Тема 1

1. Матрицы. Операции над матрицами.

Матрицы

1. **Основные сведения о матрицах**
2. **Виды матриц**

Одной из основных задач линейной алгебры является исследование и решение систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{cases}$$

Если выписать коэффициенты при неизвестных x_1, $x_2,\dots, x_n$, получится таблица чисел, которая называется основной матрицей системы.

Опр. *Числовой матрицей А размера (m x n)* называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|,$$

где a_{ij} – элементы матрицы, i,j – индексы элемента, i- первый индекс, показывающий номер строки (номер уравнения в системе), а j – второй индекс указывает номер столбца (номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент).

Опр. Строки и столбцы матрицы называются ее рядами.

Опр. Матрица, состоящая лишь из одной строки, называется *матрицей-строкой.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Опр. Матрица, имеющая лишь один столбец, называется *матрицей-столбцом*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Опр. Если число строк в матрице равно числу столбцов , т.е. $m = n$, то матрица называется *квадратной матрицей порядка n*.

$\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - квадратные матрицы первого, второго и третьего порядка.

Опр. *Главная диагональ квадратной матрицы* образована элементами, стоящими на линии, соединяющей левый верхний элемент с правым нижним.

Опр. *Побочная диагональ* образована элементами, стоящими на линии, соединяющей

левый нижний элемент с правым верхним.
Опр. *Диагональной матрицей* называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю, т.е. матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Опр. *Единичной матрицей* называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Опр. *Треугольной матрицей* называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Различают соответственно верхнюю и нижнюю треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Опр. Матрица произвольных размеров

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1r} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2r} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3r} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{rr} & ... & a_{rn} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1,2,\ldots, r$), $a_{ik} = 0$ при $i > r$, называется *квазитреугольной или трапециевидной.*

Операции над матрицами

Над матрицами можно выполнять как *линейные*, так и *нелинейные* операции.

К *линейным* операциям относятся:
1. Сложение (вычитание) матриц.
2. Умножение числа на матрицу.
3. Линейная комбинация матриц.

К *нелинейным* операциям относятся:
4. Произведение матриц.
5. Возведение матриц в целую положительную степень
6. Транспонирование матрицы.

Замечание: В результате всех перечисленных действий над матрицами всегда получается матрица.

1. Сложение и вычитание матриц определяются только для матриц одного размера.
Опр. *Суммой двух матриц* называется матрица, элементы которой равны суммам соответствующих элементов.
Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}4 & -7 & 5\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 8\\ 12 & -5 & 0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}5 & -11 & 13\\ 14 & -5 & -3\end{pmatrix},\quad B-A=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 3\\ 10 & -5 & 3\end{pmatrix}$$

2. Опр. *Произведением числа α на матрицу* называется матрица, полученная из данной умножением всех ее элементов на число α.
Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & 2\\ 3 & -7\end{pmatrix},\quad -5A=\begin{pmatrix}-20 & 5\\ -25 & -10\\ -15 & 35\end{pmatrix}$$

3. *Линейная комбинация матриц*
Опр. Матрица C называется линейной комбинацией матриц A и B, если выполняется равенство:

$C=\alpha A+\beta B$,

где α и β – коэффициенты линейной комбинации.
Эта операция, очевидно, является обобщением предыдущих. Можно составлять линейную комбинацию любого числа матриц одного размера.
Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 8 & 3\\ -1 & -6\\ 0 & -11\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 5\\ 6 & -7\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Найти $C=5B-4A$.

$$C=5B-4A=5\cdot\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 8 & 3\\ -1 & -6\\ 0 & -11\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 5\\ 6 & -7\\ 1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -10 & 25\\ 30 & -35\\ 5 & -10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-16 & 20\\ 32 & 12\\ -4 & -24\\ 0 & -44\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & -20\\ -42 & 13\\ 34 & -11\\ 5 & 34\end{pmatrix}$$

Замечание: линейные операции над матрицами обладают теми же свойствами, что и операции сложения и умножения на множестве чисел.

1.$A+B=B+A$

2.$(A+B)+C=A+(B+C)$

3.$A+O=A$

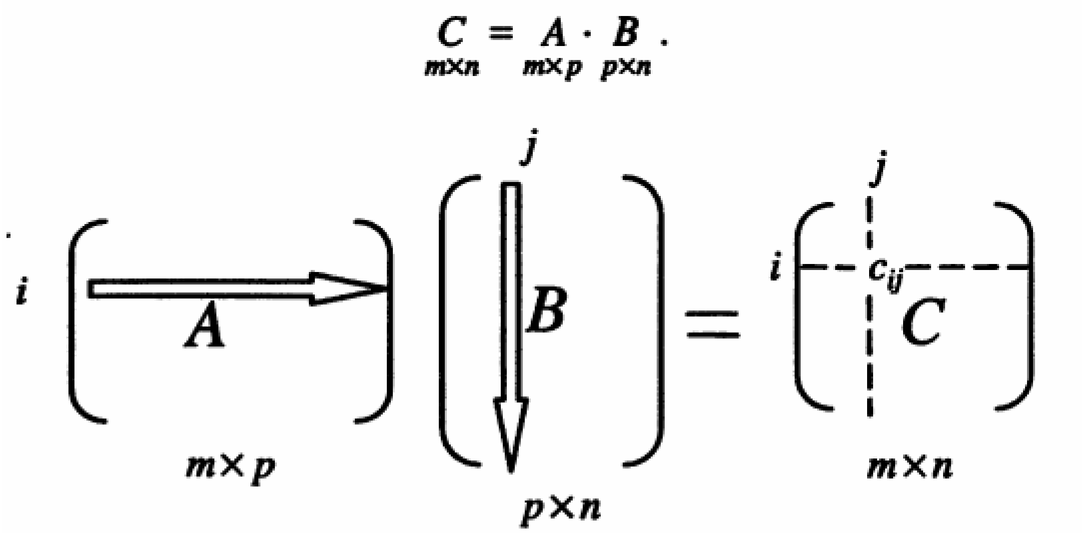
4.$A+(-A)=O$, где A, B, C – матрицы одних и тех же размеров.

