ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений

Опр. *Дифференциальным уравнением* $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ называется уравненние, содержащее независимую переменную x, функцию y(x) и ее проиводные.

Если искомая функция y = f(x) есть функция одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Опр. *Порядок диф. ур-ия* определяется порядком старшей производной, входящей в уравнение

$y' - xy = e^x$ - 1-го порядка,

$y''' - 5y'' + 6y' = xe^x$ - 3-го порядка.

Опр. *Решением диф. ур-ия* $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ называется любая функция $y = \varphi(x)$ при условии, что при подстановке этой функции и ее производных в ур-ие - это уравнение обращается в тождество.

График функции $y = \varphi(x)$ называется *интегральной кривой* уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Процесс нахождения решения диф. ур-ия называется *интегрирование*м этого уравнения. В теории диф. ур-ий изучаются методы интегрирования диф. ур-ий. Основная задача интегрирования диф. ур-ия состоит в нахождении всех решений этого уравнения и изучении их свойств.

Пример. Уравнение $y' = 2x$ имеет семейство решений $y = x^2 + C$ - интегральные кривые - параболы. Все решения – элементарные функции.

2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

К диф. ур-иям приводят многочисленные задачи физики, механики и т.д.

Задача 1. Известно, что скорость распада радия пропорциональна его количеству в каждый данный момент. Найти зависимость массы m от времени t.

$$\frac{dm}{dt} = -km, \quad m = m(t).$$

Решение этого уравнения позволяет найти зависимость массы от времени.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$m = m_0 e^{-\alpha(t-t_0)} \tag{2.2}$$

является решением уравнения (2.1), причем величинам m_0 и t_0 можно придать содержательный смысл: m_0 — это начальное количество рассматриваемого вещества в начальный момент времени t_0. Формула (2.2) позволяет определить

3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

3.1 Основные понятия и определения

Дифференциальное уравнение первого порядка может быть задано в 3-х формах

$y' = f(x, y)$ - явная

$F(x, y, y') = 0$ - неявная

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ - дифференциальная.

Одно и то же уравнение можно выразить во всех трех формах:

$y' = \dfrac{2xy - 1}{x^2 - y^2}$ - явная,

$y'(x^2 - y^2) - 2xy + 1 = 0$ - неявная,

$(x^2 - y^2)dy - (2xy - 1)dx = 0$ - дифференциальная.

Опр. *Решением диф. ур-ия* называется любая дифференцируемая функция y = y(x), которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Интегралом уравнения называется его решение, полученное в неявном виде Ф(x,y) = 0.

Каждое диф. ур-ие 1-го порядка имеет бесконечное множество решений. Все это множество можно описать одной функцией, которая называется общим решением или общим интегралом диф. ур-ия. Из этого множества можно выбрать конкретное(частное) решение, если задать начальное условие.

Опр. *Начальным условием* для ур-ия 1-го порядка является задание значения искомой функции при заданном значении независимой переменной, т.е. $y(x_0) = y_0$.

Опр. *Общим решением диф. ур-ия* 1-го порядка называется функция y = y(x, C) в обл. Д, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) функция содержит одну произвольную постоянную С,

Опр. *Задача Коши* – нахождение частного решения, удовлетворяющего заданному начальному условию.

4) Задание начального условия $y(x_0) = y_0$ означает задание точки $M_0(x_0, y_0)$.

5) Решить задачу Коши $\acute{o}' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ означает, что из всего множества интегральных кривых, представляющих общее решение, необходимо отобрать ту единственную, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$.

3.3.8 Определение типа уравнения 1-го порядка

Решение любого дифференциального ур-ия 1-го порядка необходимо начинать с определения его типа, так как этим определяется схема его дальнейшего решения. Тип ур-ия можно практически всегда определить по его исходной записи.

В каком бы виде не было задано ур-ие, в первую очередь необходимо проверить, не относится ли оно к ур-ию с разделяющимися переменными. Если нет, и ур-ие записано в дифференциальной форме $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, то можно сразу проверить, не относится ли оно к ур-иям в полных дифференциалах. Если и это не подходит, то остается убедиться в однородности или линейности ур-ия. Как правило, в последнюю очередь остается проверить, не относится ли ур-ие к ур-ию Бернулли.Не следует также забывать о том, что ур-ие может быть линейным или типа Бернулли относительно переменной х.

Таблица 1.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Тип ур-ия	Запись	Особенности	Решение
1. Ур-ие с разделя-ющимися переменными	$y' = f(x)g(y)$ $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$	Каждая из ф-ций Зависит от одной переменной	Разделение переменной
2. Однородные	P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0	P(x,y),Q(x,y) – Однородные ф-ции	Введение переменной

	$y' = f(x,y)$	одного измерения. f(x,y)-однородная ф-ция нулевого измерения	$\frac{y}{x} = U(x)$
3. Линейные относительно x относительно y	$y' + P(x)y = Q(x)$ $x' + P(y)x = Q(y)$	Ф-ция и ее производная в первой степени	y=U(x)V(x) x=U(y)V(y)
4. Уравнение Бернулли	$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$ $x' + P(y)x = Q(y)x^{\alpha}$	Отличается от Линейного Сомножителем y^{α} или x^{α} в правой части	y=U(x)V(x) x=U(y)V(y)
5. Уравнение в полных дифференциалах	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$	$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$	Интегрируется система ф-ций $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y), \\ \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$

3.3 Основные типы уравнений первого порядка

3.3.1 Уравнения с разделенными переменными

Простейшим дифференциальным уравнением первого порядка является уравнение вида $f(x)dx + g(y)dy = 0$, характерной особенностью которого является то, что множителем при dx является функция, зависящая только от x, а множителем при dy является функция, зависящая только от y. Говорят, что в таком уравнении переменные разделены, а само уравнение называется *уравнением с разделенными переменными*.

Решение таких уравнений заключается в почленном интегрировании левой и правой его частей $\int f(x)dx + \int g(y)dy = \tilde{N}$.

Пример. Решить уравнение $\cos xdx = \sqrt{y}dy$.

$\int \cos xdx = \int \sqrt{y}dy \Rightarrow \sin x + C = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ - общий интеграл,

$y = \left[\frac{3}{2}(\sin x + C)\right]^{\frac{2}{3}}$ - общее решение.

Методы решения рассматриваемых ниже уравнений (кроме уравнений в полных дифференциалах) представляют собой способы сведения этих уравнений к уравнениям с разделенными переменными.

3.3.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Опр. Дифференциальное ур-ие $y' = f(x,y)$ или $\{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\}$ является *уравнением с разделяющимися переменными*, если функции f(x,y) {M(x,y) и N(x,y)} могут быть представлены в виде произведения двух функций, одна из которыз зависит только от x, другая – только от y: $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, $M(x,y) = M_1(x)M_2(y)$, $N(x,y) = N_1(x)N_2(y)$.

Чтобы решить уравнение с разделяющимися переменными, его нужно свести к уравнению с разделенными переменными и затем проинтегрировать.

