда говорят о строках и столбцах определителя, имеют в виду строки и столбцы матрицы, которой соответствует этот определитель.

1.3. Методы вычисления определителей

1. Определители второго порядка.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Из элементов квадратной матрицы можно составить только два различных произведения $a_{11} a_{22}$ и $a_{12} a_{21}$. В первом произведении перестановка (1, 2) инверсий не имеет ($S = 0$), во втором у перестановки (2, 1) одна инверсия ($S = 1$). На основании определения 3 будем иметь

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Таким образом, чтобы вычислить определитель второго порядка достаточно от произведений элементов, стоящих на главной диагонали отнять произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Например, $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 11 \end{vmatrix}$ = 22 – (-30) = 52.

2. Определители третьего порядка.

Пусть $\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Составим для данной матрицы всевозможные произведения вида $a_{1\alpha_1}\,a_{2\alpha_2}\,a_{3\alpha_3}$, беря из каждой строки и каждого столбца только по одному элементу. Получим 3! = 6 различных произведений:

$a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$, $a_{12}\,a_{23}\,a_{31}$, $a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$

$a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$, $a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$, $a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$

Перестановка (1,2,3) инверсий не имеет, у перестановок (2,3,1) и (3,1,2) – четное число инверсий, перестановки (3,2,1), (2,1,3) и (1,3,2) имеют нечетное число инверсий. Следовательно, первые три произведения войдут в сумму со знаком плюс, а три последних со знаком минус.

Таким образом, по формуле (1)

$$\det \text{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} -$$

$$- a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}\,.$$

Полученной формулой легко пользоваться, если записывать слагаемые по так называемому правилу «треугольников»: первое слагаемое равно произведению элементов, стоящих на главной диагонали, а два следующих равны произведениям элементов, стоящих в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Четвертое слагаемое есть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали, а два последних равны произведениям элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали. Три последних произведения берутся с противоположными знаками. Схематично правило выглядит так

Например, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = -4 + 4 + 3 – 24 – 1 + 2 = -20.

Существует также правило Сарруси для вычисления определителей $3^{\underline{\text{го}}}$ порядка. Пусть дан определитель $3^{\underline{\text{го}}}$ порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Запишем таблицу чисел, в которой первые три строки совпадают со строками определителя, а 4 и 5[я] строки, с первой и второй строками определителя

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Параллельно диагоналями соединим прямыми линиями по три элемента (см. схему).

Произведения элементов, лежащих на линиях, наклоненных вниз (параллельно главной диагонали) возьмем со знаком - +, вверх – со знаком -. Сумма этих произведений со своими знаками и будет определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}\,.$$

3. Вычисление определителей методом разложения по элементам строки или столбца.

Вычисление определителя, пользуясь его определением, довольно затруднительно. Получим, исходя из определения определителя, на примере определителя третьего порядка универсальный довольно простой метод вычисления определителя любого порядка.

Запишем вычислительную формулу для определителя третьего порядка, сгруппировав слагаемые, содержащие элементы правой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}) +$$

$$+ (a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}) + (a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}) =$$

$$= a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{12}(a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}) + a_{13}(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \mathrm{M}_{11}\,, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \mathrm{M}_{12}\,, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \mathrm{M}_{13}\,.$$

Определение. Числа M_{11}, M_{12}, M_{13} называются минорами второго порядка, соответствующими элементам a_{11}, a_{12}, a_{13}.

С использованием миноров вычислительная формула для определителя третьего порядка примет вид:

$$\det \mathrm{A} = a_{11}\mathrm{M}_{11} - a_{12}\mathrm{M}_{12} + a_{13}\mathrm{M}_{13} = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}\,a_{1j}\mathrm{M}_{1j} \qquad (2)$$

Полученная формула называется формулой разложения определителя по элементам первой строки.

Легко заметить, что M_{1j} - детерминант второго порядка матрицы, полученной из матрицы A путем вычеркивания первой строки и j-го столбца.

Путем преобразований, аналогичных тем, которые были проделаны для получения формулы (1), можно получить формулы вычисления определителя путем его разложения по элементам второй или третьей строки, а также путем разложения по элементам любого столбца. Например, формула разложения по элементам второго столбца будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12}\mathrm{M}_{12} + a_{22}\mathrm{M}_{22} - a_{32}\mathrm{M}_{32} = \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+2} a_{i2}\mathrm{M}_{i2} \quad (3)$$

Пример. Задана матрица

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислить det A, используя формулы (2) и (3).

Решение. По формуле (2) будем иметь:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-3) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = = 2 \cdot 9 - 15 - 3 \cdot 6 = -15.$$

Используя формулу (3), получим:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 15 + 2 \cdot 5 - 10 = -15.$

Естественно, результат вычислений оказался одним и тем же.

По аналогии можно дать определение минора M_{ij}, соответствующего элементу a_{ij} матрицы A порядка n.

Определение. Минором M_{ij}, соответствующим элементу a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка, соответствующий матрице, которая получается вычеркиванием из матрицы A i-ой строки и j-го столбца.

Методом разложения по элементам строки или столбца через миноры третьего порядка можно вычислить определитель четвертого порядка, через миноры четвертого порядка вычисляются определители пятого порядка и т.д.

Приведем (без вывода) формулы для вычисления определителя n-го порядка методом разложения по элементам строки или столбца

$$\det \mathrm{A} = a_{11}\mathrm{M}_{11} - a_{12}\mathrm{M}_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n}\mathrm{M}_{1n} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} a_{1j}\mathrm{M}_{1j} \quad (4)$$

$$\det \mathrm{A} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{\mathrm{k}+j} a_{\mathrm{k}j}\mathrm{M}_{\mathrm{k}j}, \ k - \text{фиксировано}, \ 1 \le k \le n \qquad (5)$$

$$\det \mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k} a_{ik}\mathrm{M}_{ik}, \ k - \text{фиксировано}, \ 1 \le k \le n \qquad (6)$$

(4) – формула вычисления определителя n-го порядка путем разложения по элементам первой строки;

(5) – формула разложения определителя по элементам k-ой

строки;
(6) – формула разложения по элементам k-го столбца.

Пример. Задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти det A.

Решение. Так как среди элементов второго столбца два нуля, имеет смысл вычислять определитель разложением по элементам второго столбца.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^6 \cdot (-5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$= 2\,(2 + 3 - 24 + 1) - 5\,(4 + 4 + 2 + 1) = -91.$

Миноры третьего порядка вычислены методом треугольников.

Во многих случаях вычисление определителей упрощается с использованием свойств определителя, к рассмотрению которых мы переходим.

1.4. Свойства определителей

Свойства будут сформулированы для определителей любого порядка, но доказательство свойств и их иллюстрацию для простоты изложения и наилучшего усвоения проведем для определителей третьего порядка.

Свойство 1. Если все элементы некоторой строки или столбца определителя равны нулю, то такой определитель равен 0.

Справедливость утверждения следует из определения определителя.

Свойство 2. det A = det A^T, где A^T – транспонированная по отношению к A матрица.

Доказательство. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

тогда $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Запишем det A и det A^T, исходя из определения определителя:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} -$$

$$- a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$\det A^T = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} -$$

$$- a_{11}a_{32}a_{23}$$

Сравнивая результаты вычислений, заключаем: det A = det A^T.

Смысл свойства 2 заключается в том, что строки и столбцы определителя равноправны.

Свойство 3. При перестановке двух строк или двух столбцов определитель меняет лишь знак.

Свойство 3 рекомендуется доказать самостоятельно.

Свойство 4. Определитель, имеющий две одинаковые строки или два одинаковых столбца равен нулю.

Доказательство. Переставив две одинаковые строки, с одной стороны, мы ничего не изменим, но с другой стороны по свойству 3 будем det A = - det A $\Rightarrow$ det A = 0.

Свойство 5 (линейное свойство). Если все элементы i-ой строки определителя представлены в виде $a_{ij} = \lambda\, b_{ij} + \mu\, c_{ij}$, где
i - фиксировано, $\mathrm{j} = 1,2,\ldots,n$, тогда

$$\det \mathrm{A} = \lambda \det \mathrm{A}(b_{ij}) + \mu \det \mathrm{A}(c_{ij}),$$

где $\mathrm{A}(b_{ij})$ - матрица, полученная из A заменой элементов i-ой строки числами b_{ij}, а $\mathrm{A}(c_{ij})$ - матрица, полученная из A заменой элементов i-ой строки числами c_{ij}.

Доказательство. Пусть, например, элементы первой строки имеют вид:
$a_{ij} = \lambda\, b_{1j} + \mu\, c_{1j}$, а матрица

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda\, b_{11} + \mu\, c_{11} & \lambda\, b_{12} + \mu\, c_{12} & \lambda\, b_{13} + \mu\, c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислим det A методом разложения по элементам первой строки:

$$\det \mathrm{A} = (\lambda\, b_{11} + \mu\, c_{11})\mathrm{M}_{11} - (\lambda\, b_{12} + \mu\, c_{12})\mathrm{M}_{12} + (\lambda\, b_{13} + \mu\, c_{13})\mathrm{M}_{13} =$$

$$(\lambda\, b_{11}\mathrm{M}_{11} - \lambda\, b_{12}\mathrm{M}_{12} + \lambda\, b_{13}\mathrm{M}_{13}) + (\mu\, c_{11}\mathrm{M}_{11} - \mu\, c_{12}\mathrm{M}_{12} - \mu\, c_{13}\mathrm{M}_{13}) =$$

$$= \lambda \det \mathrm{A}(b_{1j}) + \mu \det \mathrm{A}(c_{1j}).$$

Свойство доказано. Аналогичное свойство имеет место для столбцов определителя.