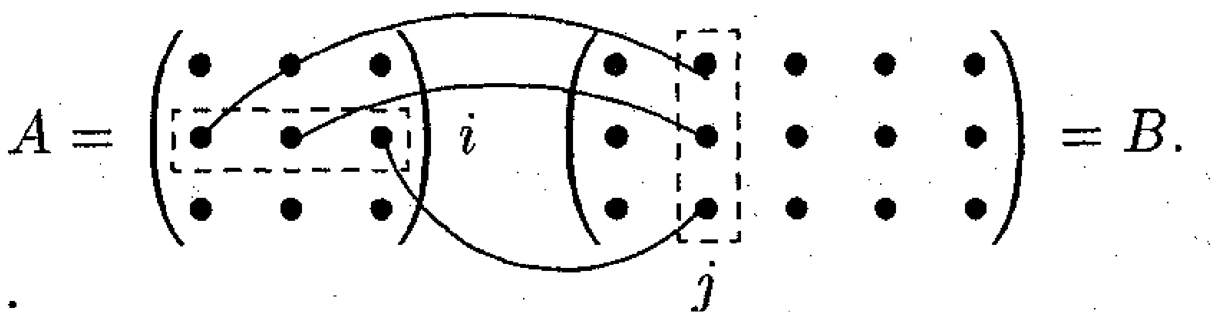
6.$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

7.$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

8$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

4. <u>Опр</u>. *Умножение матриц* определяется для согласованных матриц. Матрица A называется *согласованной* с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Произведением матрицы A размера (mxp) на матрицу B размера (pxn) называется матрица C размера (mxn), для которой каждый элемент c_{ij} равен сумме произведений i-той строки матрицы A на соответствующие элементы j-того столбца матрицы B.





$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -4\end{pmatrix}(3\text{x}3), \qquad B=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 0 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}(3\text{x}2).$$

$$C=A\cdot B\,(3\text{x}2)=\begin{pmatrix}1\cdot5+1\cdot0+2\cdot1 & 1\cdot9+1\cdot3+2\cdot(-1)\\ 2\cdot5+1\cdot0+(-1)\cdot1 & 2\cdot9+1\cdot3+(-1)\cdot(-1)\\ 3\cdot5+2\cdot0+(-4)\cdot1 & 3\cdot9+2\cdot3+(-4)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 9 & 22\\ 11 & 37\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=\left|(1\text{x}3)(3\text{x}1)=(1\text{x}1)\right|=(1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3)=(13).$$

$$\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\left|(3\text{x}1)(1\text{x}3)=(3\text{x}3)\right|=\begin{pmatrix}2\cdot1 & 2\cdot2 & 2\cdot3\\ 1\cdot1 & 1\cdot2 & 1\cdot3\\ 3\cdot1 & 3\cdot2 & 3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}.$$

Пример. Среди данных матриц указать те пары матриц, которые можно перемножить и найти эти произведения.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\ (2\times3);\ B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}(3\times1);\ C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\ (2\times2);\ D=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}(1\times4).$$

AxB(2x1), BxD(3x4), CxA(2x3).

$$A\times B=\begin{pmatrix}6\\ 5\end{pmatrix}, \quad B\times D=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4 & -1\\ -4 & 0 & 8 & -2\\ 2 & 0 & -4 & 1\end{pmatrix}, \ C\times A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & 11 & 2\end{pmatrix}$$

Замечание: В общем случае AxB $\neq$ BxA

A=$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

AxB=$\begin{pmatrix}-4 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, BxA= $\begin{pmatrix}1 & 8\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

5. Возведение матрицы в целую положительную степень

Возведение в степень есть многократное умножение, поэтому при возведении матрицы в степень мы умножаем ее саму на себя нужное число раз. Например:

$A^2=A\cdot A, \quad A^3=A\cdot A\cdot A=A^2\cdot A=A\cdot A^2.$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-3) & 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 6 \\ -3\cdot 1 + (-3)\cdot 6 & (-3)\cdot(-2) + 6\cdot 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -14 \\ -21 & 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -98 \\ -147 & 294 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами. Если имеют смысл соответствующие действия, то

1. В общем случае $A\cdot B \neq B\cdot A$.
2. (A•B)•C=A•(B•C)
3. (A+B)•C=A•C+B•C

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Опр. Если матрицы A и B удовлетворяют условию A•B=B•A, то матрицы A и B называются **перестановочными** или коммутативными.
Можно показать, что для любой квадратной матрицы A порядка n справедливо соотношение A•E = E•A = A, где E – единичная матрица порядка n.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AxB=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad BxA=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Опр. Транспонированной матрицей называется такая матрица, у которой все строки заменены соответствующими столбцами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Из определения следует, что если матрица A имеет размер (m x n), то матрица A^T имеет размер (n x m).

Тема 2

Определители квадратных матриц. Вычисление определителя.

1. **Понятие определителя.**
2. **Свойства определителя.**

Опр. *Определителем или детерминантом* ***квадратной*** *матрицы порядка n* называется число, вычисляемое из элементов этой матрицы по определенному правилу. Определитель обозначается символами ΔA или det A.

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

В определителе различают главную и побочную диагонали.

Опр. *Определитель матрицы 1-го порядка* равен самому элементу этой матрицы

$$\Delta A = |a_{11}| = a_{11}.$$

Опр. *Определителем квадратной матрицы 2-го порядка* называется число, равное разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1*2 - 5*(-3) = 2+15 = 17$$

Опр. *Определителем квадратной матрицы третьего порядка* называется число

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Каждое слагаемое алгебраической суммы в правой части есть произведение элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Каждому произведению приписывается знак. Для того, чтобы запомнить, какие произведения берут со знаком плюс, какие со знаком минус, полезно правило треугольников, схематически изображенное на рисунке:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix} = -7-60-96+18+56+40=-49$$

Опр. *Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A порядка n* называется определитель порядка (n-1), полученный из элементов матрицы после вычеркивания строки с номером i и столбца с номером j, на пересечении которых стоит этот элемент.