Если ур-ие задано в явной форме

$y' = f(x,y) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \Rightarrow$,

то умножим сначала все ур-ие на dx,

$dy = f_1(x) f_2(y) dx$

а затем разделим на ф-цию, стоящую не у своего дифференциала ($f_2(x)$) и проинтегрируем полученное ур-ие

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C .$$

Если ур-ие задано в дифференциальной форме,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \Rightarrow M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 \Rightarrow$$

то раздели все ур-ие на произведение ф-ций, стоящих не у своих дифференциалов $M_2(y)N_1(x)$, а затем проинтегрируем полученное ур-ие

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0 \Rightarrow \int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C .$$

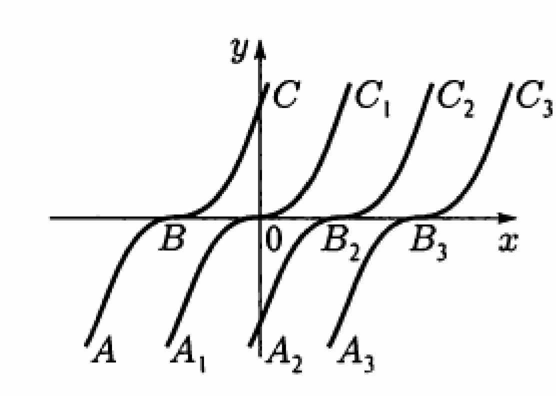
Пример 1. Найти общее и частное решение $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, y(1) = 1$.

Заменяем y' отношением dy/dx. Умножаем обе части уравнения на dx. и интегрируем полученное ур-ие

$\frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy = dx \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = x + C \Rightarrow y = (x+C)^{\frac{1}{3}}$ - общее решение.

Подставим в общее решение начальные условия и найдем C_0 и частное решение.

$1 = (1+C)^3 \Rightarrow C_0 = 0 \Rightarrow y = x^3$ - частное решение.



Пример 2. Найти общее и частное решение $y' = -\dfrac{x}{y}, M_0(3,4)$.

Заменяем y' отношением dy/dx. Умножаем обе части уравнения на dx.

$dy = -\dfrac{x}{y}dx$. Умножаем на «стоящую не у своего дифференциала» функцию y. и интегрируем полученное ур-ие

$ydy = -xdx \Rightarrow y^2 + x^2 = C^2$ - общее решение. Подставим в него M_0 и получим частное решение.

$3^2 + (-4)^2 = C^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$ - частное решение.

Пример 3. Найти общее и частное решение $y' = -\dfrac{y}{x}, y(2) = 3$.

Заменяем y' отношением dy/dx. Умножаем обе части уравнения на dx.

$dy = -\frac{y}{x}dx$. Делим на «стоящую не у своего дифференциала» функцию y и интегрируем полученное ур-ие

$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln|y| + \ln|x| = \ln C \Rightarrow xy = C$ - общее решение.

6=C$\Rightarrow$ xy=6 – частное решение.

Отметим, что постоянную интегрирования в выражение для общего решения можно вводить в произвольном виде так, как это удобно в конкретной ситуации, например, C,C/3, lnC,√C, cosC.

Пример 4. $(1+y^2)\cos x dx + y\sin^3 x dy = 0, y(\frac{\pi}{6}) = 0.$

Пример 5. $y' = \frac{y^2 \ln x}{(y-1)x}$.

Пример 6. $5^{x^2+y} y' + x = 0$.

Пример 7. $\sqrt{4+x^2}\, y' + xy^2 + x = 0$.

Пример 8. $y - xy' = 2(1 + x^2 y')$.

Пример 9. $6xdx - 6ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$.

51. $xy\,\mathrm{d}x + (x+1)\,\mathrm{d}y = 0.$

52. $\sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}x = xy\,\mathrm{d}y.$

53. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0;\ \ y(0) = 1.$

54. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2;\ \ y(x) \to -1$ при $x \to 0.$

55. $y' = 3\sqrt[3]{y^2};\ \ y(2) = 0.$

56. $xy' + y = y^2;\ \ y(1) = 0{,}5.$

57. $2x^2yy' + y^2 = 2.$

58. $y' - xy^2 = 2xy.$

59. $\mathrm{e}^{-s}\left(1 + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = 1.$

60. $z' = 10^{x+z}.$

61. $x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + t = 1.$

3.3.4. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Опр. *Функция F(x,y)* называется *однородной измерения n*, если при любом t выполняется тождество

$F(tx,ty) = t^n F(x,y)$.

$F_1(x,y) = x + 2y, F_1(tx,ty) = t(x+2y) = tF_1(x,y)$ - однородная функция первого измерения.

$F_2(x,y) = x^2 \sin\frac{x}{y}$ - однородная функция второго измерения.

$F_3(x,y) = \frac{x+y}{x}$ - однородная функция нулевого измерения.

$F_4(x,y) = \ln x - \ln y$ - однородная функция нулевого измерения.

$F_5(x,y) = (2xy-1)$ - не является однородной функцией.

Опр. *Диф. ур-ие* 1-го порядка $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется *однородным*, если P(x,y) и Q(x,y) – однородные функции одного и того же измерения.

Например $xydx + (x^2+y^2)dy = 0$,

$$x\cos\frac{y}{x}dx + y\sin\frac{y}{x}dy = 0.$$

Опр. *Уравнение* $y' = f(x,y)$ называется *однородным*, если $f(x,y)$ - однородная функция нулевого измерения.

Например $y' = \frac{x-y}{x+y}$.

Однородные уравнения с помощью подстановки $u(x) = \frac{y}{x}$ сводятся к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 1. Проинтегрировать ур-ие $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$ и найти частное решение, соотв. условию y(2)=π.

Выразим y' $\quad y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$ и убедимся, что это однородное ур-ие. Сделаем подстановку $u(x) = \frac{y}{x}$. Следовательно y = ux и y'=u'x +u . Подставим это в уравнение и получим u'x +u = u + tg u

$\frac{du}{dx}x = tgu \Rightarrow \frac{du}{tgu} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{\cos udu}{\sin u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \sin u = xC \Rightarrow \sin\frac{y}{x} = Cx$ - общий интеграл.. $\sin\frac{\pi}{2} = 2C \Rightarrow 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\frac{y}{x} = \frac{1}{2}x$ - частный интеграл.

Пример 2. $xdy - (y + \sqrt{x^2+y^2})dx = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} \Rightarrow u'x + u = u + \sqrt{1+u^2} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right| + \ln|x| + \ln|C|$$

$u + \sqrt{1+u^2} = xC \Rightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = xC$ - общий интеграл.

Пример 3. Найти общее решение диф. ур-ия. $(x-y)ydx - x^2dy = 0$.

Перед dx и dy – однородные функции 2-го измерения.

$y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$. Подставим это в ур-ие.

$(x - ux)uxdx - x^2(udx + xdu) = 0 \Rightarrow x^2u(1-u)dx - x^2udx = x^3du \Rightarrow -x^2u^2dx = x^3du \Rightarrow -u^2dx = xdu$

$-\frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2} \Rightarrow -\ln|x| + \ln|C| = -\frac{1}{u} \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{C}\right| = \frac{1}{u} \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{C}\right| = \frac{x}{y} \Rightarrow x = Ce^{\frac{x}{y}}$ - общий интеграл.

101. $(x + 2y)\,dx - x\,dy = 0.$

102. $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0.$

103. $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0.$

104. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2).$

105. $y^2 + x^2y' = xyy'.$

106. $(x^2 + y^2)y' = 2xy.$

107. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}.$

108. $xy' = y - xe^{y/x}.$

110. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}.$

111. $\left(y + \sqrt{xy}\right)\,dx = x\,dy.$

112. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$

3.3.5 Линейные уравнения 1-го порядка

<u>Опр.</u> *Линейным дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее y и y' в первых степенях

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Решение линейных диф. ур-ий 1-го порядка методом Бернулли

Решение уравнения находится в виде произведения 2-х функций:

$y = u(x)v(x), y' = u'v + v'u \Rightarrow u'v + v'u + P(x)uv = Q(x) \Rightarrow u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$.