Свойство 6. Общий множитель элементов строки или столбца можно выносить за знак определителя.

Справедливость свойства следует из линейного свойства при $\mu = 0$.

Свойство 7. Определитель, содержащий две строки или два столбца, соответствующие элементы которых пропорциональны, равен 0.

Доказательство. Пусть матрица A имеет вид

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда по свойству 6

$$\det \mathrm{A} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

По свойству 4 det A = 0.

Свойство 8. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число. Аналогичное свойство имеет место и для столбцов определителя.

Доказательство. Вновь полученный определитель по свойству 5 можно представить в виде суммы двух определителей, первый из которых будет исходным, а второй будет равен нулю, так как две его строки будут пропорциональными (свойство 7).

Свойство 9. Если элементы некоторой строки или столбца представляют собой линейную комбинацию других строк или столбцов, то такой определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть, например, третий столбец определителя является линейной комбинацией двух первых, т.е. определитель имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{11} + \mu a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{21} + \mu a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{31} + \mu a_{32} \end{vmatrix}.$$

На основании линейного свойства можно перейти к двум определителям:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mu a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \mu a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \mu a_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Оба слагаемых равны нулю, так как содержат столбцы с пропорциональными членами.

2. Решение задач

2.1. Задана матрица $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$. Найти $\det \mathrm{A}$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

Решение. $\det \mathrm{A} = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -\cos 2\alpha$. При $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

$\det \mathrm{A} = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$.

2.2. Задана матрица $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 15 \\ -9 & 2 & 5 \\ 9 & 0 & 45 \end{pmatrix}$. Вычислить det A:

1) методом треугольников;
2) методом разложения по элементам строки или столбца.

Решение.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 15 \\ -9 & 2 & 5 \\ 9 & 0 & 45 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 45 + 1 \cdot 5 \cdot 9 - 15 \cdot 2 \cdot 9 + 9 \cdot 45 =$

$= 45\,(6 + 1 - 6 + 9) = 450.$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 15 \\ -9 & 2 & 5 \\ 9 & 0 & 45 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -9 & 5 \\ 9 & 45 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 9 & 45 \end{vmatrix} = -\,(-9 \cdot 45 - 45) +$

$+ 2\,(3 \cdot 45 - 9 \cdot 15) = 45 \cdot 10 + 2\,(135 - 135) = 450.$

Заметим, что вычисления были ли бы проще, если бы мы воспользовались свойством определителя, позволяющим выносить общий множитель строки или столбца за знак определителя. Первый и третий столбцы определителя такие множители имеют, этим следует воспользоваться:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 15 \\ -9 & 2 & 5 \\ 9 & 0 & 45 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 45 \cdot (6 + 1 - 6 + 9) = 450.$

2.3. Вычислить $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель методом разложения по элементам второй строки, которая содержит два нуля:

$$\det A = (-1)^2 \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= -4 \cdot (18 - 20 - 10 - 3) + (-1 - 12 + 6 - 1) = 60 - 8 = 52.$

2.4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. Среди элементов определителя нет нулей, поэтому его вычисление сводится к вычислению четырех определителей третьего порядка. Попытаемся облегчить вычисления, используя свойства определителя. С этой целью постараемся получить три нуля в первой строке.

Воспользуемся свойством 8. Элементы первого столбца умножим на (-2) и прибавим ко второму столбцу, умножим на (-3) и прибавим к третьему столбцу, умножим на (-4) и прибавим к четвертому столбцу, элементы первого столбца при этом остаются без изменения. В результате будем иметь:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & -2 & -8 & -10 \\ 4 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 13 \end{vmatrix}.$$

Аналогичными преобразованиями получим два нуля в первой строке полученного определителя. В результате будем иметь:

$$-4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 13 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 7 & -2 & -36 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-40) = 160.$$

2.5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 127 & 1 & 2 & 3 \\ 154 & 2 & 3 & 4 \\ 181 & 3 & 4 & 5 \\ 208 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 100+27 & 1 & 2 & 3 \\ 100+54 & 2 & 3 & 4 \\ 100+81 & 3 & 4 & 5 \\ 100+108 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 1 & 2 & 3 \\ 100 & 2 & 3 & 4 \\ 100 & 3 & 4 & 5 \\ 100 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} +$

$$+\begin{vmatrix} 27 & 1 & 2 & 3 \\ 54 & 2 & 3 & 4 \\ 81 & 3 & 4 & 5 \\ 108 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + 27\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 100\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Воспользовались свойствами 5, 6, 4, 8.

2.6. Вычислить определитель n-го порядка треугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ 0 & a_{22} \ldots \ldots a_{2n} \\ 0 \quad 0 & a_{33} \ldots a_{3n} \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ 0 \quad 0 & 0 \ldots \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим $\det A$ путем разложения по элементам последней строки:

$$\det A = (-1)^{n+n} a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots \ a_{1\,n-1} \\ 0 & a_{22} \ldots \ a_{2n-1} \\ 0 \quad 0 & a_{33} \ldots a_{3n-1} \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ 0 \quad 0 & 0 \ldots a_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель можно снова разложить по последней строке и т.д. Окончательно получим:

$$\det A = a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{nn}\,.$$

2.7. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 5 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 5 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 5 \end{vmatrix},$$

предварительно преобразовав его в треугольный определитель.

Решение. Прибавим сумму последних четырех столбцов к первому столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 33 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 33 & 5 & 7 & 7 & 7 \\ 33 & 7 & 5 & 7 & 7 \\ 33 & 7 & 7 & 5 & 7 \\ 33 & 7 & 7 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 33 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Определитель получен вычитанием первой строки предыдущего определителя из остальных строк.

Получили определитель треугольного вида. Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, получим:

$$\Delta = 33 \cdot 16 = 528.$$

2.8. Объяснить, почему $\begin{vmatrix} 13 & 15 & 17 \\ 29 & 31 & 33 \\ 101 & 119 & 137 \end{vmatrix} = 0$.

Определитель равен нулю по свойству 9 (третья строка определителя является линейной комбинацией первой и второй: $101 = 13 \cdot 10 - 29$, $119 = 15 \cdot 10 - 31$, $137 = 17 \cdot 10 - 33$).

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Вычислить определители второго порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \sin^2\alpha \\ -1 & \cos^2\alpha \end{vmatrix}.$$

3.2. Заданы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Требуется убедиться, что
$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

3.3. Заданы матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Детерминант каждой матрицы вычислить двумя способами (методом треугольников и путем разложения по элементам строки или столбца).

Ответ. $\det A_1 = 36$, $\det A_2 = 30$.

3.4. Заданы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется убедиться, что $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

3.5. Вычислить определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & -1 \\ 8 & -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 11 & 2 & -3 \\ 7 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} \; \text{и} \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = +3080$, $\Delta_3 = 5! = 120$.

В заданиях 3.6, 3.7 и 3.8 рекомендуется вычислить определители путем предварительного получения нулей в его строках или столбцах.

3.6. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 2 & 9 & -15 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ Ответ. $\Delta = 4$.

3.7. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 9 \end{vmatrix}$ Ответ. $\Delta = 70$.

3.8. $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & -3 & 6 \end{vmatrix}$ Ответ. Δ = -24.

3.9. На основании каких свойств определители заданных матриц равны 0 ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -14 \\ -1 & 11 & 7 \\ 5 & 17 & -35 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 15 & -45 & 60 \\ 7 & 11 & 32 \\ -17 & 51 & -68 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & -2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & -1 \\ 2 & -8 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.10. Вычислить определители заданных матриц, используя свойства определителя

$$A = \begin{pmatrix} a+b & c & 4 \\ b+c & a & 4 \\ c+a & b & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} x^2+a^2 & ax & 1 \\ y^2+a^2 & ay & 1 \\ z^2+a^2 & az & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 27 & 14 & x & 1 \\ 26 & 12 & y & 1 \\ 25 & 10 & z & 1 \\ 24 & 8 & t & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 1 & 5 & 1 \dots & 1 \\ 1 & 1 & 5 \dots & 1 \\ . & . & . \quad . & . \\ 1 & 1 & 1 \dots & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответы. det A = 0, det B = $a\,(x-y)\,(y-z)\,(x-z)$,

det C = 0; det D = $4^{n-1}(4+n)$.

Указание. Матрица D имеет порядок n.

ТЕМА 3. **Понятие обратной матрицы. Матричный метод и метод Крамера решения системы n линейных уравнений с n неизвестными**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Что называют алгебраическими дополнениями элементов матрицы ?

Определение. Числа $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называются алгебраическими дополнениями элементов a_{ij} матрицы А.

1.2. Как записывается вычислительная формула det A через алгебраические дополнения ?

Ранее была получена формула (5) пункта 1.3 (Тема 2) вычисления определителя разложением по элементам i-ой строки:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}\,, \qquad i \text{ – фиксировано.}$$

Так как, $(-1)^{i+j} M_{ij} = A_{ij}$, то

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + A_{in}A_{in}\,.$$

1.3. Чему будет равна сумма произведений элементов строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки ?

Такая сумма будет равна нулю. Это почти очевидное утверждение рекомендуется доказать самостоятельно.

1.4.Какая матрица называется обратной по отношению к матрице А ?

Определение. Пусть А – квадратная матрица. Матрица, обозначаемая A^{-1}, называется обратной для матрицы А, если выполняется условие

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E\,,$$

где Е – единичная матрица.

Заметим, что взаимно обратные числа обладают по сути понятия таким же свойством $\left(\frac{1}{5} \cdot 5 = 1\right)$.