Пример. Рассмотрим квадратную матрицу 3-го порядка.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Минор M_{23} элемента a_{23} матрицы A получается вычеркиванием второй строки и третьего столбца:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}.$$

Опр. *Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы порядка n* называется минор этого элемента M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример. $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$.

Свойства определителей.

1. Определитель матрицы не изменится при *транспонировании матрицы*, т.е. замене всех его строк соответствующими столбцами.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 7 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$\Delta A = \Delta A^T$.

2. Если *переставить в определителе два параллельных ряда*, то определитель сменит знак на противоположный.

$$\begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 7 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -4 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

3. *Множитель, общий элементам какого-либо ряда*, можно вынести за знак определителя.

$$\begin{array}{c} S_1 \\ \\ S_3 \end{array} \begin{vmatrix} 7 & 14 & 42 \\ -1 & -8 & 3 \\ -8 & -18 & 0 \end{vmatrix} = 7*(-2)* \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & -8 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Или обратное: чтобы умножить определитель на число, нужно умножить на это число элементы одного из рядов определителя.

4. *Определитель матрицы равен нулю*, если

а) все элементы какого-либо ряда равны нулю:

C_2

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

б) матрица содержит два одинаковых ряда.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & & C_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 7 & -4 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$

в) матрица содержит два ряда, элементы которых пропорциональны

$$\begin{array}{c} S_1 \\ \\ S_3 \end{array} \begin{vmatrix} 21 & -15 & 18 \\ 0 & 2 & 4 \\ -7 & 5 & -6 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} -7 & 5 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \\ -7 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

г) в матрице есть ряд, элементы которого представляют собой линейную комбинацию соответствующих элементов других рядов

$$\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad S_3 = (-1)S_1 + 2\,S_2 .$$

Конечно, такую линейную комбинацию сразу не видно, но если в результате вычисления определителя получится ноль, то можно утверждать, что его ряды линейно зависимы, т.е. какой-либо ряд можно представить в виде линейной комбинации остальных.
В частности, линейно зависимыми являются два одинаковых ряда, а также два ряда, соответствующие элементы которых пропорциональны.

5) Определитель матрицы не изменится, если *все элементы какого-либо ряда умножить на отличное от нуля число и прибавить к соответствующим элементам другого ряда*.

$$\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{vmatrix} 7 & -4 & 5 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ -3S_1 + S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 5 \\ -21+8 & 12-1 & -15+0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 5 \\ -13 & 11 & -15 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

6) <u>Основное правило вычисления определителей любого порядка</u>:
Определитель квадратной матрицы равен *сумме произведений элементов какой-либо i-той строки (или j-того столбца) на их алгебраические дополнения*.

det A = $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ (i=1,2,…,n) (разложение определителя по i-той строке) = $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ (j=1,2,…,n) (разложение определителя по j-тому столбцу).

<u>Следствие</u>. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

<u>Примеры</u>.

Применим основное правило вычисления определителей для определителя 3-го порядка. Разложение определителя можно проводить по элементам любого ряда

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} * A_{11} + a_{12} * A_{12} + a_{13} * A_{13} \\ (\textit{разложение} \cdot \textit{по} \cdot \textit{элементам} \cdot 1 - \textit{й} \cdot \textit{строки}) \\ a_{13} * A_{13} + a_{23} * A_{23} + a_{33} * A_{33} \\ (\textit{разложение} \cdot \textit{по} \cdot \textit{элементам} \cdot 3 - \textit{го} \cdot \textit{столбца}) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix} = 1*(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} + (-2)*(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 3*(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = 1*33+2*(-2)+3*(-26)=-49$$

Очевидно, что проще всего вычислять определитель, если в каком – либо ряду два нуля: тогда нужно вычислить только одно слагаемое. Если в исходном определителе нет нулей, то их можно получить, используя свойства определителя.
Получим два нуля в первом столбце: для этого умножим первую строку на (-4) и прибавим ко второй, затем умножим первую строку на (-6) и прибавим к третьей.

$$\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 - 4S_1 \\ S_3 - 6S_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 4 & -11 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = -49$$

Получать нули удобно в ряду, где есть 1. Если единицы нет, то ее нужно сначала получить.

$$\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 3 & 11 & -2 \\ 8 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 - S_1 \\ S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \textit{получаем} \cdot 1 \cdot \textit{во} \cdot \textit{второй} \\ \textit{строке} \cdot \textit{вместо} \cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 1 & 7 & 5 \\ 8 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 - 2S_2 \\ S_2 \\ S_3 - 8S_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -10 & -17 \\ 1 & 7 & 5 \\ 0 & -51 & -43 \end{vmatrix} = 1*(-1)^3 \begin{vmatrix} -10 & -17 \\ -51 & -43 \end{vmatrix} = -(430-867) = 437.$$

Вычисление определители высших порядков.

Определители высших порядков можно вычислять двумя способами:
1. Последовательное понижение порядка определителя вплоть до второго, получая в какой-либо строке (или столбце) все нули, кроме одного элемента и раскладывая определитель по этой строке (или столбцу).
2. Привести матрицу к треугольному виду и использовать последнее следствие.
Рассмотрим второй способ вычисления определителей высших порядков:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ -2S_1 + S_2 \\ -3S_1 + S_3 \\ -4S_1 + S_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ -2S_2 + S_3 \\ -7S_2 + S_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_3 + S_4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 40 = 160$$

$$\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} \begin{vmatrix} 6 & 8 & 9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 - S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} S_4 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 9 & -12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 - 4S_1 \\ S_3 + 3S_1 \\ S_4 - 6S_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 21 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} S_1 \\ S_3 \\ S_2 \\ S_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 21 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 + 2S_2 \\ S_4 + 2S_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 21 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 - 10S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -26 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_4 \\ S_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -26 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 - 2S_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 55 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 55 = 55$$

Тема 3. Метод Крамера решения системы n линейных уравнений с n неизвестными

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\ldots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Матрица коэффициентов при неизвестных A_{nxn} называется основной матрицей системы. Основная матрица такой системы квадратная.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется **определителем системы**.

