Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Часть 1

Методические указания
для самостоятельной работы студентов

Составители, О.В. Иванова

Томск 2015

Векторная алгебра / Сост. О.В. Иванова– Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2015. – 35 с.

Рецензент Р.И. Лазарева
Редактор Я. Д. Липатникова

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине Б2.Б.1 – «Математика» при изучении темы «Векторная алгебра» студентами первого курса очной и заочной формы обучения всех направлений и всех профилей подготовки специалистов и бакалавров.

Печатаются по решению методического семинара кафедры высшей математики, протокол № 6 от 23 апреля 2015 г.

Срок действия

с 1.09. 2016
до 1.09.2021

Оригинал-макет подготовлен О.В. Ивановой.

Подписано в печать 08. 12. 2015.
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 2,37. Тираж 50 экз.

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемые методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов первого курса очной и заочной формы обучения при изучении темы «Векторная алгебра».

Математическое содержание данного раздела направлено на формирование у студентов следующих компетенций:

ОК-7	Способности к самоорганизации и самообразованию
ОПК-1	Способности использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования.
ОПК-2	Способности выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат.
ОПК-4	Способности использовать законы и методы математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении профессиональных задач.

В процессе изучения темы «Векторная алгебра» студентом должны быть достигнуты следующие уровни освоения материала:

Запомининие	Знать основные определения векторной алгебры: вектора, линейных операций над векторами, базиса, разложения по базису, скалярного произведения двух векторов, векторного произведения двух векторов, смешанного произведения трех векторов.
Понимание	Уметь самостоятельно использовать понятия и методы векторной алгебры при решении конкретных задач.
Оценка	Владеть методами построения математических моделей типовых профессиональных задач и содержательной интерпретации полученных результатов с использованием понятий векторной алгебры.

ТЕМА 1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1. **Ключевые вопросы теории. Краткие ответы**

1.1. *Что такое вектор и какие векторы вы знаете?*

Вектор – это направленный отрезок. Пусть A – начало вектора, B – его конец, тогда сам вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$ (рис. 1).

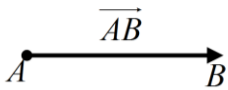


Рис. 1

Длиной или *модулем* вектора называется расстояние между началом и концом вектора и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Единичным вектором (ортом) называется вектор, длина которого равна единице.

Коллинеарные векторы – векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой (рис. 2).

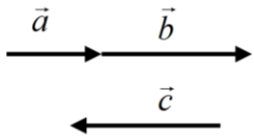


Рис. 2

Равными называются коллинеарные векторы, имеющие одинаковые направления и равные длины.

Противоположные векторы имеют равные длины, но противоположное направление ($\vec{a}$ и $-\vec{a}$) (рис. 3).

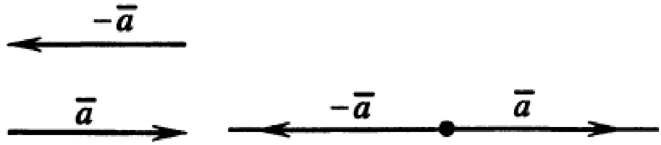


Рис.3

Компланарными называются векторы, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости) (рис. 4).

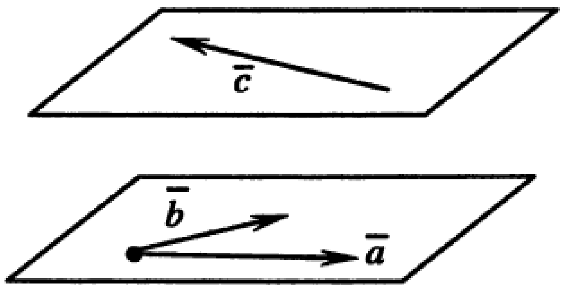


Рис. 4

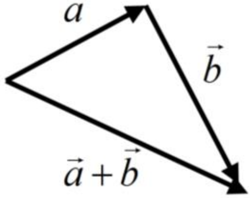
1.2. *Какие операции над векторами называются линейными*?

Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов, вычитания векторов и умножения вектора на число.

1.3. *Как сложить два вектора*?

Два вектора можно сложить по правилу треугольника, для чего их нужно расположить следующим образом: начало второго вектора совместить с концом первого, тогда вектор, соединяющий начало первого вектора с концом второго, и будет вектором суммы (рис. 5).

