Числовые ряды

Числовая последовательность

Опр. *Числовой последовательностью* $\{x_n\}$ называют числовую ф-цию $x_n = \varphi(n)$, определенную на множестве натуральных чисел.
x_n - общий член последовательности.

$x_n = n^2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$,…, $x_{10} = 100$,…
$x_n = \frac{n}{n+1}, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{3}{4}, ...$
$x_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 6, x_4 = 24, ...$

Опр. Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a(\text{конечное}, \neq \infty)$ - *последовательность* называется *сходящейся*. Если предел не существует, либо он равен ∞, то последовательность называется *расходящейся.*

Понятие числового ряда и его сходимости

Опр. Пусть задана числовая последовательность $\{a_n\}$. Сумма элементов бесконечной числовой последовательности $a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *числовым рядом*.

Числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называются членами ряда, n-ый член ряда a_n называется общим членом ряда.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2 < 1$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{16} > 1$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi}{12} < 1$.

Опр. Если все члены ряда $a_n > 0$(положительны), то ряд называется *знакоположительным*.

Опр. Сумма первых n слагаемых ряда называется *n – частичной суммой ряда*:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Опр. Если предел n – частичной суммы ряда существует и конечен, то ряд называется *сходящимся,* в противном случае (предел n – частичной суммы ряда не существует или равен бесконечности) говорят, что ряд расходится.
$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$. Этот предел называется суммой числового ряда.

Пример 1. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1},$

$1=A(n+1)+Bn,$

$n^1\left|0=A+B\right.,$

$n^0\left|1=A\Rightarrow B=-1\right.,$

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$

$S_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1},$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1\Rightarrow$ *ряд сходится*

Т.о. мы видим, что не всякая бесконечная сумма чисел равна бесконечности.

<u>Пример 2.</u> Исследовать на сходимость и вычислить сумму ряда геометрической прогрессии $1+q+q^2+...+q^n+...=\sum_{n=1}^{\infty}q^n$.

1) $\cdot\left|q\right|<1-$ *ряд сходится*

2) $\cdot\left|q\right|\geq 1-$ *ряд расходится*

<u>Опр.</u> *Остатком ряда* после n-го члена (или *n-м остатком*) R_n называют ряд, полученный из данного путем отбрасывания его n первых членов $R_n=a_{n+1}+a_{n+2}+..=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$.

Тогда сумма ряда может быть записана выражением $S=a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}+...=S_n+R_n$. Так как сумма S_n первых n членов ряда всегда конечное число, то сходимость ряда определяется сходимостью его остатка $R_n=S-S_n$.

1. Ряд и его остаток либо одновременно сходятся, либо расходятся. Остаток сходящегося ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$.

Необходимое условие сходимости числового ряда

<u>Теорема.</u> Если числовой ряд сходится $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$, тогда предел его общего члена равен 0: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Приведенный признак сходимости следует понимать так:

Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится точно,

если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ может сходиться, но может и расходиться.

Пример. Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + ... + 1 + ...,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + ... + 1 + ..., \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} 1, n = 2k+1, \\ -1, n = 2k \end{cases} \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1},\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3} \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{1000n},\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1000n} = \frac{1}{1000} \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Таблица эквивалентных величин

$\alpha(x) \to 0$

$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x) \cdots \arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x) ... 1 - \cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$

$tg\alpha(x) \sim \alpha(x) \cdots arctg\alpha(x) \sim \alpha(x) ... \ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$

$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdots \sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$

$P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0$ - многочлен степени n.

При $x \to \infty \cdot P_n(x) \sim A_n x^n$,

при $x \to 0 \cdot P_n(x) \sim A_0$.

Пример. Выполняется ли необходимый признак сходимости ряда?

1.$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$,

2.$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + ... + \frac{2n-1}{2n}$,

3.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$,

4..$\sum_{n=1}^{\infty} narctg\frac{1}{n}$,

5.$\frac{2}{1} + \frac{5}{8} + \frac{10}{27} + ... + \frac{n^2+1}{n^3}$.