Если определитель системы отличен от нуля, то система называется **невырожденной**.

<u>Теорема.</u> Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы отличен от нуля ($\Delta \neq 0$).

Неизвестные системы находятся по формулам Крамера

$$x_k = \Delta_k / \Delta,$$

где Δ – определитель основной матрицы A, Δ_k – определитель, который получается из определителя Δ заменой k-того столбца столбцом свободных членов.

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 27 \\ 8x + 7y = 19 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 8 \cdot (-4) = 21 + 32 = 53 \neq 0 \Rightarrow$$ система имеет единственное решение

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 27 & -4 \\ 19 & 7 \end{vmatrix} = 27 \cdot 7 - 19 \cdot (-4) = 265.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 27 \\ 8 & 19 \end{vmatrix} = 57 - 216 = -159.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{265}{53} = 5,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-159}{53} = -3.$$

От.: x=5, y = -3.

Пример 2.

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & -2 \end{cases}$$

$\Delta = 14 \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение

$\Delta_1 = -14$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 14$.

$x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$.

Тема 4. Обратная матрица. Условия ее существования. Способ нахождения.

Опр. Квадратная матрица А называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Опр. Матрица A^{-1} называется *обратной* для невырожденной матрицы А , если произведение матриц А и A^{-1} равно единичной матрице

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E.$$

Опр. Матрица A^*, составленная из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы А , называется *союзной* матрицей.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Опр. Матрица $\widetilde{A}$, полученная транспонированием союзной матрицы А*, называется *присоединенной* матрицей.

$$\widetilde{A} = A^{*T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема. Если определитель матрицы А не равен нулю, тогда существует единственная обратная матрица A^{-1}, определяемая формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} * \widetilde{A}$$, где $\widetilde{A}$ - присоединенная матрица.

Пример. Найти обратную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \det A = 14 \neq 0 \Rightarrow \exists\ A^{-1}.$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix};$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2;\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 11;\ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}-2 & 11 & 5\\ 2 & 4 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{pmatrix};\ \text{A}^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2 & 11 & 5\\ 2 & 4 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{pmatrix}.$$

Проверка A^{-1}x A:

$$\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2 & 11 & 5\\ 2 & 4 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{pmatrix}\text{x}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}14 & 0 & 0\\ 0 & 14 & 0\\ 0 & 0 & 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Тема 5. Матричные уравнения.

Пусть А и В известные матрицы, а Х – неизвестная матрица, связанная с матрицами А и В некоторым уравнением. Задача состоит в нахождении матрицы Х. Рассмотрим два основных типа матричных уравнений и их решение:

1. А*Х= В;

Умножим слева обе части уравнения на матрицу, обратную к А:
A^{-1}* А*Х = A^{-1}*В, т.к. A^{-1}* А = Е, то получим
Е*Х = A^{-1}* В. Умножение на матрицу Е не изменяет матрицу, поэтому решение уравнения:
Х = A^{-1}* В.

2. Х*А = В.

Умножим справа обе части уравнения на матрицу, обратную к А:
Х*А*A^{-1} = В*A^{-1} , т.к А*A^{-1} = Е то получим
Х*Е= В*A^{-1}. Умножение на матрицу Е не изменяет матрицу, поэтому решение уравнения:
Х = В*A^{-1}.

Таким образом, решение матричных уравнений связано с нахождением обратной матрицы для матрицы А и умножение ее на матрицу В слева или справа в зависимости от типа уравнения.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $X\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 0\\ -5 & 9 & 0\\ -2 & 15 & 0\end{pmatrix}$.

Это уравнение 2-го вида Х*А = В, его решение Х = В*A^{-1}.
Найдем матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\Delta A=\begin{array}{r}S_1\\ S_2\\ S_3\end{array}\begin{vmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}S_1\\ 2\cdot S_1+S_2\\ -1\cdot S_1+S_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}5 & 3 & 1\\ 11 & 3 & 0\\ -10 & -1 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^4\begin{vmatrix}11 & 3\\ -10 & -1\end{vmatrix}=19\neq 0.$$

Составляем союзную матрицу. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы А. Алгебраическими дополнениями будут являться миноры элементов, взятые со своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, в у которых стоит данный элемент, четная, и с противоположным знаком, если эта сумма нечетная.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -13;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -25;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -18.$$

Запишем присоединенную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}.$$

Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку и убедимся, что A^{-1}x A = E.
Найдем матрицу X:

$$X = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 19 & 38 & 57 \\ 76 & 95 & 114 \\ 133 & 157 & 171 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Это уравнение 1-го вида A*X= B, решение которого X = A^{-1}* B.
Сначала найдем матрицу A^{-1}.

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}.$$

Союзная матрица $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -10 & 2 & -8 \\ 9 & -3 & 8 \end{pmatrix}$;

Присоединенная матрица $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$;

Находим матрицу X :

$$X = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тема 6. Матричный метод решения системы n линейных уравнений с n неизвестными

Пусть требуется решить систему n линейных уравнений с n неизвестными. Пусть A_{nxn} – основная матрица системы, составленная из коэффициентов при неизвестных, B_{nx1} – матрица-столбец свободных членов, X_{nx1} матрица-столбец из неизвестных.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X, следовательно эти матрицы можно умножать. По правилу перемножения матриц будем иметь матричное уравнение

A*X = B – матричная запись исходной системы.

Решение такого матричного уравнения $X = A^{-1} * B$.

<u>Теорема.</u> Если определитель основной матрицы системы не равен нулю, тогда система имеет единственное решение, которое находится по формуле

$$X = A^{-1} * B.$$

Таким образом, для того чтобы решить систему n линейных уравнений с n неизвестными матричным способом, надо

1) найти матрицу, обратную основной матрице системы;
2) умножить полученную обратную матрицу на матрицу-столбец свободных членов.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 \quad x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$: B = $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

X = A^{-1}* B, det A = 14 $\neq 0 \Rightarrow \exists$ A^{-1} и система имеет единственное решение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 11 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Замечание. Решение систем методом Крамера и матричным методом нецелесообразно проводить для случая n > 3.