Т.к. решение находится в виде произведения 2-х функций, на одну из них можно наложить определенное условие. Потребуем, чтобы v(x) удовлетворяла следующему уравнению (пусть выражение в скобках обращалось в нуль):

$v' + P(x)v = 0$ и тогда уравнение запишется в виде системы:

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x) \end{cases} (*)$$

Первое уравнение $\frac{dv}{dx} = -P(x)v$ - уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int P(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Подставим найденное значение v в ур-ие(*):

$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Rightarrow du = Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx$ - ур-ие с разделяющимися переменными

$u = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + C$ Перемножим u и v и найдем y:

$$y = vu = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Пример 1. $y' - y \cdot 2ctgx = \sin^3 x, y(\frac{\pi}{3}) = 2$.

У и у’ входят в уравнение в первой степени – имеем линейное уравнение.

$$y = u(x)v(x), y' = u'v + v'u \Rightarrow u'v + v'u - 2uvctgx = \sin^3 x \Rightarrow u'v + u(v' - 2vctgx) = \sin^3 x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v' - 2vctgx = 0, \\ u'v = \sin^3 x \end{cases} (*)$$

$$\frac{dv}{dx} = 2v\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = 2\frac{\cos xdx}{\sin x} \Rightarrow \ln|v| = 2\ln|\sin x| \Rightarrow v = \sin^2 x.$$

Подставим найденное значение м в ур-ие(*):

$u'\sin^2 x = \sin^3 x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \sin x \Rightarrow u = -\cos x + C \Rightarrow y = \sin^2 x(C - \cos x)$ - общее решение.

Найдем частное решение, подставим в общее решение начальное условие:

$$2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)(C_0 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)) \Rightarrow 2 = \frac{3}{4}\left(C_0 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$C_0 = \frac{19}{6} \Rightarrow y = \sin^2 x(\frac{19}{6} - \cos x) - \textit{частное решение}$$

3.3.6 Уравнения Бернулли

<u>Опр</u>. *Ур-им Бернулли* наз-ся ур-ие вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$$

При α=0 ур-ие Бернулли обращается в линейное ур-ие. Методы решения те же, что для линейного.

<u>Замечание</u>. Ур-ие может оказаться ур-ием Бернулли относительно х и х’.

$x' + P(y)x = Q(y)x^\alpha$. Решение находим в виде $x = u(y)v(y)$.

Пример 1. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

$$y = u(x)v(x), y' = u'v + v'u \Rightarrow \tilde{o}(u'v + v'u) - 4uv = \tilde{o}^2\sqrt{\acute{o}} \Rightarrow \tilde{o}u'v + u(\tilde{o}v' - 4v) = \tilde{o}^2u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} xv' - 4v = 0, \\ xu'v = x^2u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = 4v \Rightarrow v = x^4 \Rightarrow x\frac{du}{dx}x^4 = x^2u^{\frac{1}{2}}x^2 \Rightarrow \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow 2\sqrt{x} = \ln x + \ln C \Rightarrow$$

$$\sqrt{u} = \ln\sqrt{xC} \Rightarrow u = \ln^2\sqrt{xC} \Rightarrow y = uv = x^4\ln^2\sqrt{xC}\;.$$

Пример 2. Решить задачу Коши $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2, y(0) = 1$.

Решим ур-ие Бернулли методом вариации произвольной постоянной.

Ищем решение однородного ур-ия

$$y' + xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -xdx \Rightarrow \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Полагаем С = С(х) и решение исходного уравнения ищем в виде $y = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, y' = C'e^{-\frac{x^2}{2}} + Ce^{-\frac{x^2}{2}}(-x)$.

Подставляем эти выражения в исходное ур-ие

$$y = C'e^{-\frac{x^2}{2}} - xCe^{-\frac{x^2}{2}} + xCe^{-\frac{x^2}{2}} = (1+x)e^{-x}C^2e^{-x^2} \Rightarrow \frac{dC}{dx}e^{-\frac{x^2}{2}} = (1+x)e^{-x-x^2}C^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dC}{C^2} = (1+x)e^{-x-x^2}dx \Rightarrow -C^{-1} = -\int e^{-x-x^2}d(-x-\frac{x^2}{2}) \Rightarrow C^{-1} = e^{-x-\frac{x^2}{2}} + \overline{C} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{e^{-x-\frac{x^2}{2}} + \overline{C}}$$ - общее

решение. Найдем частное решение

$$1 = \frac{e^0}{e^0 + \overline{C}} = \frac{1}{1+\overline{C}} \Rightarrow 1 + \overline{C} = 1 \Rightarrow \overline{C} = 0 \Rightarrow y = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-x-\frac{x^2}{2}}} = e^x.$$

136. $xy' - 2y = 2x^4$.

137. $(2x+1)y' = 4x + 2y$.

138. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$.

139. $(xy + \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$.

140. $x^2y' + xy + 1 = 0$.

141. $y = x(y' - x\cos x)$.

142. $2x(x^2 + y)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$.

143. $(xy' - 1)\ln x = 2y$.

144. $xy' + (x+1)y = 3x^2\mathrm{e}^{-x}$.

145. $(x + y^2)\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x$.

146. $(2\mathrm{e}^y - x)y' = 1$.

147. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$.

148. $(2x + y)\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x + 4\ln y\,\mathrm{d}y$.

149. $y' = \frac{y}{3x - y^2}$.

150. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$.

151. $y' + 2y = y^2 e^x$.

152. $(x + 1)(y' + y^2) = -y$.

153. $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

154. $xy^2 y' = x^2 + y^3$.

155. $xy\,dy = (y^2 + x)\,dx$.

156. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

157. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$.

158. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$.

159. $y' x^3 \sin y = xy' - 2y$.

160. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$.

3.3.7 Уравнения в полных дифференциалах

Опр. Ур-ие $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (1) называется ур-ием в полных дифференциалах, если M(x,y), N(x,y) – непрерывные дифференцируемые ф-ции, для которых выполняются соотношения:
$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (2) , причем $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области.

Интегрирование ур-ий в полных дифференциалах

Покажем, что если левая часть ур-ия (1) есть полный дифференциал, то выполняется условие (2) и наоборот, если выполняется условие (2), то ур-ие (1) – полный дифференциал ф-ции U(x,y), т.е. ур-ие (1) имеет вид:
dU(x,y) = 0 (3) $\Rightarrow$ U(x,y) = C – общий интеграл.

Предположим сначала, что левая часть ур-ия (1) есть полный дифференциал некоторой ф-ции U(x,y), т.е.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial x}dy,$$

$$M(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}, N(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (4).$$

Дифференцируя первое соотношение по y, а второе – по x, получим
$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$.

Предполагая непрерывность вторых производных, получаем

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, т.е. равенство (2) – необходимое условие для того, чтобы левая часть ур-ия (1) была полным некоторой ф-ции U(x,y).

Покажем, что это условие является и достаточным, т.е. при выполнении условия (2) левая часть ур-ия есть полный дифференциал некоторой ф-ции U(x,y).

Из соотношения $\dfrac{\partial U}{\partial x}=M(x,y)$ находим $U=\int M(x,y)dx+\varphi(y)$. При интегрировании предполагаем, что y = const, поэтому константа интегрирования φ(y) может зависеть от y и мы предполагаем, что она дифференцируема. Подберем φ(y) так, чтобы выполнялось второе из соотношений (4). Для этого продифференцируем обе части последнего рав-ва по y и результаты приравняем

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\int\frac{\partial M}{\partial y}dx+\varphi'(y)=N(x,y),$$

т.к. $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, то можно записать $\int\dfrac{\partial N}{\partial x}dx+\varphi'(y)=N(x,y)$, т.е.

$$\varphi'(y)=N(x_0,y)-\int\frac{\partial N}{\partial x}dx \quad \text{или} \quad \varphi(y)=\int\left(N(x_0,y)-\int\frac{\partial N}{\partial x}dx\right)dy.$$

.Следовательно равенство

$$\int M(x,y)dx+\varphi(y)=\int M(x,y)dx+\int\left(N(x_0,y)-\int\frac{\partial N}{\partial x}dx\right)dy=\tilde{N}$$

будет общим интегралом уравнения (1).