1.5. При каком условии матрица А имеет обратную матрицу ?

Если у матрицы А существует обратная матрица, то

$A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det E \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$ Таким образом, если матрица А имеет обратную матрицу, тогда $\det A \neq 0$. Такая матрица называется невырожденной. Можно доказать и обратное утверждение: если $\det A \neq 0$, у матрицы А есть обратная матрица A^{-1}.

Заметим, что и обратные числа существуют только у чисел, отличных от 0.

1.6. Как найти обратную матрицу ?

Теорема. Всякая невырожденная матрица А имеет единственную обратную матрицу A^{-1}, которая находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots A_{n2} \\ \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}\,.$$

Матрица $\widetilde{A}$ в формуле называется союзной или присоединенной для матрицы А. Матрица $\widetilde{A}$ составлена из алгебраических дополнений A_{ij} матрицы А и затем транспонирована.

Покажем справедливость формулы

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$$

на примере определителя третьего порядка. Покажем, что

$A \cdot A^{-1} = E$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{33} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{33} & \\ 0 & 0 & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

При доказательстве воспользовались п. 1.2 и п. 1.3 темы 3.

Доказательство единственности опустим.

Пример. Найти обратную матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. $\det A = 4 + 6 + 1 + 2 - 3 + 4 = 14$

$\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ существует. Перейдем к нахождению A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4;\ A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;\ A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8;\ A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5;\ A_{33}(-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -5 \\ -8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -5 \\ -8 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

1.7. Матричный метод решения системы n линейных уравнений с n неизвестными

Пусть требуется решить систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_nx_1 + a_{n2}x_2 + \ ... + a_{nn}x_n = b_x \end{cases} \qquad (1)$$

Определение. Решением системы (1) называется совокупность чисел $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, если она обращает каждое уравнение системы (1) в тождество.

Введем матрицы:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} ... \, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} ... a_{2n} \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} & a_{n2} ... a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \text{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad \text{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X, следовательно эти матрицы можно перемножать. По правилу умножения матриц будем иметь:

$$\text{A} \cdot \text{X} = \text{B} \qquad (2)$$

Полученное матричное уравнение (2) равносильно системе (1).
Таким образом решение системы (1) сводится к решению матричного уравнения (2).

Если $\det \text{A} \neq 0$, существует A^{-1}. Умножим обе части матричного уравнения (2) слева на матрицу A^{-1} и воспользуемся свойствами операции умножения матриц:

$$\text{A}^{-1} \cdot (\text{A} \cdot \text{X}) = \text{A}^{-1} \cdot \text{B} \Leftrightarrow (\text{A}^{-1} \cdot \text{A}) \cdot \text{X} = \text{A}^{-1} \cdot \text{B} \Leftrightarrow \text{EX} = \text{A}^{-1}\text{B}$$

Так как $\text{E} \cdot \text{X} = \text{X}$, окончательно будем иметь

$$\text{X} = \text{A}^{-1} \cdot \text{B} \qquad (3)$$

Таким образом, если $\det \text{A} \neq 0$, уравнение (2), а, значит и система (1) имеет единственное решение, которое находится по формуле (3). Решение единственное в силу единственности матрицы A^{-1}.

Пример. Решить матричным методом систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ \ x_1 \qquad\ + x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение. Для данной системы

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad \text{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5. \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\det \text{A} = -2 + 1 - 1 - 2 = -4 \Rightarrow \text{A}^{-1}$ существует

$$\text{A}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \text{A}_{11} & \text{A}_{21} & \text{A}_{31} \\ \text{A}_{12} & \text{A}_{22} & \text{A}_{32} \\ \text{A}_{13} & \text{A}_{23} & \text{A}_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

По формуле (3):

$$\text{X} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $x_1 = 3$, $x_2 = 2$; $x_3 = 1$.

1.8. Решение системы (1) методом Крамера

Изложим метод Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}; \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2. \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2. \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\det A \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение, которое можно найти по формуле (3):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2. \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Окончательно будем иметь:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \qquad (4)$$

Полученные формулы называются формулами Крамера.

Таким образом, если $\Delta \neq 0$ система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, в котором $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где определитель Δ_i получается заменой в определителе Δ i-го столбца столбцом свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -4 \\ 3x_1 \qquad + 6x_3 = -3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 45 - 48 - 18 + 24 = 3$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение, которое найдем по формулам (4).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 5 \\ -3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Ответ. $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1$; $\quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 0$, $\quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -1$.

2. Решение задач

2.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 46x - 21y = 88 \\ 23x + 7y = 9 \end{cases}$$

матричным методом и методом Крамера.

Решение. Матричный метод:

$\det A = \begin{vmatrix} 46 & -21 \\ 23 & 7 \end{vmatrix} = 23 \cdot 7 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 805 \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{805}\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ -23 & 46 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 88 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{805}\begin{pmatrix} 805 \\ -1610 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $x = 1$, $y = -2$.

Метод Крамера

$\Delta = \begin{vmatrix} 46 & -21 \\ 23 & 7 \end{vmatrix} = 805$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 88 & -21 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = 805$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 88 & 46 \\ 9 & 23 \end{vmatrix} = -1610$.

$x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1$; $\quad y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -\dfrac{1610}{805} = -2$.

Ответ. $x = 1$, $y = -2$.

2.2. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x + 6y + z = 16 \\ x + 3y + 2z = 8 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

Решение. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение.

Найдем $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$; $\quad A_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9$;

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $x = -1$, $y = 3$, $z = 0$.

2.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - \ x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + \ x_4 = 0 \end{cases}$$

методом Крамера.

Решение. $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Чтобы упростить вычисления, получим нули в первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(-16+6) = -20 .$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -20 ;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot 10 = -40 ;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\begin{vmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -12 \cdot (-1+6) = -60 .$$

Ответ. $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 2$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 0$; $x_4 = \dfrac{\Delta_4}{\Delta} = 3$.

2.4. Найти матрицу X из уравнения

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$X \cdot B = C.$$

$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -27 \neq 0 \Rightarrow$ существует B^{-1}.

Умножим обе части матричного уравнения справа на матрицу B^{-1}:

$(X \cdot B) \cdot B^{-1} = C \cdot B^{-1} \Rightarrow X \cdot (B \cdot B^{-1}) = C \cdot B^{-1} \Rightarrow X \cdot E = C \cdot B^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = C \cdot B^{-1}$.

Найдем

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$X = C \cdot B^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -18 & -9 & -9 \\ -27 & 0 & -9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем уравнение в виде:

$A \cdot X \cdot B = C$, $\det A = 6$, $\det B = 7 \Rightarrow$ матрицы A и B имеют обратные матрицы. Умножим матричное уравнение слева на A^{-1}:

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C \Rightarrow X \cdot B = A^{-1} \cdot C$

Умножим обе части полученного уравнения справа на матрицу B^{-1}:

$X \cdot (B \cdot B^{-1}) = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Найдем A^{-1} и B^{-1}:

$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\qquad B^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Тогда:

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $X = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2.6. Решить уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$, матрица $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ не имеет обратной, поэтому метод решения, используемый в двух предыдущих примерах, неприменим. Для элементов матрицы X введем обозначения и воспользуемся определением равных матриц. Пусть $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+6b & a+3b \\ 2c+6d & c+3d \end{pmatrix}.$$

По условию задачи

$$\begin{pmatrix} 2a+6b & a+3b \\ 2c+6d & c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как у равных матриц равны соответствующие элементы, воспользовавшись этим, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2a+6b=12 \\ 2c+6d=2 \\ a+3b=6 \\ c+3d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=6 \\ c+3d=1; \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 6-3b; \\ c = 1-3d, \end{matrix}$$

где b и d могут принимать любые значения.

Ответ. $X = \begin{pmatrix} 6-3b & b \\ 1-3d & d \end{pmatrix}$.

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Убедиться, что данные матрицы невырожденные. Найти их обратные матрицы и сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.2. Решить матричные уравнения 1-3:

1. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. Ответ. $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ответ. $X = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9 & 22 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ответ. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3.3. Каждую из систем 1-4 решить матричным способом и способом Крамера

1) $\begin{cases} 7x+5y=-3 \\ 9x-4y=17 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x-2y+4=0 \\ 8x+5y-41=0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x_1+7x_2+3x_3=10 \\ -4x_1+9x_2+4x_3=-8 \\ 3x_2+2x_3=4 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 5x+4y+2z+19=0 \\ x+2y+4z+9=0 \\ 3x+5z+19=0 \end{cases}$

3.4. Убедиться, что система имеет единственное решение и найти x_1 и x_4 этого решения

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = 1$, $x_4 = 0$.

3.5. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_3 + 5x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = 1$.

Использование матричного метода и метода Крамера решения системы n уравнений с n неизвестными возможно при условии, что определитель из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля ($\det A \neq 0$). Естественно возникают следующие вопросы:

1. Может ли иметь решение система n уравнений с n неизвестными когда $\det A = 0$, и если может, как это решение найти ?

2. При каком условии будет иметь решение произвольная система линейных уравнений (число уравнений не обязательно совпадает с числом неизвестных), и как найти это решение ?

Оба поставленных вопроса решаются с помощью понятия ранга матрицы, к рассмотрению которого мы приступим в следующей теме.

ТЕМА 4.**Понятие *n*-мерного арифметического пространства. Понятие ранга матрицы. Решение произвольных систем линейных уравнений**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Понятие n-мерного вектора

Упорядоченный набор из n действительных чисел называют n-мерным вектором.