Тема 7. Ранг матрицы

При рассмотрении свойств определителя мы отмечали, что определитель равен нулю, если ряды матрицы определителя линейно зависимы, т.е. один может быть представлен в виде линейной комбинации остальных.
Если ни один из рядов матрицы нельзя представить как линейную комбинацию остальных, ряды матрицы являются линейно независимыми. Таким образом, мы подходим к понятию ранга матрицы.
Опр. Пусть дана матрица A размера (mxn) и пусть число s >1, s $\leq$ m, s $\leq$ n. Выберем в матрице A произвольно s разных строк и s разных столбцов. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка s. Определитель этой матрицы называется *минором порядка s матрицы A*.

Пример. A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & -7 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Опр. *Рангом матрицы A* называется наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы и обозначается

rang A = r.

Если ранг матрицы равен r, это значит, что в матрице найдется хотя бы один минор порядка r, не равный нулю, а все миноры более высокого порядка равны нулю.

Опр. Любой, не равный нулю ***минор*** матрицы A порядка, равного рангу матрицы A, называется ***базисным***.

Теорема (о ранге матрицы). *Ранг матрицы* равен максимальному числу линейно независимых строк этой матрицы.
Следствие. Максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов в этой матрице.

Рассмотрим методы вычисления ранга матрицы.

Таких методов два.

Первый метод – *метод окаймляющих миноров* – основан на определении ранга матрицы.

Непосредственным вычислением находим минор к-того порядка, не равный нулю (обычно к=2). Далее вычисляем по очереди все миноры к+1 порядка, содержащие внутри себя минор к-того порядка (окаймляющие этот минор), пока не найдем минор $\neq 0$. Если среди окаймляющих миноров нет ни одного минора $\neq 0$, то ранг матрицы r = к. Если найдется минор к+1 порядка $\neq 0$, то вычисляются окаймляющие его миноры к+2 порядка. И т.д.

Второй метод- *метод элементарных преобразований* – состоит в том, что с помощью элементарных преобразований матрицу приводят к квазитреугольному виду.

Опр. Элементарными называются следующие преобразования матрицы:

1. транспонирование;
2. перестановка двух параллельных рядов матрицы;
3. умножение некоторого ряда матрицы на отличное от нуля число;
4. прибавление к одному ряду матрицы другого параллельного ряда, умноженного на любое число;
5. вычеркивание нулевого ряда;
6. вычеркивание одного из двух пропорциональных или одинаковых параллельных рядов.

Теорема. Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Т.о. для нахождения ранга матрицы используются те же приемы, что и при вычислении определителей высокого порядка. Выявляемые при этом линейно зависимые строки вычеркиваются, а по количеству оставшихся линейно независимых строк судят о ранге.

Число ненулевых строк квазитреугольной матрицы равно рангу матрицы.

Пример 1. Найти ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

A(3x4) $\Rightarrow$ r(A) ≤ 3

1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=7\neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2,$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0. \Rightarrow r(A) = 2.$$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$

Пример 2. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2-2S_1 \\ S_3-5S_1 \\ S_4-7S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3-2S_2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad r(A) = 3$$

Пример 3. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 - S_1 \\ S_4 - S_1 \\ S_5 - 2S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix} \ r(A) = 2$$

Пример 4. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix} \sim S_4 = 3S_1,\ S_5 = -2S_2$$

$$\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 49 & 40 & 73 \\ 73 & 59 & 98 \\ 47 & 36 & 71 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 3S_1 \\ S_4 - 2S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 24S_1 \\ S_3 - S_1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -29 & 12 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \ r(A) = 3$$

Тема 8. Общие понятия системы линейных уравнений.

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

С этой системой уравнений связаны следующие матрицы.

Матрица коэффициентов при неизвестных называется основной матрицей системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица-столбец свободных членов B и матрица-столбец неизвестных X

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Если к основной матрице A добавить столбец свободных членов B, получится расширенная матрица системы A_p.

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Опр. *Решением* системы линейных уравнений называется совокупность чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, подстановка которых вместо $x_1, x_2, \dots, x_n$ соответственно обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.
Опр. *Совместной* называется система, имеющая хотя бы одно решение. Несовместной называется система, не имеющая ни одного решения.
Опр. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение. Совместная система называется неопределенной, если она имеет бесконечное множество решений.
Опр. Две системы называются *эквивилентными* или равносильными, если любое решение одной из них является также решением другой и обратно, т.е если они имеют одно и то же множество решений. Любые две несовместные системы считаются эквивалентными.
Решить систему – это значит выяснить совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Тема 9. Общий подход к решению систем уравнений

Решение вопроса о совместности системы основано на теореме Кронекера-Капелли.

Теорема. Система линейных уравнений **совместна** тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы

$$\text{rang } A = \text{rang } A_p.$$

Для того, чтобы ответить на вопрос об **определенности** системы, надо сравнить **ранг** основной матрицы системы с **числом неизвестных** системы n.
Если ранг матрицы A равен числу неизвестных ($r = n$), то система имеет единственное решение и является определенной.
Если ранг матрицы A меньше числа неизвестных ($r < n$), то система имеет бесконечное множество решений.
Отметим, что обычно при решении конкретных систем линейных уравнений отдельно вопрос о совместности системы не рассматривается, так как ответ на него получается в процессе решения системы методом Гаусса.

Правило решения произвольной системы линейных уравнений

1. Найти ранг основной и расширенной матрицы системы. Если $\text{rang } A \neq \text{rang } A_p$, то система несовместна (не имеет решений).

2. Если r = rang A = rang A_p, система совместна. Если r = n, то система имеет единственное решение, которое находим по правилу Крамера или матричным методом (можно методом Гаусса).
   Если r < n, то найти какой-нибудь **базисный минор** порядка r (любой, не равный нулю минор матрицы А порядка, равного рангу матрицы А, называется базисным). Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют **главными** и оставляют слева, а остальные n – r неизвестных называют **свободными** и переносят в правые части уравнений.
3. По правилу Крамера (или методу Гаусса) найти выражения главных неизвестных через свободные. Получено общее решение системы.
4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти частные решения системы.

2) Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + \ \ x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - \ \ x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

♦ $r(A) = r(\bar{A}) = 2$. Берем два первых уравнения:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \boxed{x_3 + x_4} = 1, \\ x_1 - 2x_2 + \boxed{x_3 - x_4} = -1. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = \ \ 1 - x_1 + 2x_2, \\ x_3 - x_4 = -1 - x_1 + 2x_2. \end{cases} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - x_1 + 2x_2 & 1 \\ -1 - x_1 + 2x_2 & -1 \end{vmatrix} = 2x_1 - 4x_2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 - x_1 + 2x_2 \\ 1 & -1 - x_1 + 2x_2 \end{vmatrix} = -2.$$

Следовательно, $x_3 = -x_1 + 2x_2$, $x_4 = 1$ — общее решение. Положив, например, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, получаем одно из частных решений: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. ♦

Тема 10. Метод Гаусса решения произвольной системы линейных уравнений.

Метод Гаусса называют также методом последовательного исключения неизвестных. Суть метода состоит в том, что путем элементарных преобразований из всех уравнений системы, кроме первого, исключают неизвестное x_1. Далее из всех уравнений, кроме первого и второго, исключают неизвестную x_2 и т.д. На практике все эти действия принято проводить не над уравнениями, а над строками расширенной матрицы системы. К элементарным относятся следующие преобразования:

1) перестановка двух строк;

2) умножение всех элементов строки на любое отличное от нуля число;

3) прибавление ко всем элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженной на одно и то же число.

4) вычеркивание из матрицы нулевых строк, одной из двух одинаковых строк, одной из двух пропорциональных строк.

Это связано с тем, что эти элементарные преобразования не меняют эквивалентность системы (т.е. не меняют множество решений системы и ранг матрицы).

В результате элементарных преобразований основная матрица приведется к виду треугольника (если ранг матрицы равен числу неизвестных) либо к виду трапеции (если ранг матрицы меньше числа неизвестных), так как в последнем уравнении останется одно неизвестное, в предпоследнем – два и т.д. Этот процесс называется прямым ходом метода Гаусса.

Заметим, что при этом параллельно решаются вопросы о совместности и определенности системы.

Обратный ход метода Гаусса состоит в следующем: из последнего уравнения находим единственное входящее в него неизвестное, подставляем полученное значение в предпоследнее уравнение и находим второе неизвестное и т.д., пока не дойдем до первого уравнения, в котором уже найдены все неизвестные, кроме одного. Таким образом, получим совокупность значений неизвестных, образующих решение системы.

Если *ранг основной матрицы системы меньше числа неизвестных*, т.е. система имеет бесконечное множество решений, то поступаем следующим образом.

1.Находим базисный минор.

2. Неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор (базисные неизвестные), оставляем слева, а остальные n-r неизвестных переносим в правые части уравнений и называем свободными.

3.Находим выражение базисных неизвестных через свободные неизвестные.

4. Придавая свободным неизвестным любые числовые значения, находим соответствующие значения базисных неизвестных, т.е. находим частные решения исходной системы.

Пример 1.

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -5x_3 & +x_4 & = & 8 \\ x_1 & -3x_2 & & -6x_4 & = & 9 \\ & 2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & -5 \\ x_1 & +4x_2 & -7x_3 & +6x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы, поменяв сразу местами первое и второе уравнение (всегда удобно иметь единицу в верхнем левом углу матрицы). Приводим эту матрицу к треугольному виду.

$$A_p = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & ! & 9 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & ! & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & ! & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & ! & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 \\ S_4 - S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & ! & 9 \\ 0 & 7 & -5 & 13 & ! & -10 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & ! & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 12 & ! & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 3S_3 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & ! & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & ! & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & ! & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 12 & ! & -9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 - 2S_2 \\ S_4 - 7S_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & ! & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & ! & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & ! & -15 \\ 0 & 0 & 7 & -37 & ! & -44 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3/3 \\ S_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & ! & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & ! & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & ! & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -37 & ! & -44 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 - 7S_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 & ! & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & ! & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & ! & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & ! & -9 \end{pmatrix}$$

Матрица приведена к виду трапеции (все элементы стоящие под главной диагональю равны нулю). В обеих матрицах 4 ненулевые строки, значит в системе нет линейно зависимых уравнений и ранги матриц равны 4. Следовательно, система совместна и определенна, т.к. ранг матриц равен числу неизвестных.

Согласно полученной матрице запишем систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 5 \\ x_3 - 4x_4 = -5 \\ -9x_4 = -9 \end{cases}$$

Применим обратный ход метода Гаусса:

Из последнего уравнения находим $x_4 = 1$. Подставляем x_4 в предпоследнее уравнение и получим $x_3 = -1$. Полученные значения x_3 и x_4 подставляем во второе уравнение и получаем $x_2 = -4$. Из первого уравнения находим $x_1 = 3$.

Итак единственное решение системы

X = $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Подставляя полученные значения неизвестных в каждое уравнение исходной системы, мы можем убедиться, что полученное решение верно.

Пример 2.

$$\begin{cases} 2x_1 & -4x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & -4x_4 & = & 2 \\ & x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & -7x_2 & +4x_3 & -4x_4 & = & 5 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к виду трапеции, предварительно переставив местами 1-ю и 2-ю строки.

$$A_p = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & ! & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & ! & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & ! & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & ! & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 \\ S_4 - 4S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & ! & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & ! & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & ! & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & ! & -3 \end{pmatrix} \sim$$

Переставим 2-ую и 3-ью строки и получим нули ниже элемента a_{22}

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & ! & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & ! & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & ! & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & ! & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 - S_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & ! & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & ! & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & ! & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & ! & -4 \end{pmatrix} \quad S_4 = S_3.$$

Вычеркнем 4-ю строку, как одну из двух одинаковых строк.
Очевидно, что rang A = rang A_p = 3 т.к. три ненулевые строки в матрицах.
Итак система совместна, но является неопределенной, т.к. ранг основной матрицы системы меньше числа неизвестных
Выделим минор второго порядка $\neq 0$,т.е. базисный минор