Факт расходимости ряда при выполнении необходимого признака сходимости говорит о том, что для сходимости ряда кроме убывания и стремления к нулю общего члена ряда нужна достаточная скорость убывания ряда, чтобы сумма бесконечного числа членов не успела накапливаться.

Прежде, чем вычислять сумму ряда необходимо убедиться, что он сходится. Достаточные признаки сходимости числовых рядов дают ответ на эти вопросы.

Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Интегральный признак Коши

Если f(x) при x $\geq$ 1 есть *непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция* такая, что при натуральных значениях аргумента значения ф-ции совпадают со значениями членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,т.е u_1 =f(1),u_2 =f(2),…,u_n =f(n), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ и расходится, если этот интеграл расходится.

Чтобы составить подинтегральную, ф-цию достаточно заменить в выражении общего члена ряда n на x.

Пример 1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x},$$

$$f(x) \to 0 \cdot при \cdot x \to \infty$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{\infty} = 0 + \frac{1}{\ln 2} - число \Rightarrow интеграл\ сходится \Rightarrow рядс\ сходится$$

Пример 2. Исследовать ряд(эталонный) на сходимость в зависимости от параметра α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ - $\begin{cases} \alpha > 1 - сходится, \\ \alpha \leq 1 - расходится. \end{cases}$ Этот ряд называется рядом Дирихле.

Признак сравнения 1

Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ..., (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} в_n = в_1 + в_2 + ... + в_n + ..., (2)$$

причем члены ряда (1) не превосходят соответствующих членов ряда (2) по крайней мере, начиная с некоторого номера n = N $a_n \leq в_n$ для всех n > N.

Тогда из сходимости ряда (2) (большего ряда) $\Rightarrow$ сходимость ряда (1) и из расходимости ряда (1) (меньшего ряда) следует расходимость ряда (2).

Признак сравнения 2

Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ..., (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} в_n = в_1 + в_2 + ... + в_n + ..., (2)$$

Если предел отношения этих рядов существует и конечен $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, то ряды (1) и (2) ведут себя одинаково (сходятся и расходятся одновременно).

<u>Замечание</u>. При применении признака сравнения данный ряд сопоставляется с одним из эталонных рядов, сходимость и расходимость которых установлена.
<u>Эталонные ряды</u>:

1) Геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n - \begin{cases} |q| < 1 - \textit{ряд сходится}, \\ |q| \geq 1 - \textit{ряд расходится}. \end{cases}$

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ - $\begin{cases} \alpha > 1 - \textit{ряд сходится}, \\ \alpha \leq 1 - \textit{ряд расходится}. \end{cases}$.

Суть использования признака сравнения, особенно его предельной формы, состоит в том, что нужно для данного ряда организовать эквивалентный ему ряд в виде одного из эталонных рядов и сделать вывод о его сходимости.

<u>Пример 1</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n} + ...$ (1) сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (2):

Очевидно $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{n^n}$ для n > 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходится как геометрический ряд (q<1). Следовательно, меньший ряд (1) тем более сходится по признаку сравнения 1.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}$ (1) сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ (2).

Очевидно $\frac{\sin 3^n}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$. Ряд (2) сходится как геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ (q<1).
Следовательно, меньший ряд (1) тем более сходится по признаку сравнения 1.

<u>Пример 3</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$.

Вспомним таблицу эквивалентных б.м. величин $\sin\frac{\pi}{3^n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\pi}{3^n}$. Поэтому сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ (1) с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (2). Ряд (2) сходится как геометрический ряд (q<1). Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\frac{\pi}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\pi$. Следовательно оба ряда ведут себя одинаково и ряд (1) сходится по признаку сравнения 2.

Признаки сравнения просты в использовании и очень эффективны, но, к сожалению, не всегда могут быть использованы. Поэтому рассмотрим другие признаки сходимости.

Признак Даламбера

Если в числовом знакоположительном ряде $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ существует предел отношения последующего члена ряда u_{n+1} к предыдущему u_n при $n\to\infty$, равный числу р:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=p, то\begin{cases}если\cdot p<1, ряд\ сходится,\\ если\cdot p>1, ряд\ расходится,\\ если\cdot p=1, признак\ не\ работает.\end{cases}$$

Смысл признака Даламбера состоит в том, что члены числового ряда с достаточно большими номерами должны в случае сходимости ряда вести себя как члены убывающей геометрической прогрессии, т.е. каждый следующий член ряда должен быть в р > 1 раз меньше предыдущего.