Такие векторы принято записывать либо в виде матрицы строки $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, либо в виде матрицы-столбца $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Вектор O (0, 0,…, 0) называют нулевым вектором.

1.2. Как вводятся линейные операции над n-мерными векторами ?

Операции умножения вектора на число и сумма векторов вводятся так же, как и над матрицами, т.е. если $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, то

$$\boldsymbol{c} = \mathbf{a} + \boldsymbol{b} = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n) \qquad (1)$$

$$\lambda\, \mathbf{a} = (\lambda\, \alpha_1, \lambda\, \alpha_2, ..., \lambda\, \alpha_n) \qquad (2)$$

Аналогично вводятся операции над вектор - столбцами.

1.3. Что принято называть n-мерным арифметическим пространством ?

Множество всех векторов $(a_1, a_2, ..., a_n)$, для которых введены операции сложения и умножения на число по формулам (1) и (2) называется n-мерным арифметическим пространством и обозначается R_n.

1.4. Что называют линейной комбинацией векторов ?

Вектор $\boldsymbol{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + ... + \lambda_n \mathbf{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Пример. В R_n заданы векторы $\mathbf{a}_1 = (2, -1, 3, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 1, 2, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (4, 2, -3, 1)$. Найти линейную комбинацию
$\boldsymbol{b} = 2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

Решение. По правилу умножения вектора на число
$2\mathbf{a}_1 = (4, -2, 6, 0)$, $-3\mathbf{a}_2 = (3, -3, -6, 3)$. По правилу сложения векторов получим
$\boldsymbol{b} = 2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = (4+3+4, -2-3+2, 6-6-3, 0+3+1) =$
$= (11, -3, -3, 4)$.

1.5. В каком случае система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ называется линейно зависимой ? Какая система векторов линейно независима ?

Система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ называется линейно зависимой, если существует набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такой, что имеет место равенство

$$\lambda\, \mathbf{a}_1 + \lambda\, \mathbf{a}_2 + ... + \lambda\, \mathbf{a}_n = 0, \qquad (3)$$

где 0 = (0, 0, …, 0) – нулевой вектор из R_n.

Если же линейная комбинация векторов равна нулевому вектору только, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, система называется линейно независимой.

1.6. В чем заключается необходимое и достаточное условие линейной зависимости системы векторов ?

Теорема. Для того, чтобы система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один вектор этой системы был линейной комбинацией остальных векторов системы.

Доказательство. Пусть система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ линейно зависима. Это означает, что имеет место соотношение (3)

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + ... + \lambda_n \mathbf{a}_n = 0,$$

где хотя бы одно λ_i отлично от нуля. Пусть, например, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{a}_3 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathbf{a}_n,$$

т.е. вектор $\mathbf{a}_1$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, ..., \mathbf{a}_n$.

Пусть, наоборот, $\mathbf{a}_1$- линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, ..., \mathbf{a}_n$, т.е. $\mathbf{a}_1 = \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + ... + \lambda_n \mathbf{a}_n \Rightarrow (-1)\mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + ... + \lambda_n \mathbf{a}_n = 0$ Так как среди коэффициентов этой линейной комбинации есть отличные от нуля, ($\lambda_1 \neq -1$) это означает, что система линейно зависима.

1.7. Объяснить, почему система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима

Система векторов $0, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, ..., \mathbf{a}_n$ линейно зависима, т.к.

$\lambda_1 0 + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + 0 \cdot \mathbf{a}_3 + ... + 0 \cdot \mathbf{a}_n = 0$ при $\lambda_1 \neq 0$.

В общем случае вопрос о линейной зависимости системы векторов решается с помощью понятия ранга матрицы.

1.8. Определение минора произвольной матрицы

Пусть задана матрица размера m x n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ . \; . & . \; . \; . \; . \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Строки этой матрицы являются векторами из R_n, столбцы – из R_m. Выделим из этой матрицы любые k строк и любые k столбцов (очевидно, $k \leq m$ и $k \leq n$).

Определитель матрицы, составленной из элементов, оказавшихся на пересечении выбранных строк и столбцов, называется минором *k*-го порядка матрицы A.

Например, для матрицы A при $k = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ – минор третьего порядка.

1.9. Что называется рангом матрицы ?

Определение. Наивысший из порядков отличных от нуля миноров матрицы A называют рангом этой матрицы.

Приняты обозначения ranq A = r или r (A)= r.

Из определения следует:

1) если ranq A = r, то среди миноров матрицы A имеется хотя бы один минор порядка r, отличный от нуля;

2) все миноры порядка $(r + 1)$ и выше (если они существуют) равны нулю.

1.10.Какой минор называется базисным ?

Если $\operatorname{ranq} A = r$, то любой минор порядка r, отличный от нуля, называется базисным минором, а строки и столбцы, его составляющие, называются базисными.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -9 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -21 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Все миноры третьего порядка данной матрицы равны нулю (убедитесь в этом самостоятельно), но есть миноры второго порядка, отличные от нуля:

$$\begin{vmatrix} -1 & -9 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \; -$$

– все эти миноры базисные, а $\operatorname{ranq} A = 2$.

1.11 . Какой особенностью обладают базисные строки (столбцы) ?

Теорема (о базисном миноре)**.** Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы, а любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Докажем линейную независимость базисных строк. Предположим противное, т.е. что базисные строки линейно зависимы. Тогда на основании теоремы п. 1.6 хотя бы одна строка среди базисных строк является линейной комбинацией остальных базисных строк. Но тогда по свойству 9 определителя базисный минор будет равен нулю, что противоречит определению базисного минора.

Доказательство второй части теоремы опустим.

Например, если вернуться к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -9 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -21 & 7 \end{pmatrix},$$

ранг которой, как мы установили, равен двум, а базисными строками являются первые две строки, то если ввести векторы $\mathbf{a}_1 = (2;-1;-9;-3)$, $\mathbf{a}_2 = (4;-2;3;-1)$, $\mathbf{a}_3 = (0;0;-21;7)$, то, очевидно $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимы ($\mathbf{a}_1 \neq \lambda\, \mathbf{a}_2$), а вектор $\mathbf{a}_3$ является их линейной комбинацией:

$$\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 .$$

1.12. Какие следствия имеет теорема о базисном миноре ?

1. Если $\operatorname{ranq} A$ меньше числа строк матрицы, то строки матрицы линейно зависимы. Если же число r равно числу строк матрицы, то строки матрицы линейно независимы (аналогичное утверждение имеет место для столбцов).

2. Ранг матрицы равен наибольшему числу линейно независимых строк (столбцов) этой матрицы.

3. Максимальное число линейно независимых строк матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых столбцов.

4. Определитель квадратной матрицы A равен нулю тогда и только тогда, когда строки (столбцы) матрицы линейно зависимы.

1.13. Какие преобразования матрицы не изменяют ее ранга ?

Из свойств определителя и определения ранга следует, что ранг матрицы не изменится в следующих случаях:

1) при транспонировании матрицы;
2) если строки (столбцы) поменять местами;
3) при умножении элементов строки (столбца) на одно и то же число, отличное от 0;
4) при прибавлении к элементам некоторой строки (столбца) элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число.

Очевидно, ранг матрицы не изменится, если в ней отбросить строки (столбцы), все элементы которых равен нулю, и строки (столбцы), являющиеся линейной комбинацией других строк (столбцов).

1.14. Какие существуют приемы нахождения ранга матрицы ?

1. Метод окаймляющих миноров.

Метод заключаются в следующем. Непосредственным вычислением находят минор k-го порядка, отличный от 0. Далее вычисляют миноры (k + 1)-го порядка, окаймляющие этот минор (т.е. содержащие минор k-го порядка внутри себя). Если все окаймляющие миноры (k + 1)-го порядка окажутся равными нулю, то, очевидно, тогда и все миноры более высоких порядков будут равны 0, и это будет означать, что $\operatorname{ranq} A = k$. Если же среди окаймляющих миноров (k + 1) найдется отличный от нуля минор, процедуру окаймления повторяют.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 6 & 1 \\ 6 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ -9 & 3 & 8 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

методом окаймляющих миноров.

Решение. Так как матрица A имеет размер 3x5, $r\,(A) \le 3$. Минор $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \ne 0$, следовательно его можно окаймлять. Для этого минора матрица содержит три окаймляющих минора. Вычислим их:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 5 \\ -9 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$, т.к. соответствующие элементы первых двух столбцов пропорциональны.

2) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 14 \end{vmatrix} = -124 \ne 0 \Rightarrow r\,(A) = 3$.

Ответ. $\operatorname{ranq} A = 3$.

2. Метод элементарных преобразований.

С помощью преобразований, которые не изменяют ранга матрицы, матрицу приводят либо к треугольному виду, и в этом случае ранг будет равен числу отличных от нуля элементов матрицы, стоящих на диагонали, либо упрощают вычисление ранга путем получения нулевых строк (столбцов) или строк (столбцов), которые являются комбинациями других строк (столбцов), которые затем отбрасывают.

Пример. Указать ранг матрицы A, имеющей треугольный вид:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$r\,(A) = 3$, $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix} \neq 0$ - базисный минор.

Пример 2. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 31 & 17 & 43\\ 3 & 94 & 53 & 132\\ 3 & 94 & 54 & 133\\ 1 & 32 & 20 & 48\end{pmatrix}.$$

Решение. Чтобы получить нули в первой строке, элементы первого столбца умножим на 31 и вычтем из второго столбца, умножим на 17 и вычтем из третьего столбца, умножим на 43 и вычтем из четвертого столбца. В результате получим матрицу того же ранга:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Для получения двух нулей во второй строке второй столбец первой матрицы умножили на –2 и прибавили к третьему, а затем умножили на –3 и прибавили к четвертому. На последнем этапе преобразований от последнего столбца второй матрицы вычли третий столбец. Получили матрицу треугольного вида, все элементы которой выше диагонали равны нулю. Очевидно $\text{ranq } A = 4$. Знак (~) по ходу решения означает, что вновь полученная матрица имеет тот же ранг, что и предыдущая.