<u>Пример 1</u>. Найти общий интеграл ур-ия $(2xy-1)dx+(3y^2+x^2)dy=0$.

Проверяем условие $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$: $M(x,y)=(2xy-1); N(x,y)=(3y^2+x^2)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy-1)=2x;\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(3y^2+x^2)=2x.$$

Итак, критерий выполняется на всей плоскости. Данное ур-ие является уравнением в полных дифференциалах.

Находим ф-цию U(x,y). Для этого воспользуемся первым из соотношений (4):

$$U(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)=\int(2xy-1)dx+\varphi(y)=x^2y-x+\varphi(y).$$

Найдем ф-цию φ(y). Для этого воспользуемся вторым из соотношений (4):

$$N(x,y)=\frac{\partial U}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y}(x^2y-x+\varphi(y))=x^2+\varphi'(y)=3y^2+x^2\Rightarrow\varphi'(y)=3y^2\Rightarrow$$

$\varphi(y)=y^3$ (Постоянную интегрирования здесь можно не дописывать, так как нам нужна одна из первообразных).

Тогда выражение для ф-ции U(x,y) примет вид:

$U(x,y)=x^2y-x+y^3$ и общий интеграл уравнения $U(x,y)=C$ или $x^2y-x+y^3=C$.

Отметим, что всегда можно убедиться в правильности полученного решения, продифференцировав выражение для ф-ции U(x,y) по переменным x и y и приравняв соответственно ф-циям M(x,y) и N(x,y).

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2xy-1=M(x,y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 3y^2 = N(x,y).$$

Проверка подтверждает правильность полученного решения.

Можно решать такие ур-ия проще. Покажем это на примере.

Пример 2. Найти общий интеграл ур-ия $(2y-3)dx + (2x+3y^2)dy = 0$.

Проверяем условие $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. $M(x,y) = (2y-3); N(x,y) = (2x+3y^2)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2y-3) = 2; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x+3y^2) = 2.$$

Итак, критерий выполняется на всей плоскости. Данное ур-ие является уравнением в полных дифференциалах.

Находим неопределенные интегралы

$$\int M(x,y)dx = \int (2y-3)dx = 2xy - 3x + \varphi(y),$$

$$\int N(x,y)dy = \int (2x+3y^2)dy = 2xy + y^3 + \psi(x).$$

Беря все известные слагаемые из первого результата и дописав к ни недостающие слагаемые, зависящие только от y из второго результата, получим ф-цию

$$U(x,y) = 2xy - 3x + y^3.$$

Приравняв ее произвольной постоянной, получим общий интеграл данного ур-ия.

$$2xy - 3x + y^3 = \tilde{N}.$$

Замечание. При решении ур-ий таким способом обязательно нужно проверить рав-ва:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2y - 3 = M(x,y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2x + 3y^2 = N(x,y).$$

186. $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0.$

187. $(2 - 9xy^2)\,x\,dx + (4y^2 - 6x^3)\,y\,dy = 0.$

188. $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0.$

189. $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0.$

190. $\frac{3x^2 + y^2}{y^2}\,dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}\,dy = 0.$

191. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0.$

192. $(1 + y^2 \sin 2x)\,dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0.$

193. $3x^2(1 + \ln y)\,dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy.$

194. $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1}\,dy = 0.$

$$xydx+(x+1)dy=0$$
$$\sqrt{y^2+1}\,dx=xydy$$
$$(x^2-1)y'+2xy^2=0;\;\; y(0)=1$$
$$y'ctgx+y=2$$
$$xy'+y=y^2,\;\; y(1)=0.5$$
$$2x^2yy'+y^2=2$$
$$y'-xy^2=2xy$$
$$e^{-s}\left(1+\frac{ds}{dt}\right)=1$$
$$x\frac{dx}{dt}+t=1$$

$$(x+2y)dx-xdy=0$$
$$(x-y)dx+(x+y)dy=0$$
$$(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$$
$$2x^3y'=y(2x^2-y^2)$$
$$y^2+x^2y'=xyy'$$
$$(x^2+y^2)y'=2xy$$
$$xy'-y=x\cdot tg\frac{y}{x}$$
$$xy'=y-e^{y/x}$$
$$xy'=y\cdot\cos\ln\frac{y}{x}$$
$$\left(y+\sqrt{xy}\right)dx=xdy$$
$$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$$

$$xy'-2y=2x^4$$
$$(2x+1)y'=4x+2y$$
$$y'+y\cdot tgx=\frac{1}{\cos x}$$
$$(xy+e^x)dx-xdy=0$$
$$x^2y'+xy+1=0$$
$$y=x(y'-x\cdot\cos x)$$
$$2x(x^2+y)dx=dy$$
$$(xy'-1)\ln x=2y$$
$$xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$$
$$(x+y^2)dy=ydx$$
$$(2e^y-x)y'=1$$

$\left(\sin^2 y + x\cdot ctgy\right)y' = 1$

$\left(2x + y\right)dy = ydx + 4\ln ydy$

$y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$

$\left(1 - 2xy\right)y' = y\left(y - 1\right)$

$y' + 2y = y^2 e^x$

$\left(x + 1\right)\left(y' + y^2\right) = -y$

$y' = y^4 \cos x + y\cdot tgx$

$xy^2 y' = x^2 + y^3$

$xydy = \left(y^2 + x\right)dx$

$xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

$xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$

$2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$

$y'x^3 \sin y = xy' - 2y$

$\left(2x^2 y\ln y - x\right)y' = y$

$2xydx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0$

$\left(2 - 9xy^2\right)xdx + \left(4y^2 - 6x^3\right)ydy = 0$

$e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy = 0$

$\dfrac{y}{x}dx + \left(y^3 + \ln x\right)dy = 0$

$\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$

$2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$

$\left(1 + y^2 \sin 2x\right)dx - 2y\cos^2 xdy = 0$

$3x^2\left(1 + \ln y\right)dx = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy$

$\left(\dfrac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \dfrac{\left(x^2 + 1\right)\cos y}{\cos 2y - 1} = 0$

4.2 Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Аналитический аппарат решения уравнений высшего порядка достаточно хорошо разработан для линейных уравнений. Нелинейные уравнения можно аналитически решить только, если удается понизить порядок уравнения до первого. Но понизить порядок уравнения возможно в следующих случаях.

Таблица 2.

Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Вид уравнения	Особенности	Решение
1. $y^{(n)} = f(x)$	Отсутствие в уравнении самой искомой функции и ее производных до (n-1) порядка включительно	Последовательное n –кратное интегрирование
2. $F(x,y^{(k)}, y^{(k+1)},\dots y^{(n)}) = 0$	отсутствие в уравнении самой искомой функции и ее младших производных до (k-1) порядка включительно	подстановка $y^{(k)} = z(x)$ допускает понижение порядка на k единиц
3. $F(y, y', y'') = 0$	отсутствие в нем в явном виде независимой переменной x	Порядок ур-ия можно понизить до первого подстановкой $y' = p(y)$, $y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p$.

4.2.1 Решение уравнений вида $y^{(n)} = f(x)$

Отличительной особенностью такого ур-ия является отсутствие в нем в явном виде самой искомой ф-ции y ии ее производных до (n-1) порядка включительно. Решение такого ур-ия находится путем последовательного интегрирования.

<u>Пример 1.</u> Найти общее решение ур-ия $y^{(4)} = \sin x - 2x$.