<u>Пример 1</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1(2n+1)!}{2n+3)!}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=0<1\Rightarrow ряд\cdot сходится.$$

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

Воспользуемся признаком Даламбера: $u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}; u_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}3^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}3(\frac{n}{n+1})^n=\lim_{n\to\infty}3\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}3e^{-1}=\frac{3}{e}>1\Rightarrow ряд\cdot расходится$$

Радикальный признак Коши

Если в числовом знакоположительном ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существует предел корня n-ой степени из общего члена ряда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q, \text{то} \begin{cases} q < 1 - \text{ряд сходится,} \\ q > 1 - \text{ряд расходится,} \\ q = 1 - \text{признак не работает.} \end{cases}$$

Смысл радикального признака Коши состоит в том, что члены числового ряда с достаточно большими номерами должны в случае сходимости ряда вести себя как члены сходящегося геометрического ряда.

<u>Пример 1</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^n}$.

Воспользуемся радикальным признаком Коши: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 < 1$ - ряд сходится.

<u>Пример 2</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

Воспользуемся радикальным признаком Коши: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$ - ряд сходится.

<u>Пример 3</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$.

Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-(n+1)} \right]^{-\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} e^{-1} = \frac{1}{3e} < 1 -$$

ряд сходится.

Примеры применения признаков сходимости

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 1}$ (1) $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (2) $\qquad$ Признак сравнения 1.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7 + 4n^5 + 2}}$ (1) $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ (2) $\qquad$ Признак сравнения 2.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n^2+3})$ (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (2) Признак сравнения 2.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (1) $>$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (2) Признак сравнения 1.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^8}}$ $\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^8}} < \frac{n}{\sqrt[3]{n^8}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ Признак сравнения 1.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}$ (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (2) Признак сравнения 2.

7) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n^2})$ (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ (2) Признак сравнение 2

$$1-\cos\frac{1}{n^2} \sim 2\sin^2\frac{1}{2n^2} \sim 2\frac{1}{(2n^2)^2} \sim \frac{1}{2n^4}$$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^n}$ (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ (2) Признак сравнения 1.

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+1)^2}, u_n = \frac{5^n}{(2n+1)^2}, u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(2n+3)^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5(2n+1)^2}{(2n+3)^2} = 5 > 1 - ряд \cdot расходится$$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n+2}}{n!}, u_n = \frac{\sqrt{3n+2}}{n!}, u_{n+1} = \frac{\sqrt{3n+5}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n+5}\cdot n!}{(n+1)!\sqrt{3n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 - ряд \cdot сходится$$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 9\cdot \ldots \cdot(5n-1)}{5\cdot 8\cdot \ldots \cdot(3n+2)}, u_n = \frac{4\cdot 9\cdot \ldots \cdot(5n-1)}{5\cdot 8\cdot \ldots \cdot(3n+2)}, u_{n+1} = \frac{4\cdot 9\cdot \ldots \cdot(5n+4)}{5\cdot 8\cdot \ldots \cdot(3n+5)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+4}{3n+2} = \frac{5}{3} > 1 - ряд\ расходится$$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n^2+5n-1}{4n^2+2}\right)^{3n+2}$ -радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7n^2+5n-1}{4n^2+2}\right)^{3n+2}} = \left(\frac{7}{4}\right)^3 > 1$$ - ряд расходится

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ - интегральный признак Коши

$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\ln\left|\ln|x+1|\right|\Big|_{2}^{\infty}=\infty$ - ряд расходится

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ - интегральный признак Коши

$\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=-2\int_{1}^{\infty}e^{-\sqrt{x}}d(-\sqrt{x})=-\frac{2}{e^{\sqrt{x}}}\Big|_{2}^{\infty}=\frac{2}{e}<1$ - ряд сходится.

15) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1-1+1-...$

$\lim_{n\to\infty}u_n=\begin{cases}1, n=2k\\ -1, n=2k+1\end{cases}-нет\cdot предела$

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{2}{5})^n$ (1) $\quad\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^n$ (2) Признак сравнения 1.

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}\quad\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{2}\neq 0$ - ряд расходится.

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Опр. *Знакочередующимся рядом* называется ряд, знаки членов ряда которого строго чередуются, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+...+(-1)^{n+1}a_n,\cdot a_n>0\cdot(n=1,2,3,...)$.

Теорема. (признак Лейбница).

Пусть дан знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, a_n>0$ и при этом выполнены условия: 1) модули членов ряда монотонно убывают с возрастанием n : $\grave{a}_1>\grave{a}_2>a_3>...>a_n>a_{n+1}>...$,

2) общий член ряда стремятся к нулю $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Тогда ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Следствие: *Сумма остатка* знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, имеет *знак первого оставшегося члена* и не превосходит его по модулю.

Пример. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+...$.

Этот ряд является знакочередующимся. Он сходится, поскольку удовлетворяет условиям теоремы

$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}(n=1,2,3,...), \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Абсолютная сходимость рядов.

В этом параграфе будем изучать ряды, члены которых являются действительными числами любого знака.

Опр. Ряд, члены которого имеют как положительные, так и отрицательные члены, называют *знакопеременным*.

Теорема. Пусть дан знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (1) и ряд, составленный из его модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ (2). Тогда, если ряд (2) сходится, то ряд (1) тоже сходится.

Опр. Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ (2). Если ряд (1) сходится и при этом ряд (2) сходится, то ряд (1) *сходится абсолютно*. Если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) *сходится условно*.

Схема исследования на сходимость знакочередующихся рядов

1. Составляем ряд из абсолютных величин данного знакочередующегося ряда и иеследуем сходимость полученного знакоположительного ряда с помощью одного из достаточных признаков сходимости.

Делаем вывод: если ряд из абсолютных величин сходится, то исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно, если расходится, то исследуем исходный ряд на условную сходимость, проверяем выполнение признака Лейбница:

Если $\lim_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$, то утверждаем, что ряд расходится.

Если $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$, то ряд сходится условно.

Замечание. Если общий член знакочередующегося ряда имеет такой вид, что легко найти $\lim_{n\to\infty}|a_n|$, то начинаем исследование с проверки выполнения признака Лейбница.

Примеры: Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ (2) Ряд (1) при α > 0 сходится по Лейбницу. Ряд (2) - эталонный ряд, сходится при α > 1 . Следовательно при 0 < α ≤ 1 ряд (1) сходится условно и при α > 1 ряд сходится абсолютно.

2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ (сходится условно).

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$

5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}$

7) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

9) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{2^n}$

10) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$

11) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n^2}}{n!}$......$(n!>2^n)$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{2n}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+3}{5n+2}$

14) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{\sqrt{2n+1}\cdot 5^n}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^3+2n+5}}$

16) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^3 n}$

Приближенное вычисление суммы ряда

Для приближенного вычисления суммы S сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ полагают $S\cong S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, пренебрегая остатком $R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$. Чтобы оценить ошибку, допускаемую при этом, нужно оценить остаток.

Абсолютная погрешность при замене суммы ряда S его частичной суммой S_n равна модулю остатка ряда $|R_n|=|S-S_n|$.

Если требуется найти сумму ряда с точностью до $\varepsilon>0$, то надо взять сумму такого числа n первых членов ряда, чтобы выполнялось неравенство $|R_n|<\varepsilon$.

Если даны два сходящихся знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, причем $a_n<в_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ называется мажорирующим рядом по отношению к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

<u>Теорема 1.</u> (Оценка остатка знакоположительного ряда).

Остаток мажорирующего ряда $R_м$ всегда больше или равен остатку основного ряда R_n: $R_i\ \geq R_n$.

Теорема 2. Для сходящегося знакоположительного ряда, члены которого монотонно убывают, начиная с (n+1)-го, справедлива следующая оценка остатка $R_n \le \int\limits_n^{\infty} f(x)dx$, где $f(x)$ – ф-ция, используемая в интегральном признаке Коши.