1.15. В каком случае произвольная система линейных уравнений называется совместной и определенной, совместной и неопределенной, в каком случае система называется несовместной ?

Система m линейных уравнений с n неизвестными записывается в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4)$$

Решением системы (4) называется совокупность чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, которая обращает каждое уравнение системы в тождество.

Система (4) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решения.

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, система называется совместной и неопределенной, если она имеет более одного решения.

Системы n линейных уравнений с n неизвестными, решаемые ранее матричным методом или методом Крамера при условии, что $\det A \neq 0$, имели единственное решение, т.е. это были совместные определенные системы.

1.16. В чем заключается условие совместности произвольной системы (4) линейных уравнений ?

Теорема. Для того, чтобы система (4) была совместна необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие
$\operatorname{ranq} A = \operatorname{ranq} A_p$, где A – матрица из коэффициентов при неизвестных, A_p – расширенная матрица, полученная добавлением к матрице A столбца свободных членов.

Таким образом, система (4) совместна $\Leftrightarrow$ $\operatorname{ranq} A = \operatorname{ranq} A_p$

Расширенная матрица имеет вид:

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Чертой принято отделять основную матрицу A от столбца свободных членов.

Доказательство теоремы.

1. Пусть $r(A) = r(A_p)$, это означает что существует базисный минор, общий для матриц A и A_p, в который не входит столбец свободных членов. По теореме о базисном миноре в этом случае столбец свободных членов является линейной комбинацией тех столбцов матрицы A, в которых расположен базисный минор. Если к этой комбинации добавить недостающие столбцы с нулевыми коэффициентами, то столбец свободных членов окажется линейной комбинацией всех столбцов матрицы A. Коэффициенты этой комбинации и составят решение системы.

2. Пусть $r(A_p) > r(A)$, это означает, что столбец свободных членов входит в состав базисного минора матрицы A_p, а т.к. по теореме о базисном миноре базисные столбцы матрицы линейно независимы, его нельзя представить в виде линейной комбинации столбцов матрицы A, система (4) в таком случае несовместна.

1.17. Какой должна быть последовательность решения произвольной системы линейных уравнений ?

1. Находим $r(A)$ и $r(A_p)$. Если $r(A) \neq r(A_p)$, система решения не имеет.

2. Если $r(A) = r(A_p) = r$, система совместна. В матрице A выделяем базисный минор. Те уравнения, коэффициенты которых не попали в базисный минор, отбрасываем, т.к. они по теореме о базисном миноре являются линейными комбинациями уравнений, коэффициенты которых попали в базисный минор. Если при этом окажется, что $r = n$ (число неизвестных), система будет иметь единственное решение, которое можно найти одним из способов, рассмотренных при изложении темы 3.

3. При $r < n$ перепишем систему, оставив слева те слагаемые, коэффициенты при неизвестных в которых попали в базисный минор, остальные слагаемые перенесем в правую часть уравнения. Неизвестные, оставшиеся слева, называют зависимыми, перенесенные вправо – свободными. Полученные в результате правые части будут свободными членами

системы. В результате получили систему из r уравнений с r неизвестными, эквивалентную данной, определитель которой отличен от нуля. Решаем систему одним из способов, изложенных в Теме 3, но заметим, что предпочтительнее в этом случае метод Гаусса. Если придавать свободным неизвестным конкретные значения, будем получать различные конкретные решения системы. Итак, при $r < n$ система будет иметь множество решений.

Таким образом:

1. Если $r\,(A_p) \neq r\,(A)$, система несовместна.

2. Если $r\,(A_p) = r\,(A) = r$, система совместна, при этом при $r = n$ система имеет единственное решение, при $r < n$ система имеет множество решений.

1.18. В каком случае система линейных уравнений называется однородной ?

Однородной называется система линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

В однородной системе все свободные члены равны нулю.

1.19. Объяснить, почему однородная система всегда совместна.

Объяснить можно двумя способами:

1. Система (5) всегда имеет решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, которое принято называть тривиальным. Это означает, что система (5) всегда совместна.

2. Для системы (5) очевидно всегда выполняется необходимое и достаточное условие $r\,(A) = r\,(A_p)$ совместности системы линейных уравнений, следовательно, система (5) всегда совместна.

1.20. При каком условии система (5) будет иметь нетривиальное решение ?

Система (5) будет иметь нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных будет меньше числа неизвестных.

1.21. В каком случае однородная система n уравнений с n неизвестными будет иметь нетривиальное решение ?

Однородная система n уравнений с n будет иметь нетривиальное решение, когда det A = 0, так как в этом случае ranq A будет меньше числа неизвестных.

2. Решение задач

2.1. Найти ранги заданных матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 10 & 6 \\ 1 & -1 & 4 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}3&7&8&9&13\\1&-1&2&3&4\\-1&2&1&1&3\\2&1&-1&2&-0\\1&5&-8&-5&-12\\3&-7&8&9&13\end{pmatrix};\qquad D=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&-1&-1&0&0&-1\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

Решение. 1) $A=\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\7&7&9&1\\5&1&-1&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-7&-13&6\\7&-14&-26&8\\5&-14&-26&12\end{pmatrix}$.

Нули в первой строке получены стандартным преобразованием: первый столбец умножили на (-3) и прибавили ко второму, опять же первый столбец умножаем на (-5) и прибавляем к третьему, к последнему столбцу прибавляем первый.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-7&-13&6\\7&-14&-26&8\\5&-14&-26&12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&1&3\\7&2&2&4\\5&2&2&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&3\\7&2&4\\5&2&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\7&2&-2\\5&2&0\end{pmatrix}$$

Элементы второго, третьего и четвертого столбцов разделили на их общие множители, из двух одинаковых столбцов один убрали, на последнем этапе второй столбец умножили на (-3) и прибавили к третьему. В результате получили минор третьего порядка

$\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\7&2&-2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow r(A)=3$.

2) $B=\begin{pmatrix}1&2&-1&3&4\\2&1&3&7&2\\3&3&2&10&6\\1&-1&4&4&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\2&-3&5&1&-6\\3&-3&5&1&-6\\1&-3&5&1&-6\end{pmatrix}\sim$

$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\2&1&1&1&1\\3&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&1\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow r(B)=2$.

3) $C=\begin{pmatrix}3&7&8&9&13\\1&-1&2&3&4\\-1&2&1&1&3\\2&1&-1&2&0\\1&5&-8&-5&-12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&3&4\\3&7&8&9&13\\-1&2&1&1&3\\2&1&-1&2&0\\1&5&-8&-5&-12\end{pmatrix}$.

Чтобы облегчить преобразования, поменяли местами первую и вторую строки. Получим стандартным преобразованием нули в первом столбце:

$$C\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&3&4\\0&-4&2&0&1\\0&1&3&4&7\\0&3&-5&-4&-8\\0&6&-10&-8&-16\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&3&4\\0&-4&2&0&1\\0&1&3&4&7\\0&3&-5&-4&-8\\0&3&-5&-4&-8\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&3&4\\0&-4&2&0&1\\0&1&3&4&7\\0&3&-5&-4&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&3&4\\0&1&3&4&7\\0&-4&2&0&1\\0&3&-5&-4&-8\end{pmatrix}.$$

Поменяли местами вторую и третью строки. Получим нули во втором столбце, умножив вторую строку на 4 и прибавив к третьей, умножив вторую строку на (-3) и прибавив к четвертой.

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&3&4\\0&1&3&4&7\\0&-4&2&0&1\\0&3&-5&-4&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&3&4\\0&1&3&4&7\\0&0&14&16&29\\0&0&-14&-16&-29\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&3&4\\0&1&3&4&7\\0&0&14&16&29\end{pmatrix};\quad\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&3\\0&0&14\end{vmatrix}=14\neq 0\Rightarrow r\,(\mathrm{C})=3.$$

$$4)\ \mathrm{D}=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&-1&-1&0&0&-1\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&-1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&-1&-1&1&0&-1\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&-1&1&1\end{pmatrix}\sim$$

(к третьему столбцу прибавили первый, а от четвертого отняли второй)

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&-1&-1&1&0&-1\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&2&1&1\end{pmatrix}$$

(к четвертому столбцу прибавили шестой)

Пятый и четвертый столбец поменяем местами

$$\mathrm{D}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&-1&-1&1&0&-1\\0&0&-1&1&0&0\\0&0&0&1&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&-1&-1&0&0\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&1&2\end{vmatrix}=\text{-}2\neq 0\Rightarrow r(\mathrm{D})=5$$

2.2. Решить системы 1-4:

1. $\begin{cases}x_1+3x_2-2x_3+4x_4=1\\-3x_1+2x_2+6x_3-5x_4=2\\-x_1+8x_2+2x_3+3x_4=-2\end{cases}$ 2. $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0\\x_1+x_3=-1\\3x_2+x_3=-2\end{cases}$

3. $\begin{cases}2x_1+x_3-x_4=0\\3x_1-x_2-2x_4=1\\x_2+x_3-x_4=2\\5x_1-x_2+x_3-3x_4=1\end{cases}$ 4. $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3+2x_4=5\\x_2+x_3-2x_4=1\\2x_1+5x_2+x_3-2x_4=7\\2x_1-x_2-5x_3+10x_4=1\end{cases}$

Решение. Чтобы в результате преобразований получалась система равносильная данной действовать можно только со строками.