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

В соответствии с выбором базисного минора выбираем базисные неизвестные x_1 ,x_2 , x_3 и свободные неизвестные x_4.
Базисные неизвестные остаются в левой части уравнений, а свободные переносятся в правую часть и входят в столбец свободных членов. Подчеркнем, что количество базисных неизвестных всегда равно рангу матрицы А количество свободных неизвестных равно разности числа неизвестных в системе и ранга матрицы (n-r).
Итак эквивалентная система будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 - & 2x_2 + & x_3 - & 4x_4 & = 2 \\ & x_2 - & x_3 + & 3x_4 & = 1 \\ & & x_3 + & 9x_4 & = -4 \end{cases} . \Rightarrow \begin{cases} x_1 - & 2x_2 + & x_3 & = 4x_4 + & 2 \\ & x_2 - & x_3 & = -3x_4 + & 1 \\ & & x_3 + & = -9x_4 - & 4 \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_3 = -4 - 9x_4$.

Подставляя x_3 во второе уравнение находим x_2 :
$x_2 = x_3 - 3x_4 + 1 = -4 - 9x_4 - 3x_4 + 1 = -3 - 12x_4$.
Подставляя x_3 и x_2 в первое уравнение находим x_1 :
$x_1 = 4x_4 + 2 - x_3 + 2x_2 = 4x_4 + 2 - (-4 - 9x_4) + 2(-3 - 12x_4) =$
$= 4x_4 + 2 + 4 + 9x_4 - 6 - 24x_4 = 11x_4$
Решение системы запишется в виде:

$$X=\begin{pmatrix}-11x_4\\-3-12x_4\\-4-9x_4\\x_4\end{pmatrix}.$$

Получили решение, в котором базисные неизвестные выражаются через свободные. Можно в качестве свободных неизвестных брать произвольные числовые значения с и записывать общее решение системы $X_{общ.}$. Задавая свободным неизвестным с любые значения и вычисляя соответствующие базисные неизвестные, получаем каждый раз новое частное решение $X_{частн.}$.

$$X_{общ.}=\begin{pmatrix}-11c\\-3-12c\\-4-9c\\c\end{pmatrix}.\quad X_{част.}=\begin{pmatrix}0\\-3\\-4\\0\end{pmatrix};\quad X_{част.}=\begin{pmatrix}-11\\-15\\-13\\1\end{pmatrix}.$$

Первое частное решение получено из общего при значениях c = 0, а второе – при значениях c = 1. Частных решений можно получить бесконечное множество.

Пример 3.

$$\begin{cases}2x_1+x_2+4x_3+x_4=0\\3x_1+2x_2-x_3-6x_4=0\\7x_1+4x_2+6x_3-5x_4=0\\x_1+8x_3+7x_4=1\end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы, поставив на первое место последнюю строку

$$A_p=\begin{pmatrix}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&8&7&!&1\\2&1&4&1&!&0\\3&2&-1&-6&!&0\\7&4&6&-5&!&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}S_1\\S_2-2S_1\\S_3-3S_1\\S_4-7S_1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&8&7&!&1\\0&1&-12&-13&!&-2\\0&2&-25&-27&!&-3\\0&4&-50&-54&!&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}S_1\\S_2\\S_3-2S_2\\S_4-4S_2\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1&0&8&7&!&1\\0&1&-12&-13&!&-2\\0&0&-1&-1&!&1\\0&0&-2&-2&!&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}S_1\\S_2\\S_3\\S_4-2S_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&8&7&!&1\\0&1&-12&-13&!&-2\\0&0&-1&-1&!&1\\0&0&0&0&!&-1\end{pmatrix}$$

$r(A)=3;\ r(A_p)=4\Rightarrow r(A)\neq r(A_p)\Rightarrow$ система не совместна.

Получили, что в основной матрице системы 3 ненулевые строки, а в расширенной матрице – четыре, т.е. ранг основной матрицы не равен рангу расширенной матрицы и система несовместна.

Пример 4.

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\2x_1+4x_2+6x_3=2\\3x_1+6x_2+9x_3=3\end{cases}$$

Система 3-х линейных уравнений с 3-я неизвестными.

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к виду трапеции:

$$\begin{pmatrix} S \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ! & 1 \\ 2 & 4 & 6 & ! & 2 \\ 3 & 6 & 9 & ! & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 = 2S_1 \\ S_3 = 3S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ! & 1 \end{pmatrix}$$

rang A = rang $A_p = 1 < 3$

Итак, мы получили, что в основной и расширенной матрице системы 1 ненулевая строка т.е. система совместна и имеет множество решений.

Итак, эквивалентная система будет иметь вид

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$.

Так как все миноры первого порядка отличны от нуля, любую неизвестную можно взять за базисную, пусть это будет x_1, тогда x_2 и x_3 будут свободными неизвестными.
Оставим x_1 слева, а перенесем вправо x_2 и x_3 и получим уравнение:

$x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3$

Решение системы запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} 1 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$X_{общ.} = \begin{pmatrix} 1 - 2c_1 - 3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. $X_{частн.}(c_1=0,\ c_2=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $X_{частн.}(c_1=0,\ c_2=1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Дополнительная лекция 1

Однородные системы

<u>Опр</u>. Система линейных уравнений называется однородной, если все ее свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна. В этом нетрудно убедиться, так как такая система всегда имеет решение

$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0,$

которое называется нулевым или тривиальным.

Совместность однородной системы следует и из теоремы Кронекера-Капелли. Дополняющий основную матрицу до расширенной нулевой столбец свободных членов всегда можно вычеркнуть и матрицы всегда имеют одинаковые ранги.
Интерес представляет нахождение нетривиальных решений.

Если $rang\ A = n$, то система имеет единственное тривиальное решение. В этом случае $\Delta A \neq 0$.

Если $rang\ A < n$, то система имеет бесконечное множество решений. В этом случае $\Delta A = 0$.