Теорема 3. (Оценка остатка знакопеременного ряда).

Пусть дан абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда абсолютная величина его n–го остатка R_n не превосходит n–го остатка ряда (R_n'), составленного из абсолютных величин членов этого ряда $|R_n| \le R_n'$.

Теорема 4. (Оценка остатка знакочередующегося ряда).

Если знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, то его n–ый остаток по абсолютной величине не превосходит первого из отброшенных членов $|R_n| \le a_{n+1}$.

Пример 1. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ с точностью до 0.1.

Решение. Оценим остаток ряда по теореме 2. $R_n \le \int\limits_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{B \to \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_n^B = \frac{1}{n}$.

Если взять первые 10 членов ряда, то остаток $R_n \le \frac{1}{10}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} \approx 1.6$ (с точностью до 0.1).

Пример 2. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)5^n}$ с точностью до 0.002.

Решение. Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$, который является мажорирующим для исходного ряда. Это убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем q = 1/5, поэтому сходящаяся. Следовательно по теореме 1остаток исходного ряда меньше остатка вспомогательного ряда:

$$R_1 \le \frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^n}+... = \frac{b_2}{1-q} = \frac{\frac{1}{5^2}}{1-\frac{1}{5}} = 0.05$$

$$R_2 \le \frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+...+\frac{1}{5^n}+... = \frac{b_3}{1-q} = \frac{\frac{1}{5^3}}{1-\frac{1}{5}} = 0.01$$

$$R_3 \le \frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}+...+\frac{1}{5^n}+... = \frac{b_4}{1-q} = \frac{\frac{1}{5^4}}{1-\frac{1}{5}} = 0.002$$

Следовательно, нужно взять сумму первых трех членов ряда:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)5^n} \approx \frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3} = \frac{1}{10}+\frac{1}{75}+\frac{1}{500} \approx 0.115$ (с точностью до 0.002)

<u>Пример 3</u>. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\cdot n!}$ с точностью до 0.01.

Решение. Данный ряд сходится по признаку Лейбница, поэтому $|R_n| \le u_{n+1} \Rightarrow |R_n| \le 0.01$.

$\frac{1}{(2n+1)\cdot n!} \le 0.01$.

При n = 1 получаем $|u_2| = \left|\frac{(-1)^3}{5\cdot 2!}\right| = \left|-\frac{1}{10}\right| = \frac{1}{10} > 0.01$.

При n = 2 получаем $|u_3| = \left|\frac{(-1)^4}{7\cdot 3!}\right| = \frac{1}{42} > 0.01$.

При n = 3 получаем $|u_4| = \left|\frac{(-1)^5}{9\cdot 4!}\right| = \frac{1}{316} < 0.01$.

Получим, что для вычисления суммы ряда с заданной точностью достаточно взять три первых члена ряда, погрешность вычисления определяется четвертым членом. Итак $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\cdot n!} = 1-\frac{1}{10}+\frac{1}{42} = \frac{194}{210} \approx 0.92$.

Понятие функционального ряда и его сходимости

<u>Опр.</u> Пусть задана некоторая функциональная последовательность $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ на множестве X. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, членами которого являются ф-ции некоторой функциональной последовательности называется *функциональным рядом*. Если зафиксировать $x = x_0$, то получим числовой ряд.

<u>Опр.</u> Совокупность тех значений x, при которых функциональный ряд сходится,

называется *областью сходимости* этого ряда.

Опр. Функциональный ряд называется *абсолютно сходящимся* на множестве X, если на этом множестве сходится ряд из модулей его членов.

В области сходимости ряда его сумма *S(x)* является функцией от x.

Если ряд сходится и его сумма *S(x)*,то

$$S(x) = S_n(x) + \underbrace{R_n(x)}_{остаток\cdot ряда},\ S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x).$$

Для всех X из области сходимости $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, т.е. остаток сходящегося ряда стремится к нулю при $n \to \infty$.