Векторы можно складывать по правилу параллелограмма. Для этого начала обоих векторов помещают в общую точку; затем на векторах, отложенных от общей точки, как на сторонах, строят параллелограмм, диагональ которого, исходящая из общей точки, и будет вектором суммы (рис. 6).



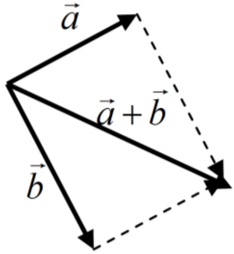


Рис. 5 *Рис. 6*

1.4. *Как найти сумму любого числа векторов ?*

Сумму любого числа векторов находят по правилу многоугольника, для чего начало каждого следующего слагаемого вектора помещают в конце предыдущего слагаемого вектора. Вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего вектора есть сумма этих векторов (рис.7).

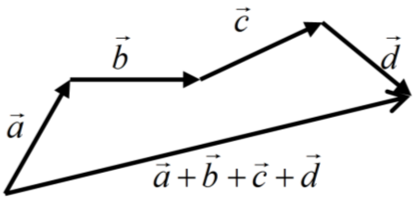


Рис. 7

1.5. *Что мы получаем в результате произведения вектора $\vec{a}$ на число α?*

В результате произведения вектора $\vec{a}$ на число α мы получаем новый вектор $\vec{b}=\alpha\vec{a}$, длина которого в $|\alpha|$ раз больше длины вектора $\vec{a}$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\alpha > 0$ и противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\alpha < 0$ (рис. 8).

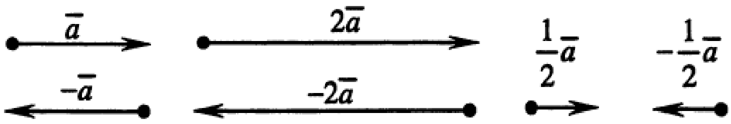


Рис. 8

Таким образом, в результате умножения вектора на число получается вектор, коллинеарный данному (рис. 8). Поэтому два коллинеарных вектора связаны соотношением $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

1.6. *На какое число надо умножить вектор* $\vec{a}$*, чтобы получить вектор, коллинеарный данному вектору, длина которого будет в 2 раза меньше длины вектора* $\vec{a}$*, а направление будет противоположным направлению вектора* $\vec{a}$?

Следуя определению произведения вектора на число, мы должны взять это число отрицательным по знаку, так как направления векторов противоположны. По абсолютной величине это число равно $1/2$, так как длина данного вектора $\vec{a}$ в 2 раза больше длины вектора, который должен получиться в результате операции умножения на число. Таким образом вектор $\vec{a}$ надо умножить на $-1/2$ (рис. 8).

1.7. *Как найти вектор разности двух векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$?

Разность двух векторов, приведенных к общему началу, есть вектор, идущий из конца вектора – вычитаемого в конец вектора – уменьшаемого.

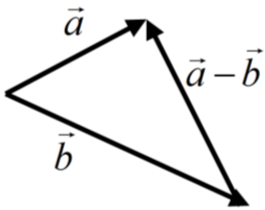


Рис. 9

Отметим, что вектор разности двух векторов – это вектор, являющийся другой диагональю параллелограмма, построенного на данных векторах, как на сторонах.

2. Решение задач

2.1. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить следующие векторы: а) $2\vec{a}$, б) $-(1/3)\vec{b}$, в) $-2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Решение. Зададим два вектора $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

Используя понятие линейных операций над векторами, будем рассматривать вектор $2\vec{a}$ как результат умножения вектора $\vec{a}$ на скаляр 2. Поскольку скаляр положителен и по абсолютной величине больше 1, то искомый вектор $2\vec{a}$ будет представлять собою вектор, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий то же направление и вдвое большую длину (рис. 10), т.е.

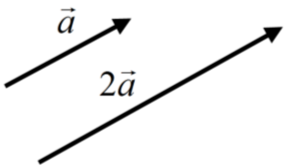


Рис. 10

Вектор $-1/3\ \vec{b}$ представляет собою вектор, коллинеарный вектору $\vec{b}$, имеющий противоположное с ним направление, так как скаляр отрицательный, и длину, в 3 раза меньшую длины вектора $\vec{b}$, так как скаляр по абсолютной величине меньше 1 (рис. 11), т.е.