1. $\begin{cases}x_1+3x_2-2x_3+4x_4=1\\-3x_1+2x_2+6x_3-5x_4=2\\-x_1+8x_2+2x_3+3x_4=-2\end{cases}$

Исследуем систему на совместность

$$\mathrm{A_p}=\begin{pmatrix}1&3&-2&4&1\\-3&2&6&-5&2\\-1&8&2&3&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-2&4&1\\0&11&0&7&5\\0&11&0&7&-1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&3&-2&4&1\\0&11&0&7&5\\0&0&0&0&-6\end{pmatrix}\Rightarrow r\,(\mathrm{A})=2,\quad r\,(\mathrm{A_p})=3,$$

$r\,(\mathrm{A})\neq r\,(\mathrm{A_p})\Rightarrow$ система несовместна.

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 \quad\; + x_3 = -1 \\ \quad 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

Решение.

$$\mathrm{A_p} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow r(\mathrm{A}) = r(\mathrm{A_p}) = 3$.

Система совместна, причем ранг равен числу неизвестных, система имеет единственное решение.

Используя последнюю, полученную в результате преобразований матрицу, запишем систему, которая равносильна исходной:

$$\begin{cases} -x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = -2 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$.

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$

Решение. Исследуем систему на совместность:

$$\mathrm{A_p} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нули получили вычитанием из четвертой строки суммы элементов первой и второй строк. Чтобы получить еще один ноль в первом столбце, умножим первую строку на 3, вторую на 2 и из второй вычтем первую. Будем иметь

$$\mathrm{A_p} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow r(\mathrm{A}) = r(\mathrm{A_p}) = 3 \Rightarrow$ система имеет решение, но так как ранг меньше числа неизвестных, система неопределенна, т.е. имеет множество решений.

Используя последнюю матрицу, запишем систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \\ -x_3 - 3x_4 = 6 \end{cases}$$

Так как x_4 свободное неизвестное, перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = x_4 \\ -2x_2 - 3x_3 = 2 + x_4 \\ \qquad -x_3 = 6 + 3x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 6 + 3x_4 + x_4 \\ -2x_2 = -18 - 9x_4 + 2 + x_4 \\ \qquad x_3 = -6 - 3x_4 \end{cases}$$

Окончательно будем иметь

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 2x_4 \\ x_2 = 8 + 4x_4 \\ x_3 = -6 - 3x_4 \\ x_4 \in R \text{ любое} \end{cases}$$

Получим несколько частных решений:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом можно получить любое число частных решений.

4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ \qquad x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 10x_4 = 1 \end{cases}$

Решение. Исследуем систему на совместность

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & -5 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A_p) = r(A) = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ система совместна и имеет множество решений. Минор $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ примем за базисный, тогда переменные x_3 и x_4 будут свободными переменными. Осталось решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 + x_3 - 2x_4 \\ \qquad x_2 = 1 - x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

Подставляя x_2 в первое уравнение, найдем x_1:

$$2x_1 + 3 - 3x_3 + 6x_4 = 5 + x_3 - 2x_4 \Rightarrow x_1 = 1 + 2x_3 - 4x_4.$$

Ответ. $x_1 = 1 + 2x_3 - 4x_4$; $x_2 = 1 - x_3 + 2x_4$;

$x_3 \in R$ - любое; $x_4 \in R$ - любое.

Предлагается самостоятельно получить несколько частных решений.

2.3. Решить однородные системы линейных уравнений.

1) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - 5y \qquad = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 6y + z = 0 \\ 5x + 15y - 2z = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$

Решение.

1) $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+3y-4z=0 \\ x-5y \qquad =0 \end{cases}$ $\quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -51 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ система имеет единственное решение $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$.

2) $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x+6y+z=0 \\ 5x+15y-2z=0 \end{cases}$ $\quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 15 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ система имеет множество решений. Найдем ranq A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 15 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A)=2, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$ -

базисный минор, x – свободное неизвестное.

Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} x+3y-z=0 \\ \qquad -z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y=z \\ \qquad z=0 \end{cases}.$$

Ответ. $y=-\dfrac{x}{3}$, $z=0$, $x \in R$ любое.

3) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$

Найдем ranq A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A)=2 <$ числа неизвестных $\Rightarrow$ система имеет множество решений.

Минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ примем за базисный, тогда x_3 и x_4 свободные неизвестные.

С учетом последней матрицы запишем систему:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ \quad -x_2-6x_3+5x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=-4x_3+3x_4 \\ \quad -x_2=6x_3-5x_4 \end{cases}$$

Таким образом, $x_2=5x_4-6x_3$, $x_1=-4x_3+3x_4-2(5x_4-6x_3)=8x_3-7x_4$.

Ответ. $x_1=8x_3-7x_4$; $x_2=-6x_3+5x_4$; $x_3 \in R$ - любое; $x_4 \in R$ - любое.

Самостоятельно предлагается найти несколько частных решений.

2.4. Решить системы 1-2 методом Гаусса (метод исключения).

1. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+2x_3=-5 \\ 4x_1+4x_2+3x_3=-2 \end{cases}$ $\qquad$ 2. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2-x_4=0 \\ 2x_1-x_2+x_3-4x_4=0 \\ 3x_2+x_3+x_4=3 \end{cases}$

Решение.

1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+2x_3=-5 \\ 4x_1+4x_2+3x_3=-2 \end{cases}$ $\qquad A_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \\ 4 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$

Метод Гаусса заключается в преобразовании расширенной матрицы и получение системы, равносильной данной, которая легко решается методом последовательного исключения

$$A_p=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&2&-5\\4&4&3&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&1&-6\\0&0&-1&-6\end{pmatrix}.$$

Система равносильная данной будет иметь вид:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\ \quad -2x_2+x_3=-6\\ \qquad\quad -x_3=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-11\\x_2=6\\x_3=6\end{cases}$$

Ответ. $x_1=-11$; $x_2=6$; $x_3=6$.

2. $$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=3\\x_1+x_2-x_4=0\\2x_1-x_2+x_3-4x_4=0\\3x_2+x_3+x_4=3\end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу

$$A_p=\begin{pmatrix}1&-2&1&0&3\\1&1&0&-1&0\\2&-1&1&-4&0\\0&3&1&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&0&3\\1&3&-1&-1&-3\\0&3&-1&-4&-6\\0&3&1&1&3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&0&3\\0&3&-1&-1&-3\\0&0&0&-3&-3\\0&0&2&2&6\end{pmatrix}$$

В последнем преобразовании вторую строку вычли из третьей и четвертой строк. Запишем, используя последнюю матрицу, систему равносильную данной и решим ее:

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=3\\ \quad 3x_2-x_3-x_4=-3\\ \qquad\quad -3x_4=-3\\ \qquad 2x_3+2x_4=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=3+2x_2-x_3\\3x_2=-3+x_3+x_4\\x_4=1\\x_3=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=0\\x_3=2\\x_4=1\end{cases}$$

Ответ. $x_1=1$; $x_2=0$; $x_3=2$; $x_4=1$.

2.5. Доказать линейную независимость данных векторов:
$a_1=(1,2,-1,2)$, $a_2=(0,1,5,-5)$, $a_3=(0,0,3,5)$, $a_4=(1,1,1,0)$.

Решение. По следствию из теоремы о базисном миноре векторы линейно независимы тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их координат отличен от нуля.

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&1&5&-5\\0&0&3&5\\1&2&-1&2\\1&1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&5&-5\\0&0&3&5\\0&1&-2&2\\1&1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&-5\\0&3&5\\1&-2&2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1&5&-5\\0&3&5\\0&-7&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&5\\-7&7\end{vmatrix}=21+35=56\neq 0\Rightarrow$$ данная система векторов линейно независима.

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Найти ранги заданных матриц

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&4&5\\2&1&-1&7\\5&-8&11&22\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&4&6&1\\1&2&3&1\\-3&-6&-9&1\\1&2&3&1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&-1&3&4\\2&1&-1&0&1\\0&1&1&2&1\\3&4&-1&5&6\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&2&3&0&0\\2&3&4&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&3&4\end{pmatrix}$$

Ответ. r (A) = 2, r (B) = 2, r (C) = 3, r (D) = 4.

3.2. Используя теорему о базисном миноре, составить матрицы:

1) размера 3x3, ранг которой равен 2;
2) размера 4x5, ранг которой равен 2;
3) размера 5x4, ранг которой равен 3.

3.3. При каком значении параметра p ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1&-3\\2&4&-5&1\\3&-2&4&2\\8&p&-5&1\end{pmatrix}$$ равен трем ?

3.4. Исследуйте системы 1- 6 на совместность и решите совместные из заданных систем

1) $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=-4\\5x_1+x_2-4x_3=7\\x_1+7x_2-6x_3=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x_1+3x_2+x_3=0\\x_1+2x_3=0\\x_2-x_3=2\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+2y-4z=1\\2x+y-5z=-1\\x-y-z=-2\end{cases}$ 4) $\begin{cases}9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4\\6x_1-2x_2+3x_3+x_4=5\\3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8\end{cases}$

5) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4=1\\x_1-2x_2-4x_3=-2\\4x_1-8x_2-x_3-3x_4=1\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4=1\\x_1-2x_2-4x_3=-2\\4x_1-8x_2-x_3-3x_4=3\end{cases}$

Ответ. 1) система несовместна;

2) $x_1=-2$, $x_2=3$, $x_3=1$;

3) $x=-1-2z$, $y=1+z$, z – любое;

4) x_1 - любое, x_2 - любое,

$$x_3=\frac{26-27x_1+9x_2}{13},\quad x_4=\frac{-13+3x_1-x_2}{13};$$

5) x_1 - любое, x_2 - любое,

$$x_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x_1-\frac{1}{2}x_2,\quad x_4=\frac{5}{4}x_1-\frac{5}{2}x_2-\frac{1}{2};$$

6) система несовместна.