Последовательным интегрированием находим

$$y''' = \int y^{(4)}dx = \int (\sin x - 2x)dx = -\cos x - x^2 + C_1$$

$$y'' = \int y'''dx = \int (-\cos x - x^2 + C_1)dx = -\sin x - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

$$y' = \int y''dx = \int (-\sin x - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2)dx = \cos x - \frac{x^4}{12} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$y = \int y'dx = \int (\cos x - \frac{x^4}{12} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3)dx = \sin x - \frac{x^5}{60} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

4.2.2 Решение уравнений вида $F(x,y^{(k)}, y^{(k+1)},\dots y^{(n)}) = 0$

Отличительной особенностью такого ур-ия является отсутствие в нем самой ф-ции y и ее младших производных до (k-1) порядка включительно. Такое ур-ие допускает понижение порядка на k единиц при помощи подстановки $y^{(k)} = z(x)$.

<u>Пример 1</u>. Найти общее решение ур-ия $y'' x\ln x - y' = 0$.

Уравнение второго порядка не содержит в явном виде ф-цию y. Воспользуемся подстановкой $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'(x)$. Получаем ур-ие первого порядка относительно ф-ции z(x): $z'x\ln x - z = 0$. Это ур-ие допускает разделение переменных

$$\frac{dz}{dx}x\ln x = z \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x\ln x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x\ln x} \Rightarrow \ln|z| = \ln|\ln x| + \ln C_1 \Rightarrow z = C_1 \ln x.$$

Находим ф-цию y(x). Т.к. $y' = z(x) = C_1 \ln x$, то

$y=\int y'dx=\int C_1\ln xdx=C_1x(\ln x-1)+C_2$. Это и есть общее решенин ур-ия.

Пример 2. Найти частное решение ур-ия $x^3y''+x^2y'=1,\ y(1)=1,\ y'(1)=0$.

Получим сначала общее решение. Данное ур-ие – ур-ие второго порядка, которое не содержит в явном виде ф-цию y. Решим его.

$$x^3y''+x^2y'=1\Rightarrow\left|\begin{array}{l}\text{íåò} \cdot \text{ÿâíî} \cdot \text{ó}\\ y'=z(x),y''=z'(x)\end{array}\right|\Rightarrow x^3z'+x^2z=1.$$

Разделим на x^3 и получим линейное ур-ие $z'+\frac{z}{x}=\frac{1}{x^3}$. Решим его.

$$z(x)=U(x)V(x),z'=U'V+V'U\Rightarrow U'V+V'U+\frac{UV}{x}=\frac{1}{x^3}\Rightarrow U'V+U(V'+\frac{V}{x})=\frac{1}{x^3}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}V'+\dfrac{V}{x}=0,\Rightarrow\dfrac{dV}{dx}=-\dfrac{V}{x}\Rightarrow\dfrac{dV}{V}=-\dfrac{dx}{x}\Rightarrow\ln V=-\ln x\Rightarrow V=\dfrac{1}{x}\\ U'V=\dfrac{1}{x^3}\Rightarrow U'\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x^3}\Rightarrow\dfrac{dU}{dx}=\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow dU=\dfrac{dx}{x^2}\Rightarrow U=\displaystyle\int\dfrac{dx}{x^2}=-\dfrac{1}{x}+C_1\end{cases}$$

$\Rightarrow z(x)=UV=(C_1-\frac{1}{x})\frac{1}{x}$. Следовательно

$$y'=z(x)=(C_1-\frac{1}{x})\frac{1}{x}\Rightarrow y=\int(C_1-\frac{1}{x})\frac{1}{x}dx=\int(\frac{C_1}{x}-\frac{1}{x^2})dx=C_1\ln|x|+\frac{1}{x}+C_2 .$$

Общее решение $y=C_1\ln|x|+\frac{1}{x}+C_2$.

Найдем частное решение ур-ия

$$\begin{cases}y'=(C_1-\dfrac{1}{x})\dfrac{1}{x}\\ y=C_1\ln|x|+\dfrac{1}{x}+C_2\end{cases},\begin{cases}y'(1)=0\\ y(1)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(C_1-\dfrac{1}{1})=0\\ C_1\ln|1|+\dfrac{1}{1}+C_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1-1=0\\ 1+C_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=0\end{cases}.$$

Частное решение $y=\ln|x|+\frac{1}{x}$.

4.2.3 Решение уравнений вида F(y, y', y'') = 0

Характерной особенностью такого ур-ия является отсутствие в нем в явном виде независимой переменной x. Порядок ур-ия можно понизить до первого подстановкой $y'=p(y),y''=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p'p$.

Пример 1. Найти общее решение ур-ия $y''-y'e^y=0$.

$$y''-y'e^y=0\left|\begin{array}{l}\text{íåò} \cdot \text{ÿâíî} \cdot \text{õ}\\ y'=p(y),y''=p'p\end{array}\right|p'p-pe^y=0\Rightarrow p(p'-e^y)=0\Rightarrow$$

1) $p=0, \dfrac{dy}{dx}=0 \Rightarrow y=const$

2) $\dfrac{dp}{dy}=e^{y} \Rightarrow p=\int e^{y}dy=e^{y}+C_1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=e^{y}+C_1 \Rightarrow \dfrac{dy}{e^{y}+C_1}=dx \Rightarrow \begin{vmatrix} e^{y}=t \\ e^{y}dy=dt \end{vmatrix} \Rightarrow$

$$\int \frac{dt}{t(t+C_1)}=\int dx \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{t(t+C_1)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t+C_1} \\ 1=A(t+C_1)+Bt \\ t=0 \Rightarrow A=\dfrac{1}{C_1} \\ t=-C_1 \Rightarrow B=-\dfrac{1}{C_1} \end{array} \right| \Rightarrow \frac{1}{C_1}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{C_1}\int\frac{dt}{t+C_1}=x+C_2$$

$\dfrac{1}{C_1}(\ln e^{y}-\ln(e^{y}+C_1))=x+C_2 \Rightarrow \dfrac{1}{C_1}(y-\ln(e^{y}+C_1))=x+C_2$

Это общий интеграл дифференциального ур-ия.

<u>Пример 2</u>. Решить задачу Коши $y''=\dfrac{1}{\sqrt{y}}, y(0)=y'(0)=0$

$$y''=\frac{1}{\sqrt{y}}\left| \begin{array}{l} \text{íåò} \cdot \text{ÿâíî} \cdot \text{õ} \\ y'=p(y), y''=p'p \end{array} \right| \Rightarrow p'p=\frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow p\frac{dp}{dy}=\frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}}=pdp \Rightarrow$$

$\dfrac{p^{2}}{2}=2\sqrt{y}+\dfrac{C_1}{2} \Rightarrow p=\pm\sqrt{4\sqrt{y}+C_1}$ т.к. $y'(0)=p(0)=0, y(0)=0,$ то находим C_1 .

$$0=\pm\sqrt{4\sqrt{0}+C_1} \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm 2y^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x=\pm\frac{2}{3}y^{\frac{3}{4}} \Rightarrow y=\left(\frac{3}{2}x\right)^{\frac{4}{3}}.$$

<u>Пример 3</u>. Найти общее решение ур-ия $y''=\sqrt{1-y'^{2}}$

Данное ур-ие не содержит в явном виде ни ф-ции y(x), ни независимой переменной x. Таким образом, порядок этого ур-ия можно понизить как подстановкой $y'=z(x)$ так и $y'=p(y)$.

$y''=\sqrt{1-y'^{2}}$ Используем подстановку $y'=z(x)$, тогда $y''=z'(x)$.

$z'(x)=\sqrt{1-z^{2}} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx}=\sqrt{1-z^{2}} \Rightarrow \dfrac{dz}{\sqrt{1-z^{2}}}=dx \Rightarrow \arcsin z=x+C_1 \Rightarrow z=\sin(x+C_1) \Rightarrow$

$\dfrac{dy}{dx}=\sin(x+C_1) \Rightarrow y=\int\sin(x+C_1)dx=-\cos(x+C_1)+C_2$.