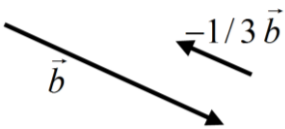


Рис. 11

Вектор $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$ можно рассматривать либо как сумму векторов $(-2\vec{a})$ и $3\vec{b}$, либо как разность векторов $3\vec{b}$ и $2\vec{a}$. В первом случае это будет вектор, направленный по диагонали параллелограмма, построенного на векторах ($-2\vec{a}$) и $3\vec{b}$, исходящий из общего начала слагаемых векторов (рис. 12). Во – втором случае это будет вектор диагонали параллелограмма, построенного на векторах $3\vec{b}$ и $2\vec{a}$, направленный из конца вектора $2\vec{a}$ в конец вектора $3\vec{b}$ (рис. 13).

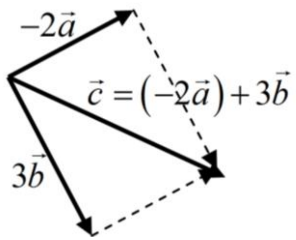


Рис. 12

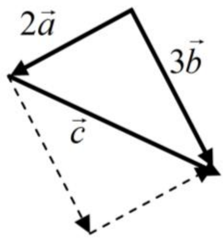


Рис.13

2.2. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, проверить на чертеже справедливость тождества:

$$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)+\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=3\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$

Решение. В левой части тождества стоит сумма двух векторов $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$ и $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$, каждый из которых также представляет собой сумму двух векторов. Будем находить указанные суммы, пользуясь правилом параллелограмма. Для этого выбранные произвольным образом векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведем к общему началу и построим на этих векторах как на сторонах параллелограмм (рис. 14).

В результате сложения векторов $\vec{a}+2\vec{b}$ и $2\vec{a}+\vec{b}$ мы получили вектор, который лежит на одной прямой с вектором ($\vec{a}+\vec{b}$), одинаково с ним направлен и имеет длину в 3 раза большую, т.е. доказали справедливость тождества.

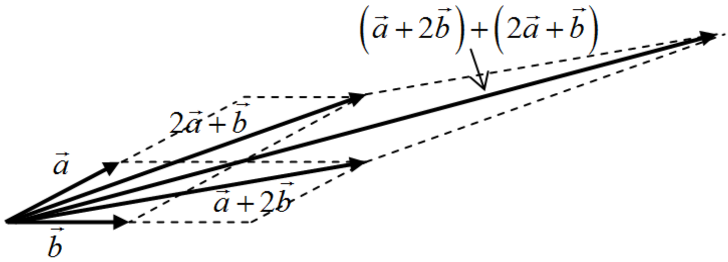


Рис. 14

2.3. В правильном шестиугольнике *ABCDEP* даны: $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{AE}=\vec{n}$. Разложить по этим двум векторам векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{AF}$.

Решение.

Сразу же можно заметить (рис.15), что $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\vec{m}+\vec{n}$, как диагональ параллелограмма *ABDE*. Далее $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, но $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (на основании свойств правильного шестиугольника), значит,

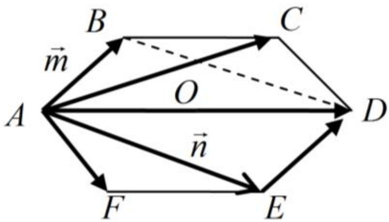


Рис. 15

$$\overrightarrow{AC}=\vec{m}+\frac{1}{2}\left(\vec{m}+\vec{n}\right)=\frac{3}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n},$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{m}-\frac{3}{2}\vec{m}-\frac{1}{2}\vec{n}=-\frac{1}{2}\vec{m}-\frac{1}{2}\vec{n}.$$

И последний вектор $\overrightarrow{AF}$ найдем так:

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\left(\vec{m}+\vec{n}\right)-\left(\frac{3}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}\right)=-\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}.$$

2.4. Даны векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ медиана ΔOAB. Разложить аналитически и геометрически вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение.

Очевидно (рис.16), $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$, так как $\overrightarrow{OC}$ – медиана, то точка C делит отрезок AB пополам. Следовательно,

$$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right), \text{ значит}$$

$$\vec{c}=\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$

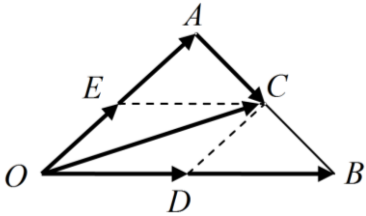


Рис. 16

Чтобы получить геометрическое разложение, проведем через конец вектора $\vec{c}$ прямые, параллельные сторонам ΔABC, до пересечения с этими сторонами. Обозначим точки пересечения со сторонами E и D. Из чертежа наглядно видно, что

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OD}, \text{ но } \overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}, \text{ т.е.}$$

$$\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$

2.5 Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overrightarrow{AK}=\vec{k}$ и $\overrightarrow{AL}=\vec{l}$, выразить через векторы $\vec{k}$ и $\vec{l}$ векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Решение.