Мажорируемые ряды

Опр. Функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ называется *мажорируемым* в области X, если $\exists$ такой сходящийся знакоположительный числовой ряд $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$, что выполняются в каждой точке X соотношения $|u_1(x)| < \alpha_1, |u_2(x)| < \alpha_2, \ldots, |u_n(x)| < \alpha_n, \ldots$.Соответствующий числовой ряд называется *мажорантным.*

Замечание. Мажорируемый ряд – абсолютно сходящийся ряд.

Свойства степенных рядов

Теорема 1. Всякий степенной ряд (2) с радиусом сходимости R > 0 сходится равномерно на всяком отрезке, содержащемся в интервале сходимости (-R,R).

Теорема 2. Сумма степенного ряда (2) есть ф-ция, непрерывная в каждой точке интервала сходимости ряда.

Степенной ряд в его интервале сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз, причем в результате этих операций получаются степенные ряды, имеющие тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Интегрирование и дифференцирование степенных рядов позволяет заданные ряды сводить к уже известным рядам.

Разложение ф-ций в степенные ряды. Ряд Тейлора и Маклорена

Если ф-ция *f(x)* является суммой ряда

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots, \quad (1)$$

то говорят что ф-ция *f(x)* разлагается в ряд по степеням *(x – c)*.

Важность такого разложения видна хотя бы из того, что мы получаем возможность приближенно заменить ф-цию суммой нескольких первых членов степенного ряда, т.е. многочленом.

Теорема. Если ф-ция f(x) на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ разлагается в степенной ряд $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$, то это разложение единственное и коэффициенты этого ряда выражаются через значения ф-ции и ее производной.

Доказательство. Дифференцируя этот ряд в интервале сходимости, получаем

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3\cdot a_3(x-x_0)^2+4\cdot(x-x_0)^3+...+na_n(x-x_0)^{n-1}+...$$
$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+4\cdot 3(x-x_0)^2+...+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+...$$
$$f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3+2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4(x-x_0)+...+(n-2)(n-1)na_n(x-x_0)^{n-3}+...$$
....
$$f^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot ...\cdot na_n+2\cdot 3\cdot ...\cdot n(n+1)a_{n+1}(x-x_0)+...$$

При $x = x_0$. получаем
$$f(x_0)=a_0\Rightarrow a_0=f(x_0)$$
$$f'(x_0)=1\cdot a_1\Rightarrow a_1=\frac{f'(x_0)}{1}$$
$$f''(x_0)=1\cdot 2\cdot a_2\Rightarrow a_2=\frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}$$
$$f'''(x_0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3\Rightarrow a_3=\frac{f'''(x_0)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
....
$$f^{(n)}(x_0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot na_n\Rightarrow a_n=\frac{f'''(x_0)}{n!}$$
Подставляя эти выражения для коэффициентов в формулу разложения (1), получим
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...$$
Ряд в правой части равенства называется рядом Тейлора ф-ции f(x).
Отметим его частный случай , когда $x_0 = 0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$$
Последний ряд называют рядом Маклорена.

Все рассуждения были сделаны в предположении, что ф-ция f(x) может быть разложена в степенной ряд. Однако, в общем случае, ряд может расходиться, и даже, если он сходится, то к другой ф-ции. Сформулируем необходимое и достаточное условие представление ф-ции степенным рядом.

<u>Теорема.</u> Пусть ф-ция f(x) в интервале (x_0-R,x_0+R) имеет производные любого порядка. Тогда для любого x, из этого интервала будет справедлива формула Тейлора
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^n,\xi\in(x_0-R,x_0+R)-\textit{остаточный}\cdot\textit{член}\cdot\textit{формулы}\cdot\textit{Тейлора}$$
Из равенства $f(x)=S_n(x)+R_n(x)$ следует, что ряд Тейлора сходится к ф-ции f(x) в интервале (x_0-R,x_0+R), тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

<u>Теорема.</u> Если в интервале (x_0-R,x_0+R) ф-ция f(x) имеет производные любого порядка и все они по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом

$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M\,(n=1,2,..)$, то в этом интервале ряд Тейлора для этой ф-ции сходится и его сумма равна f(x) .