51. $xy\,\mathrm{d}x + (x+1)\,\mathrm{d}y = 0.$

52. $\sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}x = xy\,\mathrm{d}y.$

53. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0;\ \ y(0) = 1.$

54. $y'\operatorname{ctg} x + y = 2;\ \ y(x) \to -1$ при $x \to 0.$

55. $y' = 3\sqrt[3]{y^2};\ \ y(2) = 0.$

56. $xy' + y = y^2;\ \ y(1) = 0{,}5.$

57. $2x^2yy' + y^2 = 2.$

58. $y' - xy^2 = 2xy.$

59. $\mathrm{e}^{-s}\left(1 + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = 1.$

60. $z' = 10^{x+z}.$

61. $x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + t = 1.$

101. $(x+2y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0.$

102. $(x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y = 0.$

103. $(y^2-2xy)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0.$

104. $2x^3y' = y(2x^2-y^2).$

105. $y^2 + x^2y' = xyy'.$

106. $(x^2+y^2)y' = 2xy.$

107. $xy' - y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x}.$

108. $xy' = y - x\mathrm{e}^{y/x}.$

110. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}.$

111. $\left(y + \sqrt{xy}\right)\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y.$

112. $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y.$

136. $xy' - 2y = 2x^4.$

137. $(2x+1)y' = 4x + 2y.$

138. $y' + y\operatorname{tg} x = \sec x.$

139. $(xy + \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0.$

140. $x^2y' + xy + 1 = 0.$

141. $y = x(y' - x\cos x).$

142. $2x(x^2+y)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y.$

143. $(xy' - 1)\ln x = 2y$.

144. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$.

145. $(x + y^2)\,dy = y\,dx$.

146. $(2e^y - x)y' = 1$.

147. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$.

148. $(2x + y)\,dy = y\,dx + 4\ln y\,dy$.

149. $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$.

150. $(1 - 2xy)y' = y(y-1)$.

151. $y' + 2y = y^2 e^x$.

152. $(x+1)(y' + y^2) = -y$.

153. $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

154. $xy^2 y' = x^2 + y^3$.

155. $xy\,dy = (y^2 + x)\,dx$.

156. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

157. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$.

158. $2y' - \frac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$.

159. $y' x^3 \sin y = xy' - 2y$.

160. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$.

186. $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$.

187. $(2 - 9xy^2)\,x\,dx + (4y^2 - 6x^3)\,y\,dy = 0$.

188. $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$.

189. $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0$.

190. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}\,dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}\,dy = 0$.

191. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$.

192. $(1 + y^2 \sin 2x)\,dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0$.

193. $3x^2(1 + \ln y)\,dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy$.

194. $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \dfrac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1}\,dy = 0$.

4.3.3 Решение линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Опр. Линейным однородным ур-им n-го порядка с постоянными коэффициентами называется ур-ие вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0\,, \qquad (4.5)$$

где a_1, a_2,…,a_n – действительные числа.

Метод решения ур-ия (4.5) был предложен Эйлером. В соответствии с ним решение ур-ия ищется в виде $y(x) = e^{kx} (k = const)$. Подставляя эту ф-цию и ее производные $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx},..., y^{(n)} = k^n e^{kx}$ в ур-ие (4.5) получим
$e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n) = 0$.
Ф-ция $y(x) = e^{kx}$ будет решением ур-ия (4.5) только тогда, когда

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0 \;\; (\mathring{a}^{kx} \neq 0) \qquad (4.6)$$

и когда k – корень алгебраического ур-ия (4.6).

Ур-ие (4.6) называется характеристическим ур-ием. Это алгебраическое ур-ие n-й степени, оно имеет n корней(считая и равные корни), среди которых могут быть и комплексные.

Рассмотрим основные возможные случаи.

Корни	Частные решения	Соответствующая часть общего решения
различные действительные корни k_1, k_2, …,k_n.	$y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{k_2x},..., y_n = e^{k_nx}$	$y = C_1 e^{k_1x} + C_2 e^{k_2x} + ... + C_n e^{k_nx}$
действительные корни, среди которых *m равны между собой.* $k_1 = k_2 = … = k_m$, k_{m+1},…,k_n	$y_1 = e^{k_1x}, y_2 = xe^{k_1x},..., y_m = x^{m-}$ $y_{m+1} = e^{k_{m+1}x},..., y_n = e^{k_nx}$	$y = e^{k_1x}(C_1 + C_2 x + ... + C_m x^{m-1})$ $+C_{m+1} e^{k_{m+1}x} + ... + C_n e^{k_nx}$
простые комплексно-сопряженные корни. $k_1 = \alpha - i\beta, k_2 = \alpha + i\beta$, все остальные корни $k_3, k_4,..., k_n$ являются действительными и различными	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$ $+ C_3 e^{k_3x} + ... + C_n e^{k_nx}$
комплексно-сопряженные корни $k_1 = \alpha - i\beta, k_2 = \alpha + i\beta$ являются m-кратными. Если остальные n-2m корней являются действительным различными	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta$ $y_m = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $y_{m+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x, y_{m+2} = xe^{\alpha x}\,\mathrm{si}$ $y_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$	$y = (C_1 + ... + C_m x^{m-1})e^{\alpha x}\cos\beta x$ $+ (C_{m+1} + ... + C_{2m} x^{m-1})e^{\alpha x}\sin\beta x$ $+ C_{2m+1} e^{k_{2m+1}x} + ... + C_n e^{k_nx}$

Свойства решений линейного однородного уравнения

1. *Если функция $y_1(x)$ является каким-либо частным решением уравнения (4.5), то функция $Cy_1(x)$, где C – const, также является решением этого уравнения.*

2. *Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$…, $y_n(x)$ являются какими-либо частными решениями уравнения (4.5), то их линейная комбинация $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \ldots + C_n y_n(x)$ также является решением этого уравнения.*

Пример. Решить ур-ие $y''' - 5y'' + 6y' = 0$.
Это линейное однородное ур-ие 3-го порядка с постоянными коэффициентами.
Составляем характеристическое ур-ие
$k^3 - 5k^2 + 6k = 0 \Rightarrow k(k^2 - 5k + 6) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 2, k_3 = 3 \Rightarrow y_1 = e^{0x} = 1, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$
Общее решение имеет вид $y_{o.o} = C_1 \cdot 1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.
Пример. Решить ур-ие $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.
Это линейное однородное ур-ие 3-го порядка с постоянными коэффициентами.
Составляем характеристическое ур-ие
$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0 \Rightarrow (k+1)^3 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = -1$.
Фундаментальная система решений $y_1 = e^{-x}, y_2 = xe^{-x}, y_3 = x^2 e^{-x}$.
Общее решение $y_{o.o} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$.
Пример. Решить ур-ие $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$.
Это линейное однородное ур-ие 3-го порядка с постоянными коэффициентами.
Составляем характеристическое ур-ие
$k^3 - 2k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k^2(k-2) + (k-2) = 0 \Rightarrow (k-2)(k^2+1) = 0 \Rightarrow k_1 = 2, k_2 = i, k_3 = -i$.
Фундаментальная система решений $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{0x}\cos x, y_3 = \sin x$.
Общее решение $y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.
Пример. Решить ур-ие $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.
Составляем характеристическое ур-ие
$k^4 + 2k^2 + 1 = 0 \Rightarrow (k^2+1)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -i, k_3 = k_4 = i.$
Фундаментальная система решений
$y_1 = \cos x, y_2 = x\cos x, y_3 = \sin x, y_4 = x \sin x.$
Общее решение $y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x.$

4.3.5 Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Опр. Линейным неоднородным ур-им n-го порядка с постоянными коэффициентами называется ур-ие вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad . \quad (4.7)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – действительные числа.
Общее решение ур-ие (4.7)определяется формулой у = y_0 + У, где y_0 - общее решение соответствующего однородного ур-ия, а частное решение У неоднородного ур-ия может быть найдено методом неопределенных коэффициентов, который применяется только в тех случаях, когда правая часть ур-ия имеет специальный вид.

Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью специального вида методом неопределенных коэффициентов

Поскольку общее решение ур-ия (4.7) определяется формулой у = y_0 + У, где y_0 - общее решение соответствующего однородного ур-ия, найдем решение y_0 ур-ия (4.5), решив соответствующее характеристическое ур-ие (4.6).

Частное решение У неоднородного ур-ия может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в следующих простейших случаях.

Правая часть	Корни характеристического уравнения	Частное решение
$f(x)=e^{\alpha x}P_n(x),$ где $P_n(x)$ – многочлен степени n.	1) α – не корень характеристического ур-ия 2) α – корень характеристического ур-ия кратности s,	1) $Y=e^{\alpha x}Q_n(x),$ $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами 2) $Y=x^s e^{\alpha x}Q_n(x).$
$f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x].$	1) α±βi – не корень характеристического ур-ия 2) α±βi – корни характеристического ур-ия кратности s	1) $Y=e^{\alpha x}[U_r(x)\cos\beta x+V_r(x)\sin\beta x],$ $U_r(x)$, $V_r(x)$ – многочлены степени r = max[n,m] 2) $Y=x^s e^{\alpha x}[U_r(x)\cos\beta x+V_r(x)\sin\beta x].$
сумму двух ф-ций специального вида $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$		сумма частных решений $Y=Y_1+Y_2$.

<u>Пример 1.</u> Дано ур-ие $y'''+2y''+y'=f(x).$ Найти общее решение соответствующего однородного ур-ия y_0 и записать частное решение У с неопределенными коэффициентами в каждом из следующих случаев: а) $f(x)=x^2e^{3x}$; б) $f(x)=2e^{-x}$; в) $f(x)=5x$. Для случая (в) найти неопределенные коэффициенты и записать общее решение исходного ур-ия.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного ур-ия

$$y'''+2y''+y'=0.$$

Так как характеристическое ур-ие $k^3+2k^2+k=0\Rightarrow k(k^2+2k+1)=0$ имеет корни k_1=0, $k_2=k_3$ = -1, то соответствующие им частные решения $y_1=e^{0x}=1, y_2=e^{-x}, y_3=xe^{-x}$ и общее решение однородного ур-ия $y_0=C_1+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}=C_1+e^{-x}(C_2+C_3x).$

Найдем частные решения У для различных f(x).

а) $f(x)=x^2e^{3x}$. Правая часть специального вида 1) $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x),$ где $P_n(x)$ – многочлен степени n=2 (второй степени).

Так как α = 3 – не корень характеристического ур-ия , то частное решение $Y=e^{\alpha x}Q_n(x),$ где $Q_n(x)$ – многочлен степени n=2 с неопределенными коэффициентами, имеет вид $Y=e^{3x}Q_2(x)=e^{3x}(Ax^2+Bx+C).$

б) $f(x)=2e^{-x}$. Правая часть специального вида 1) $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x),$ где $P_n(x)$ – многочлен степени n=0 (нулевой степени).

Так как α = -1 – корень характеристического ур-ия кратности s = 2 , то частное решение $Y=x^s e^{\alpha x}Q_n(x),$ где $Q_n(x)$ – многочлен степени n=0 с неопределенными коэффициентами, имеет вид $Y=Ax^2e^{-x}$.

в) $f(x)=5x$. Правая часть специального вида 1) $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x),$ где $P_n(x)$ – многочлен степени n=1 (первой степени).

Так как $\alpha = 0$ – корень характеристического ур-ия кратности s = 1 , то частное решение $Y = x^s e^{\alpha x} Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n=1 с неопределенными коэффициентами, имеет вид $Y = xe^{0x}(Ax+B) = x(Ax+B)$.

Пример 2. Дано ур-ие $y''' + 4y' = f(x)$. Найти общее решение соответствующего однородного ур-ия y_0 и записать частное решение У с неопределенными коэффициентами в каждом из следующих случаев:

а) $f(x) = e^{2x}(\cos 3x + x\sin 3x)$; б) $f(x) = x^2\cos 2x + 2\sin 2x$.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного ур-ия

$$y''' + 4y' = 0.$$

Так как характеристическое ур-ие $k^3 + 4k = 0 \Rightarrow k(k^2+4) = 0$ имеет корни k_1=0, k_2 ,k_3 = ±i, то соответствующие им частные решения $y_1 = e^{0x} = 1, y_2 = \cos 2x, y_3 = \sin 2x$ и общее решение однородного ур-ия $y_0 = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$.

Найдем частные решения У для различных f(x).

а) $f(x) = e^{2x}(\cos 3x + x\sin 3x)$;

Правая часть специального вида 2) $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$.

Так как $\alpha \pm \beta i = 2 \pm 3i$ не корень характеристического ур-ия, то частное решение $Y = e^{\alpha x}[U_r(x)\cos\beta x + V_r(x)\sin\beta x]$, где $U_r(x)$, $V_r(x)$ – многочлены степени r = 1 = max[n,m] = max(0,1), имеет вид $Y = e^{2x}[(Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x]$.

б) $f(x) = x^2\cos 2x + 2\sin 2x$.

Правая часть специального вида 2) $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$.

Так как $\alpha \pm \beta i = 0 \pm 2i$– корни характеристического ур-ия кратности s = 1 , то частное решение $Y = xe^{\alpha x}[U_r(x)\cos\beta x + V_r(x)\sin\beta x]$, где $U_r(x)$, $V_r(x)$ – многочлены степени r = 2 = max[n,m] = max(2,0), имеет вид $\begin{aligned} &Y = xe^{0x}[(Ax^2+Bx+C)\cos 2x + (Dx^2+Fx+E)\sin 2x] = \\ &x(Ax^2+Bx+C)\cos 2x + x(Dx^2+Fx+E)\sin 2x \end{aligned}$.

Пример 3. Решить ур-ие $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного ур-ия

$y''' + y'' - 2y' = 0.$

Так как характеристическое ур-ие $k^3 + k^2 - 2k = 0 \Rightarrow k(k^2+k-2) = 0$ имеет корни k_1=0, k_2 =1 ,k_3 = -2, то соответствующие им частные решения $y_1 = e^{0x} = 1, y_2 = e^x, y_3 = e^{-2x}$ и общее решение однородного ур-ия $y_0 = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-2x}$.

Найдем частное решение У. Правая часть ур-ия $f(x) = x - e^x = f_1(x) + f_2(x)$ представляет собой сумму двух ф-ций специального вида

1) $f_1(x) = e^{\alpha_1 x}P_{n_1}(x), f_2(x) = e^{\alpha_2 x}P_{n_2}(x), f_1(x) = x, f_2(x) = -e^x \Rightarrow \alpha_1 = 0, n_1 = 1; \alpha_2 = 1, n_2 = 0$

поэтому частное решение может быть найдено как сумма частных решений $Y = Y_1 + Y_2$. Найдем эти решения .

Так как $\alpha_1 = 0$ – корень характеристического ур-ия кратности s = 1 , то частное решение $Y_1 = x^s e^{\alpha_1 x}Q_{n_1}(x) = xe^{0x}(Ax+B)$.