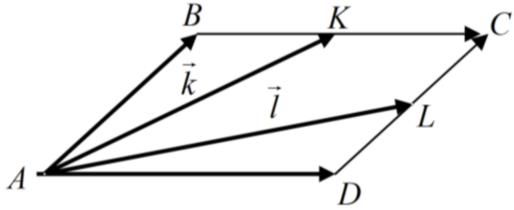


Рис. 17

На основании правила треугольника – правила сложения векторов – имеем (рис. 17):

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK} \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AL} \end{cases}$$

но $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \vec{k} \\ \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{l} \end{cases}.$$

Решая систему относительно $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, получим

$$\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\left(2\vec{k} - \vec{l}\right),\ \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\left(2\vec{l} - \vec{k}\right).$$

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: а) $3\vec{a}$; б) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; в) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; г) $\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$.

3.2. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, проверить на чертеже справедливость тождества:

а) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}$; б) $\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$;

в) $\left(\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}\right)-\left(\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.

3.3. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ заданы векторы, совпадающие с его сторонами: $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{n}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{p}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{q}$, и $\overrightarrow{EA}=\vec{r}$. Построить векторы:

1) $\vec{m}-\vec{n}+\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$; 2) $\vec{m}+2\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{r}$;

3) $2\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}-3\vec{p}-\vec{q}-2\vec{r}$.

3.4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{n}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{p}$. Построить каждый из следующих векторов:

1) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$; 2) $\vec{m}-\vec{n}+\vec{p}$;

3) $2\vec{m}+\vec{n}-3\vec{p}$; 4) $-\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$.

3.5. На трех некомпланарных векторах $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ построен параллелепипед. Указать его векторы – диагонали: 1) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; 3) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$; 4) $\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}$.

3.6. В трапеции $OACB$ $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OA}$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ по векторам $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

Ответ: $\vec{a}=3\vec{c}-3\vec{b}$.

4. Варианты проверочных заданий

В первом задании каждого варианта нужно проверить на чертеже справедливость тождества, используя для этого параллелограмм, построенный на произвольно выбранных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Во втором задании дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с векторами – ребрами $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{n}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{p}$. Требуется построить данный вектор.

Вариант 1

1. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}$;

2. $\frac{1}{2}\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$.

Вариант 2

1. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{b}$;

2. $\vec{m}+\vec{n}-2\vec{p}$.

Вариант 3

1. $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)+\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=3\vec{a}$;

2. $\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}+\vec{p}$.

Вариант 4

1. $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}+\vec{b}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$;

2. $\vec{m}+2\vec{n}-\frac{1}{2}\vec{p}$.

Вариант 5

1. $\left(\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}\right)+\left(\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$;

2. $2\vec{m}+\vec{n}-\frac{1}{2}\vec{p}$.

Вариант 6

1. $\left(\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}\right)-\left(\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$;

2. $\vec{m}-2\vec{n}-2\vec{p}$.

ТЕМА 2. БАЗИС. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО БАЗИСУ

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. *Понятие линейной комбинации векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который выражается через векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ следующим образом

$$\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},$$

где α и β – вещественные числа. Например, $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$, α = 2, β = –3 называют коэффициентами линейной комбинации.

Геометрически $\vec{c}$ – диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\alpha\vec{a}$ и $\beta\vec{b}$.

1.2. *Понятие линейной комбинации векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется вектор $\vec{d}$, который выражается через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ следующим образом

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

где α, β и γ – вещественные числа. Геометрически $\vec{d}$ – диагональ параллелепипеда, построенного на векторах $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$ и $\gamma\vec{c}$.

1.3. *Понятие линейной комбинации n векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ... $\vec{a}_n$

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ ... $\vec{a}_n$ называется вектор $\vec{b}$, который выражается через векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ ... $\vec{a}_n$ следующим образом

$$\vec{b} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – вещественные числа.

1.4. *Какие n векторов* $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ ... $\vec{a}_n$ *называются линейно независимыми*?

Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ ... $\vec{a}_n$ называются линейно независимыми, если линейная комбинация этих векторов – нуль-вектор лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$:

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = \bar{0}.$$

Это значит, что ни один из векторов не может быть представлен в виде линейной комбинации остальных векторов.

1.5. *Какие векторы образуют базис?*

Оказывается, что из всей совокупности векторов всегда можно выбрать несколько векторов так, что все остальные векторы можно единственным образом представить в виде линейной комбинации выбранных векторов.

Совокупность таких выбранных векторов называется базисом, а векторы, входящие в базис, называются базисными. Базис всегда образован максимальным числом линейно независимых векторов.

1.6. *Что называется углом между векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *?*

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол ($0 \le \varphi \le \pi$) между этими векторами, приведенными к общему началу (рис.18).

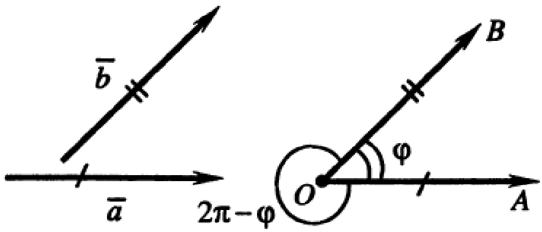


Рис. 18

1.7. *Что такое ось?*

Ось – это прямая, с выбранным на ней направлением.

1.8. *Что называется проекцией точки A на ось l параллельно прямой m?*

Пусть на плоскости дана прямая *l* и пересекающая ее прямая *m*. Проекцией т. *A* на ось *l* параллельно прямой *m* называется основание прямой A_l, проведенной из т. *A* на ось *l*, параллельно прямой *m* (рис.19).

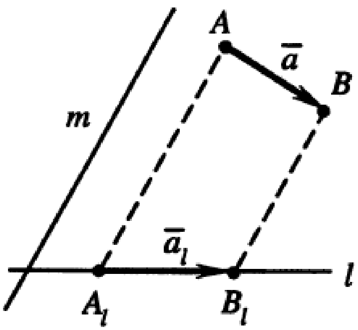


Рис. 19

1.9. *Что называется проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на ось l па-*

раллельно прямой m?

Пусть на плоскости дана прямая l и пересекающая ее прямая m. Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l параллельно прямой m называется вектор $\overrightarrow{A_lB_l}$, началом которого служит проекция т. A на ось l параллельно прямой m, а концом – проекция т. B. на эту ось (рис.19).

1.10. *Что называется ортогональной проекцией точки A на ось l?*

Ортогональной проекцией т. A на ось l называется основание перпендикуляра A_l, опущенного из т. A на ось l. (рис.20).

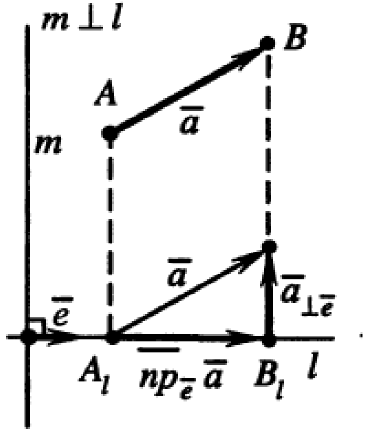


Рис. 20

1.11. *Что называется ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l?*

Ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l (пр$_l$ $\overrightarrow{AB}$) называется длина направленного отрезка $\overrightarrow{A_lB_l}$ на этой оси (A_l, B_l – ортогональные проекции т. A и т. B на ось l), взятая со знаком «+», если направление $\overrightarrow{A_lB_l}$ совпадает с направлением оси l и со знаком «–», если направление $\overrightarrow{A_l B_l}$ противоположно направлению оси l (рис.20).

пр$_l$ $\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi$, φ – угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l,

пр$_l$ $\overrightarrow{AB} > 0$, если $0<\varphi<\pi/2$ – острый,

пр$_l$ $\overrightarrow{AB} < 0$, если $\pi/2<\varphi<\pi$ – тупой.

1.12. *Основные свойства проекции*

1. Равные векторы имеют равные проекции.

2. Проекция суммы векторов на одно и то же направление равна сумме проекций каждого вектора на это направление

$$\text{пр}_l\,(\vec{a} + \vec{в} + \vec{c}) = \text{пр}_l\,\vec{a} + \text{пр}_l\,\vec{в} + \text{пр}_l\,\vec{c}\,.$$

3. При умножении вектора на число его проекция умножается на это число

$$\text{пр}_l\,(\alpha\vec{a}) = \alpha\,\text{пр}_l\,\vec{a}\,.$$

1.13. *Понятие базиса и координат вектора на прямой*

Базисом на прямой называют ненулевой вектор $\vec{e}$, параллельный заданной прямой или лежащий на ней.