3.5. Решить однородные системы линейных уравнений 1-4

1) $\begin{cases}x+2y-3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1-2x_2-3x_3=0\\2x_1-4x_2+x_3=0\end{cases}$

3) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\2x_1+3x_2+4x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=x_4\\x_1-3x_2+x_4=0\\x_1+2x_3+x_4=0\\2x_1-3x_2+2x_3+2x_4=0\end{cases}$

Ответ. 1) $x=\frac{5}{3}z$, $y=\frac{2}{3}z$, z – любое;

2) $x_1 = 2x_2$, x_2 - любое; $x_3 = 0$;

3) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$;

4) $x_1 = \frac{1}{17}x_4$, $x_2 = \frac{6}{17}x_4$, $x_3 = -\frac{9}{17}x_4$, x_4 - любое.

3.6. Доказать, что системы 1-4 имеют единственное решение и решить системы методом Гаусса.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 \quad - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 5 \\ 6x_1 - 13x_2 + 15x_3 + 18x_4 = 17 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 21x_4 = 21 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 \quad - x_4 = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

Ответ. 1) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$;

2) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$;

3) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$;

4) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$.

ТЕМА 5. **Понятие линейного пространства. Его базис и размерность. Евклидовы линейные пространства**

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Понятие линейного пространства

Определение. Множество L элементов произвольной природы $x, y, z, \ldots$ называется линейным пространством, если:

1) имеется правило, по которому любым двум элементам x и y из L ставится в соответствие третий элемент z из L, называемый суммой элементов x и y и обозначаемый $x + y$;

2) для любого x из L и любого действительного числа α определена операция умножения элемента x на α, обозначаемого αx, причем $\alpha x \in \mathrm{L}$.

При этом указанные операции должны удовлетворять следующим условиям (аксиомам):

1. $x + y = y + x$ для любых x и y из L (закон коммутативности);

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ для любых x, y и z из L (закон ассоциативности);

3) в L существует элемент 0 такой, что $x + 0 = x$ для любого x из L (0 называется нулевым элементом);

4) для каждого x из L существует элемент y из L такой, что $x + y = 0$ (элемент y называется противоположным элементу x);

5) $1 \cdot x = x$ для любого x из L;

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для любого x из L и любых действительных чисел α и β;

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для любого x из L и любых действительных чисел α и β;

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для любых x и y из L и любого действительного числа α.

Элементы линейного пространства принято называть векторами.

Исходя из данного определения, можно доказать:

1. Во всяком линейном пространстве имеется единственный нулевой вектор, причем этот вектор обладает свойством $0 \cdot x = x$ для любого x из L.

2. Для каждого вектора x из L имеется единственный противоположный вектор y, который можно представить в виде $y = (-1) \cdot x$.

1.2. Является ли линейным пространством арифметическое n-мерное пространство, рассмотренное в теме 3 ?

Арифметическое *n*-мерное пространство является линейным пространством, так как в нем определены операции сложения и умножения вектора на число, при этом выполнены аксиомы 1-8. Роль нулевого вектора играет вектор $0 = (0,0,...,0)$, роль вектора, противоположного вектору $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ играет вектор $(-1)\mathbf{a} = (-\alpha_1, -\alpha_2, ..., -\alpha_n)$.

Заметим, что понятие линейной комбинации векторов, линейно зависимой и линейно независимой системы векторов в произвольном линейном пространстве определяется так же, как и в арифметическом пространстве.

1.3. Что называют базисом линейного пространства ?

Определение. Упорядоченная конечная система векторов $l_1, l_2, ..., l_n$ называют базисом линейного пространства L, если выполнены два условия:

1) векторы $l_1, l_2, ..., l_n$ линейно независимы;

2) каждый вектор x из L можно представить в виде линейной комбинации этой системы векторов, т.е. в виде

$$x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + ... + \alpha_n l_n .$$

1.4. Что называют координатами вектора x в данном базисе ?

Числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называют координатами вектора x по базису $l_1, l_2, ..., l_n$.

1.5. Может ли линейное пространство иметь более одного базиса ?

Да, может. Даже, если перенумеровать векторы в данном базисе, то получится уже другой базис, в котором у вектора x будут другие координаты. Но в заданном базисе координаты любого вектора определяются однозначно (предлагается это утверждение доказать самостоятельно методом от противного).

1.6. Могут ли разные базисы в L содержать разное количество векторов ?

Теорема. Если в линейном пространстве существует базис из n векторов, то любой другой базис этого пространства будет содержать то же число векторов.

1.7. Что называют размерностью

линейного пространства ?

Если базис линейного пространства содержит n векторов, тогда число n называют размерностью линейного пространства, а само пространство называют n-мерным линейным пространством.

Пример. Убедиться, что множество L матриц вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ образует линейное пространство, найти его базис и указать размерность.

Решение. Линейные операции над матрицами определены таким образом, что сумма двух матриц

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ - есть элемент множества L и произведение

$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a_{11} & \lambda\, a_{12} \\ \lambda\, a_{21} & \lambda\, a_{22} \end{pmatrix}$ тоже принадлежит L. Нулевой элемент имеет вид $\mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

элементом, противоположным $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ является элемент $(-1) \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$. При этом выполнены аксиомы 1-8.

Таким образом, множество матриц размера 2x2 образует линейное пространство. За базис этого пространства естественно принять матрицы:

$l_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad l_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad l_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad l_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Любую матрицу $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов l_1, l_2, l_3, l_4 следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\, l_1 + a_{12}\, l_2 + a_{21}\, l_3 + a_{22}\, l_4 .$$

Сами векторы l_1, l_2, l_3, l_4 линейно независимы, так как ни один из них нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.

Таким образом, множество матриц размера 2x2 образует линейное пространство размерности 4.

1.8. Понятие линейного подпространства

Определение. Множество L' векторов из линейного пространства L называется линейным подпространством, если сумма любых элементов из L' будет принадлежать L' и произведение каждого вектора из L' на любое число тоже будет принадлежать L'.

Из определения линейного пространства и данного определения линейного подпространства следует, что линейное подпространство само является линейным пространством.

1.9. Какие линейные пространства называются евклидовыми ?

Понятие евклидова пространства связано с понятием длины вектора линейного пространства, которое, в свою очередь, связано с понятием скалярного произведения векторов линейного пространства.

Определение. Говорят, что в линейном пространстве L определено понятие скалярного произведения, если по некоторому правилу любым двум элементам x и y из L можно сопоставить число, обозначаемое (x, y) и называемое скалярным произведением векторов x и y, причем это правило удовлетворяет следующим условиям:

1) $(x, y) = (y, x)$ для любых x и y из L;
2) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$ для любых x, y, z из L;
3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ для любого числа λ и любых x и y из L;
4) $(x, x) > 0$, если $x \neq 0$ и $(x, x) = 0$, если $x = 0$.

Например, в n-мерном арифметическом пространстве для векторов $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $y = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ определить скалярное произведение можно по формуле:

$$(x, y) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + ... + \alpha_n \beta_n \qquad (1)$$

Условия 1 - 4, очевидно, выполнены.

Определение. Линейное пространство называется евклидовым, если в нем определено скалярное произведение векторов.

1.10. Что называют длиной вектора в евклидовом пространстве ?

Длиной или модулем вектора x евклидова пространства называют число

$$|x| = \sqrt{(x, x)} \qquad (2)$$

Если в арифметическом пространстве скалярное произведение определено по формуле (1), тогда

$$|x| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2}\ .$$

1.11. Какое неравенство называют неравенством Коши - Буняковского ?

Неравенство Коши – Буняковского имеет вид

$$|(x,y)| \leq |x| \cdot |y| \qquad (3)$$

Доказательство опустим.

1.12. Что дает это неравенство ?

Неравенство Коши - Буняковского позволяет ввести понятие угла φ между двумя векторами.

Из неравенства (3) следует

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1\ .$$

Это дает возможность ввести понятие угла φ между векторами с помощью соотношения:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|},\ \text{при } |x| \neq 0,\ \ |y| \neq 0\ .$$

1.13. Какие векторы в евклидовом пространстве называются ортогональными ?

Определение. Два ненулевых вектора называются ортогональными, если $(x, y) = 0$.

1.14. Какой базис евклидова пространст-

ва называется ортогональным ?
Какой ортонормированным ?

Базис называется ортогональным, если все его векторы между собой ортогональны. Базис называется ортонормированным, если он ортогонален и все его векторы по длине равны единице.

Если скалярное произведение введено по формуле (1), то ортонормированный базис в n-мерном арифметическом (евклидовом) пространстве имеет вид:

$$l_1 = (1,0,0,...,0)$$
$$l_2 = (0,1,0,...,0)$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$l_n = (0,0,0,...,1)$$

1.15. Формулы перехода от одного базиса к другому в линейном пространстве.