Замечание. В тех случаях, когда применение теоремы затруднительно, поступают иначе. Составив ряд Тейлора для ф-ции f(x), определяют сначала интервал его сходимости и лишь затем стараются доказать ,что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ при значениях x, принадлежащих интервалу сходимости.

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных ф-ций

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \{x \in (-\infty, +\infty)\}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots. \{x \in (-\infty, +\infty)\}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots. \{x \in (-\infty, +\infty)\}$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots (\textit{биномиальный} \cdot \textit{ряд}). \{x \in (-1, +1)\}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}x^n + \ldots \{x \in (-1, +1)\}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \{x \in (-1, +1)\}$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \ldots \{x \in (-1, +1)\}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(2n-1)!!x^{2n-1}}{2^{n-1}(n-1)!(2n-1)} + \ldots \{x \in (-1, +1)\}$$

Эти разложения получены как непосредственным вычислением коэффициентов ряда, так и с использованием свойств почленного дифференцирования и интегрирования рядов.

1. Разложим в ряд Маклорена ф-цию $f(x)=e^x$.

Итак ряд Маклорена имеет вид $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$

Найдем производные и вычислим их в точке x=0.

$f'(x)=e^x, f''(x)=e^x, \ldots, f^{(n)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(0)=1$.

Так как в любом интервале (-R,R) $e^x < e^R$, то ряд сходится к заданной ф-ции,т.е

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

2. Разложим в ряд Маклорена ф-цию $f(x)=\sin x$.

Найдем производные и вычислим их в точке x=0.

$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}), f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}), f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\frac{\pi}{2}), f'''(0) = -1$

....

$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, n = 2k \\ (-1)^{k-1}, n = 2k-1 \end{cases}$

Итак $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$

3. Разложим в ряд Маклорена ф-цию $f(x) = \ln(1+x)$.

Воспользуемся разложением $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^{n-1}x^n + ...$.

Очевидно $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + ...)dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... +$

4. Разложим в ряд Маклорена ф-цию $f(x) = arctgx$.

Очевидно $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Воспользуемся разложением $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^{n-1}x^n + ...$,заменив $x \to x^2$

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... + (-1)^{n-1}x^{2n} + ...$

Таким образом $arctgx = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + ...)dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... +$

Приложения рядов

Ряды имеют самое широкое применение. В частности они используются в приближенных вычислениях. С помощью рядов вычисляют приближенные значения ф-ций, определенных интегралов, решений дифференциальных ур-й, пределов.

<u>Пример 1.</u> Вычислить интеграл с точность до 0.001: $\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$.

Используем ряд Маклорена ф-ции cosx.

$$\int_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int_0^{1/2}\frac{1}{x^2}\left[1-(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}....)\right]dx=\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}.\right)dx=\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{3\cdot 4!}+\frac{x^5}{5\cdot 6!}-...\right)\Bigg|_0^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3\cdot 4!}+\frac{1}{5\cdot 2^5\cdot 6!}-\approx 0.249$$

Пример 2. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'+xy^2=2\cos x$, удовлетворяющего начальному условию y(0)=1.

Для решения используем способ последовательного дифференцирования.
Решение будем искать в виде ряда Тейлора

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

x = x_0

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+...$$

Подставим начальное условие в исходное ур-ие и найдем $y'(0)$.

$$y'(0)=2\cos 0-xy^2(0)=2$$

Продиффиринцируем исходное уравнение и найдем $y''(0)$.

$$y''=-2\sin x-xy^2\Rightarrow y''(0)=(-2\sin x-y^2-2xyy')_{x=0}=-1$$

Продиффиринцируем исходное ур-ие дважды и найдем $y'''(0)$

$$y'''(0)=(-2\cos x-2yy'-2yy'-2x(y')^2-2xyy'')_{x=0}=-2-2\cdot 1\cdot 2-2\cdot 1\cdot 2-0-0=-10$$

Таким образом решение дифференциального ур-ия

$$y(x)=1+2\cdot x-\frac{1}{2}x^2-\frac{10}{2\cdot 3}x^3+...$$