Собственные векторы и собственные значения матриц

Опр. Всякий ненулевой столбец X называется собственным вектором матрицы A, если найдется такое число λ, что выполняется равенство

$A \cdot X = \lambda \cdot X$.

Это число λ называется собственным значением матрицы A, соответствующим собственному вектору X.

Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Можно подобрать матрицу-столбец $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ такую, что будет выполнять равенство

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица-столбец (или вектор-столбец) X является собственным вектором матрицы A, а число λ=3 – собственным значением матрицы, соответствующим этому собственному вектору.

Отметим, что задача имеет еще одно решение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \text{т.е. } \lambda = 2,\ X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим метод нахождения собственных векторов и собственных значений матриц.

Имеем $A \cdot X = \lambda \cdot X$, где $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Поскольку

$$\lambda \cdot X = \lambda \cdot E \cdot X = (\lambda \cdot E) \cdot X,$$

Где E – единичная матрица, то можно записать

$$A \cdot X = (\lambda \cdot E) \cdot X,$$

Или окончательно

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0.$$

Так как $A^* = A - \lambda \cdot E$ - матрица, то это выражение есть краткая запись однородной системы линейных уравнений.

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ b_1 & b_2 - \lambda \end{pmatrix};$$

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ b_1 & b_2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В итоге получаем систему

$$\begin{cases} (a_1 - \lambda)x_1 + a_2 x_2 = 0 \\ b_1 x_1 + (b_2 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Как уже отмечалось выше, система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ b_1 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (**)$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением матрицы А. После раскрытия определителя, получим квадратное уравнение относительно λ:

$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

Корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 называют собственными значениями матрицы А.

Далее возьмем любой корень характеристического уравнения и подставим его в систему (*). При этом определитель системы будет равен нулю, и система будет иметь ненулевое решение. Какое-либо конкретное решение и будет определять значения x_1, x_2, которые называются координатами собственного вектора.

Если уравнение (**) имеет два различных корня, то получим два собственных вектора соответственно.

При решении квадратного уравнения (**) возможны три случая:

1. Корни λ_1 и λ_2 – действительные различные (дискриминант уравнения больше нуля). В этом случае мы получим два собственных вектора с действительными координатами.
2. Корни λ_1 и λ_2 – действительные, равные (дискриминант уравнения равен нулю). В этом случае мы можем получить один собственный вектор с действительными координатами.
3. Корни λ_1 и λ_2 – комплексно-сопряженные (дискриминант уравнения меньше нуля). В этом случае получим два собственных вектора с комплексными координатами.

Замечание:

Опр. Симметрической матрицей называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу, т.е.

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Если матрица А – *симметрическая*, то все *корни* ее характеристического уравнения *действительны*.

Для матриц третьего и более высокого порядка схема нахождения собственных значений и собственных векторов аналогична.

Пример. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение в данном случае

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

Откуда $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9.$

Получили два различных действительных собственных значения.

Запишем систему для нахождения собственных векторов

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 & + (8-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}.$$

Подставляем в эту систему значение $\lambda_1 = 4$

$$\begin{cases} (5-4)x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 & + (8-4)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 0.$$

Уравнения в системе линейно зависимые, одно из них можно отбросить(ранг системы равен 1). Система имеет бесконечное множество решений

$$x_2 = -\frac{x_1}{2}.$$

Если взять $x_1 = 2$, то получим $x_2 = -1$. Тогда собственный вектор $\vec{p}_1 = \{2, -1\}$.

Подставляем в эту систему значение $\lambda_2 = 9$

$$\begin{cases} (5-9)x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 & + (8-9)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 - x_2 = 0.$$

Уравнения в системе линейно зависимые, одно из них можно отбросить (ранг системы равен 1). Система имеет бесконечное множество решений

$$x_2 = 2x_1.$$

Если взять $x_1 = 1$, то получим $x_2 = 2$. Тогда собственный вектор $\vec{p}_2 = \{1, 2\}$.

<u>Пример</u>. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение</u>. Характеристическое уравнение в данном случае

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение

$$\lambda^3 - 72\lambda^2 + 36 = 0.$$

Методом подбора (делители свободного члена 36) находим один из корней уравнения λ_1. Разделив затем левую часть уравнения на $\lambda - \lambda_1$ и приравняв к нулю результат, получим квадратное уравнение.

Итак, убеждаемся, что $\lambda_1 = 3$ - корень кубического уравнения.

Так как $(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36):(\lambda - 3) = \lambda^2 - 4\lambda - 12$.

Корни полученного квадратного уравнения $\lambda_2 = 6, \lambda_3 = -2$.

Получили три различных действительных собственных значения.

Запишем систему для нахождения собственных векторов

$$\begin{cases} (1-3)x_1 + & x_2 + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 + & (5-3)x_2 + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + & x_2 + & (1-3)x_3 & = & 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -2x_1 + & x_2 + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 + & 2x_2 + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + & x_2 + & -2x_3 & = & 0 \end{cases}.$$

Решим эту систему методом Гаусса. Система является однородной, расширенная матрица системы совпадает с основной. Приведем основную матрицу системы к квазитреугольному виду.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 + 2S_1 \\ S_3 - 3S_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \quad (S_3 = -S_2) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = r(A_p) = 2$$

Возьмем базисный минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$.

В соответствии с выбором базисного минора, базисные неизвестные x_1 ,x_2 и свободные неизвестные x_3.

Базисные неизвестные оставим в левой части, а свободные перенесем в правую часть.

Итак эквивалентная система будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 + & 2x_2 + & x_3 & = 0 \\ & 5x_2 + & 5x_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + & 2x_2 & = & -x_3 \\ & 5x_2 & = & -5x_3 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения находим x_2:

$x_2 = -x_3$.

Подставляя x_2 в первое уравнение системы, находим x_1:

$x_1 = -x_3 - 2x_2 = -x_3 - 2(-x_3) = x_3$.

Решение системы запишется в виде:

$X = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Частное решение, определяющее первый собственный вектор $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Аналогично найдем второй и третий собственные векторы, соответствующие двум другим собственным значениям:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$