Пусть в n-мерном линейном пространстве заданы два базиса:

$$l_1, l_2, ..., l_n \qquad (4)$$

и $$l'_1, l'_2, ..., l'_n \qquad (5)$$

Каждый вектор второго базиса, как всякий вектор пространства, однозначно записывается через векторы первого базиса

$$\begin{cases} l'_1 = c_{11}\, l_1 + c_{12}\, l_2 + ... + c_{1n}\, l_n \\ l'_2 = c_{21}\, l_1 + c_{22}\, l_2 + ... + c_{2n}\, l_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ l'_n = c_{n1}\, l_1 + c_{n2}\, l_2 + ... + c_{nn}\, l_n \end{cases}$$

Матрица

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \ldots c_{2n} \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ c_{n1} & c_{n2} \ldots c_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от базиса (4) к базису (5). Строки этой матрицы являются координатами векторов (5) в базисе (4). Так как векторы (5) линейно независимы, матрица C невырожденная и имеет обратную матрицу C^{-1}.

Пусть известны координаты вектора x в базисах (4) и (5)

$$x = \alpha_1\, l_1 + \alpha_2\, l_2 + ... + \alpha_n\, l_n$$

и $$x = \alpha'_1\, l'_1 + \alpha'_2\, l'_2 + ... + \alpha'_n\, l'_n\, .$$

Путем довольно громоздких преобразований (мы их опустим) можно получить матричные формулы:

$$(\alpha_1\, \alpha_2 ... \alpha_n) = (\alpha'_1\, \alpha'_2 ... \alpha'_n) \cdot \mathrm{C} \qquad (6)$$

и $$(\alpha'_1\, \alpha'_2 ... \alpha'_n) = (\alpha_1\, \alpha_2 ... \alpha_n) \cdot \mathrm{C}^{-1} \qquad (7)$$

Пример. Пусть в трехмерном линейном пространстве базис l'_1, l'_2, l'_3 выражается через базис l_1, l_2, l_3 следующим образом

$$\begin{cases} l'_1 = 5l_1 - l_2 - 2l_3 \\ l'_2 = 2l_1 + 3l_2 \\ l'_3 = -2l_1 + l_2 + l_3 \end{cases}$$

и задан вектор x в базисе l_1, l_2, l_3

$$x = l_1 + 2l_2 - l_3\, .$$

Найти координаты вектора x в базисе l'_1, l'_2, l'_3.

Решение. Матрица перехода от базиса l_1, l_2, l_3 к базису l'_1, l'_2, l'_3 имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы воспользоваться формулой (7), необходимо найти обратную матрицу

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{33} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{33} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}, \ \det C = 1.$$

По формуле (7) будем иметь:

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3) = (1 \ \ 2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix} = (-9 \quad 4 \ -19).$$

Таким образом, $x = -9 l'_1 + 4 l'_2 - 19 l'_3$.

2. Решение задач

2.1. Будет ли линейным пространством совокупность решений системы линейных однородных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

где a_{ij} - действительные числа?

Решение. Да, будет. Если $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ и $x''_1, x''_2, \ldots, x''_n$, любые два решения системы, то сумма вида $(x'_1 + x''_1) + (x'_2 + x''_2) + \ldots (x'_n + x''_n)$ будет удовлетворять каждому уравнению системы и, следовательно, тоже будет решением системы. Очевидно, если умножение вектора на число λ определить как, совокупность чисел $\lambda x'_1, \lambda x'_2, \ldots, \lambda x'_n$, то эта совокупность тоже будет решением системы. Нулевым элементам пространства является тривиальное решение 0, 0, …, 0, противоположным элементу $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ будет решение $-x'_1, -x'_2 \ldots, -x'_n$. Аксиомы 1-8, очевидно выполнены.

2.2. Докажите, что множество многочленов, степень которых не превышает числа n есть линейное пространство. Указать базис этого пространства.

Решение. Пусть L множество многочленов, степень которых не превышает числа n. Очевидно сумма двух многочленов $P_k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$ и $Q_m = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, степень каждого из которых не превышает n, если ее определить как обычную алгебраическую сумму слагаемых, тоже будет многочленом, степень которого не превысит n. Если $\lambda P_k = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \ldots + \lambda a_k x^k$ - это тоже многочлен, степень которого не превышает n. За нулевой элемент примем число 0 (частный случай многочлена нулевой степени), за элемент, противоположных P_k примем многочлен $-P_k = -a_0 - a_1 x - \ldots - a_k x^k$. Аксиомы 1-8, очевидно выполнены. Таким образом, множество многочленов степень которых не превышает n, есть линейное пространство.

Базисом этого пространства будет совокупность многочленов вида

$$1, x', x^2, \ldots, x^n.$$

При таком базисе

$$P_k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 ... + a_k x^k + 0 \cdot x^{k+1} + ... + 0 \cdot x^n,$$

т.е. координатами P_k в таком базисе будут числа $a_0, a_1, a_2 ... + a_k, 0, 0, ..., 0$. Например, многочлен $P_n(x) = x + 2x^2 + 3x^2 + ... + n\,x^n$ будет иметь координаты (0, 1 , 2, 3, …, n). Таким образом, рассматриваемое пространство имеет размерность $(n+1)$.

2.3. Будет ли линейным пространством множество всех невырожденных матриц одного порядка ?

Решение. Нет не будет, так как сумма двух невырожденных матриц может оказаться вырожденной матрицей.

2.4. В арифметическом трехмерном пространстве заданы векторы p = (0, 1, 1), q = (-2, 0, 1), r = (3, 1, 0) и x = (13, 2, 7) в некотором базисе. Доказать, что p, q и r тоже могут быть базисными векторами и найти координаты вектора x в этом базисе.

Решение. Убедимся, что векторы p, q и r линейно независимы:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow p, q, r$ образуют базис и, значит,

$x = \alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r$. Систему для нахождения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ составим на основании того, что у равных векторов должны быть равны соответствующие координаты:

$$\begin{cases} 13 = -2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 2 = \alpha_1 + \alpha_3 \\ 7 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13 = -14 + 2\alpha_1 + 6 - 3\alpha_1 \\ \alpha_3 = 2 - \alpha_1 \\ \alpha_2 = 7 - \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -21 \\ \alpha_2 = 28 \\ \alpha_3 = 23 \end{cases}$$

Ответ. $x = -21p + 28q + 23r$.

2.4. Пусть l_1, l_2, l_3 и l_1', l_2', l_3' два базиса в некотором линейном пространстве, причем

$l_1' = 2l_1 - l_3$

$l_2' = 2l_1 + l_2 + l_3$ и $x = 2l_1 - l_2 + l_3$

$l_3' = l_1 - 4l_2$ $\quad y = l_1' + 3l'_3$

Найти координаты вектора x в базисе l_1', l_2', l_3' и координаты вектора y в базисе l_1, l_2, l_3.

Решение. Составим матрицу перехода от базиса l_1, l_2, l_3 к базису l_1', l_2', l_3'

$$\text{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \ \det \text{C} = 13.$$

Чтобы воспользоваться формулой

$$(\alpha_1' \, \alpha_2' \, \alpha_3') = (\alpha_1 \, \alpha_2 \, \alpha_3) \cdot \text{C}^{-1},$$

найдем матрицу C^{-1}:

$$\text{C}^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1-3 \\ -5 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $(\alpha_1' \, \alpha_2' \, \alpha_3') = (2 \ \ -1 \ \ \ 1) \cdot \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -5 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3) = (\alpha_1'\,\alpha_2'\,\alpha_3')\cdot \mathrm{C} \Rightarrow (\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3) = (1\quad 0\quad 3)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$= (5\ \ -12\ \ -1)$.

Ответ. $x = \frac{2}{13}\,l_1' + \frac{15}{13}\,l_2' + \frac{7}{13}\,l_3'$,

$y = 5\,l_1' - 2l_2' - l_3'$.

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Пусть L – множество всех диагональных матриц размера *n*. Является ли L линейным пространством ?

Ответ. Да.

3.2. Является ли линейным пространством множество матриц размера m x n с целочисленными элементами ?

Ответ. Нет.

3.3. Докажите, что множество матриц 2х3, элементами которых являются действительные числа, является линейным пространством. Укажите его базис и размерность.

3.4. Если в линейном пространстве скалярное произведение ввести по формуле $(x, y) = |\,x\,|\cdot|\,y\,|$, будет ли это пространство евклидовым ?

Ответ. Нет.

3.5. Являются ли линейно независимыми векторы $a = (2;-1;0;1)$, $b = (-1;1;1;2)$, $c = (0;2;-3;1)$, $d = (0;0;2;-1)$ арифметического пространства.

Ответ. Да.

Ответы в заданиях 3.1 – 3.5 обосновать.

3.6. Докажите, что векторы $a = (2,7,-3)$, $b = (3,-1,4)$ и $c = (-5,17,-18)$ не могут быть базисными в трехмерном арифметическом пространстве.

3.7. Убедиться, что векторы $a = (1,1,0)$, $b = (0,1,-2)$, $c = (1,0,3)$ можно принять за базис и найти координаты вектора $x = (2,-1,11)$ в этом базисе.

Ответ. $x = -3a + 2b + 5c$.

3.8. Пусть l_1, l_2, l_3 и l_1', l_2', l_3' два базиса в некотором линейном пространстве, причем

$l_1' = l_1 - l_2$

$l_2' = 2l_2 - l_3$ и $x = 2l_1' - 3l_2' + l'_3$

$l_3' = l_1 + l_2 + l_3$ $y = l_1 + l_2 - 4\,l_3$

1. Найти координаты вектора x в базисе l_1, l_2, l_3.

2. Найти координаты y в базисе l_1', l_2', l_3'.

Ответ. $x = 5\,l_1 - 7\,l_2 + 4\,l_3$,

$y = \frac{5}{2}\,l_1' + \frac{5}{2}\,l_2' - \frac{3}{2}\,l_3'$.