Так как $\alpha_2 = 1$ – корень характеристического ур-ия кратности s = 1 , то частное решение $Y_2 = x^s e^{\alpha_2 x} Q_{n_2}(x) = xe^x C.$

Итак частное решение $Y = Y_1 + Y_2 = x(Ax + B) + xe^x C = Ax^2 + Bx + Cxe^x$

Пример 4. Решить ур-ие $4y''' + y' = 3e^x + 2\sin\frac{x}{2}$.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного ур-ия $4y''' + y' = 0$.

Так как характеристическое ур-ие $4k^3 + k = 0 \Rightarrow k(4k^2 + 1) = 0$ имеет корни $k_1=0$, $k_2, k_3 = \pm 1/2i$, то соответствующие им частные решения $y_1 = e^{0x} = 1, y_2 = \cos\frac{1}{2}x, y_3 = \sin\frac{1}{2}x$ и общее решение однородного ур-ия $y_0 = C_1 + C_2\cos\frac{1}{2}x + C_3\sin\frac{1}{2}x.$

Найдем частное решение У. Правая часть ур-ия $f(x) = 3e^x + 2\sin\frac{1}{2}x = f_1(x) + f_2(x)$ представляет собой сумму двух ф-ций специального вида

1) $f_1(x) = e^{\alpha x}P_n(x) = 3e^x, \alpha = 1, n = 0$ и

2) $f_2(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x] = 2\sin\frac{1}{2}x, \alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}, n = 0, m = 0$,

поэтому частное решение может быть найдено как сумма частных решений $Y = Y_1 + Y_2$. Найдем эти решения .

Так как для первой ф-ции α = 1 – не корень характеристического ур-ия, то частное решение $Y_1 = e^{\alpha x}Q_n(x) = e^x A.$

Так как для второй ф-ции α = 0, β = 1/2 – корень характеристического ур-ия кратности s = 1 , то частное решение $Y_2 = x^s e^{\alpha x}[U_r(x)\cos\beta x + V_r(x)\sin\beta x] = x(B\cos\frac{1}{2}x + C\sin\frac{1}{2}x)$.

Итак частное решение $Y = Y_1 + Y_2 = Ae^x + x(B\cos\frac{1}{2}x + C\sin\frac{1}{2}x)$.

4.4 Нормальные системы дифференциальных уравнений

С системами дифференциальных ур-ий встречаются при изучении процессов, для описания которых нужно искать несколько ф-ций одновременно по ур-иям, связывающим сами ф-ции и их производные.

Будем далее в качестве независимой переменной использовать t, а неизвестные ф-ции обозначать x(t) и y(t).Решить систему – значит найти эти ф-ции.

Чаще всего приходится иметь дело с *нормальной системой диф. ур-ий*, разрешенной относительно производных искомых ф-ций. Нормальная система ур-ий для 2-х ф-ций имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y). \end{cases}$$

Если интерпретировать аргумент t , как время, а x,y– координаты движущейся на плоскости точки, то эта система задает в каждый момент времени t координаты вектора скорости в рассматриваемой точке. Решение системы x(t),y(t) буде давать траекторию движения точки.

4.4.1 Решение нормальных систем дифференциальных ур-ий методом исключения

Пример 1. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + 4y \end{cases}$

Продифференцируем первое ур-ие по t : $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt}$. Значение $\dfrac{dy}{dt}$ подставим из 2-го ур-ия

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2\dfrac{dx}{dt} + 8x + 4y$,

Значение y находим из 1-го ур-ия $y = \dfrac{dx}{dt} - 2x$ и подставляем в последнее

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2\dfrac{dx}{dt} + 8x + 4(\dfrac{dx}{dt} - 2x) \Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} - 6\dfrac{dx}{dt} = 0$.

Это линейное однородное ур-ие. Корни характеристического ур-ия $k^2 - 6k = 0 \Rightarrow k(k-6) = 0, k_1 = 0, k_2 = 6$ и его частные $x_1 = e^{0t} = 1, x_2 = e^{6t}$ и общее решение $x(t) = C_1 + C_2e^{6t}$.

y(t) находим из первого ур-ия: $y(t) = \dfrac{dx}{dt} - 2x = 6C_2e^{6t} - 2C_1 - 2C_2e^{6t} = -2C_1 + 4C_2e^{6t}$

Таким образом решение системы

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2e^{6t} \\ y(t) = -2C_1 + 4C_2e^{6t} \end{cases}.$$

Пример 2. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$ и частное решение, соответствующее начальным условиям x(0)=0, y(0)=1.

Продифференцируем первое ур-ие по t : $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt} + \sin t$. Значение $\dfrac{dy}{dt}$ подставим из 2-го ур-ия

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + \sin t$,

Значение y находим из 1-го ур-ия $y = \dfrac{dx}{dt} + 5\cos t$ и подставляем в последнее

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2x + (\dfrac{dx}{dt} + 5\cos t) + \sin t \Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 2x = 5\cos t + 5\sin t$.

Это линейное неоднородное ур-ие. Решим сначала соответствующее однородное ур-ие:
$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0$.

Корни характеристического ур-ия $k^2-k-2=0 \Rightarrow k_1=2, k_2=-1$ и его частные
$x_1=e^{2t}=1, x_2=e^{-t}$ и общее решение $x_0(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$.

Найдем частное решение неоднородного ур-ия.

Правая часть специального вида 2) $f(t)=e^{\alpha t}[P_n(t)\cos\beta t+Q_m(t)\sin\beta t]$.

Так как α±βi = 0 ±i не корень характеристического ур-ия, то частное решение
$X=e^{\alpha t}[U_r(t)\cos\beta t+V_r(t)\sin\beta t]$, где $U_r(t)$, $V_r(t)$ – многочлены степени r = 0 = max[n,m] = max(0,0), имеет вид $X=A\cos t+B\sin t$.

Подставим частное решение и его производные в неоднородное ур-ие и найдем коэффициенты А и В.

$X=A\cos t+B\sin t$

$\frac{dX}{dt}=-A\sin t+B\cos t$

$\frac{d^2X}{dt^2}=-A\cos t-B\sin t$

$-A\cos t-B\sin t-(-A\sin t+B\cos t)-2(A\cos t+B\sin t)=5\cos t+5\sin t \Rightarrow$

$(-3A-B)\cos t+(A-3B)\sin t=5\cos t+5\sin t$

Приравняем коэффициенты слева исправа при одинаковых выражениях от t.
при cost: -3A – B = 5
при sint: A – 3B = 5
Решив полученную систему найдем A = -1 и B = -2.
Следовательно частное решение $X=-\cos t-2\sin t$ и общее решение
$x(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}-\cos t-2\sin t$,

y(t) находим из первого ур-ия: $y(t)=\frac{dx}{dt}+5\cos t=2C_1e^{2t}-C_2e^{-t}+\sin t-2\cos t+5\cos t=$
$=2C_1e^{2t}-C_2e^{-t}+\sin t+3\cos t$

Таким образом общее решение системы
$$\begin{cases}x(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}-\cos t-2\sin t\\ y(t)=2C_1e^{2t}-C_2e^{-t}+\sin t+3\cos t\end{cases}.$$

Найдем частное решение, соответствующее начальным условиям x(0)=0, y(0)=1, подставив его в общее решение:
$$\begin{cases}C_1^0+C_2^0-1=0\\ 2C_1^0-C_2^0+3=1\end{cases}\Rightarrow C_1^0=-\frac{1}{3}, C_2^0=\frac{4}{3}.$$

Частное решение имеет вид:
$$\begin{cases}x(t)=-\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{4}{3}e^{-t}-\cos t-2\sin t\\ y(t)=-\frac{2}{3}e^{2t}-\frac{4}{3}e^{-t}+\sin t+3\cos t\end{cases}$$