Любой вектор $\vec{a}$ на прямой может быть выражен единственным образом через базисный вектор $\vec{e}$ с помощью числа α, которое называется координатой вектора $\vec{a}$ относительно базиса $\vec{e}$ (рис. 21).

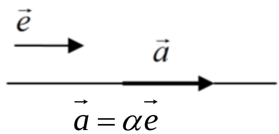
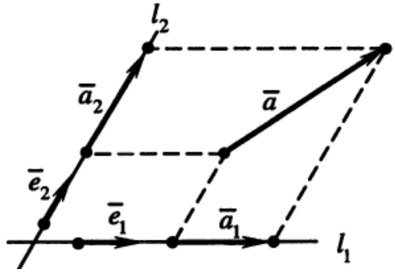


Рис. 21

1.14. *Понятие базиса и координат вектора на плоскости*

Базисом на плоскости называют пару ненулевых линейно независимых векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ или любую пара неколлинеарных векторов.

Любой вектор $\vec{a}$, лежащий в той же плоскости, может быть выражен через базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ *с* помощью чисел α_1 и α_2, которые называют координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ (рис. 22).



$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$$

Рис. 22

1.15. *Понятие базиса и координат вектора в пространстве*

Базисом в пространстве называют любую тройку ненулевых линейно независимых векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ или любую тройку некомпланарных векторов (рис. 23).

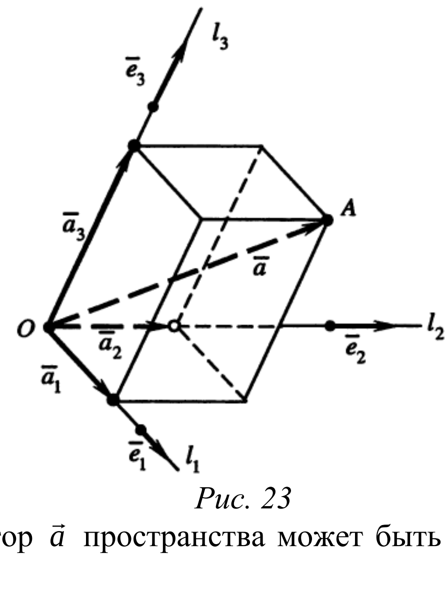


Рис. 23

Любой вектор $\vec{a}$ пространства может быть единственным образом выражен через базисные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ *с* помощью чисел α_1, α_2 и α_3 которые называют координатами вектора, $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ (рис. 23).

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}$$

1.16. *Какой базис называют декартовым?*

Векторный базис называют декартовым, если его векторы попарно ортогональны и имеют единичную длину. Векторы декартова базиса обозначаются $\vec{i}, \vec{j}$ на плоскости и $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в пространстве.

1.17. *Что такое декартовая система координат?*

Декартовая система координат – это совокупность декартового базиса и некоторой фиксированной точки O. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы трех взаимно перпендикулярных осей *OX,OУ,OZ* декартовой системы координат, выходящей из общей точки *O* – начала координат (рис.24).

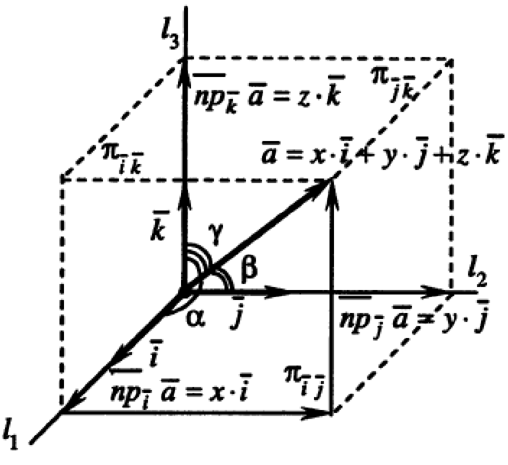


Рис.24

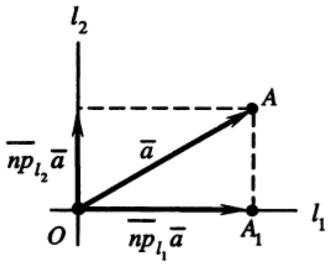


Рис.25

Разложение вектора $\vec{a}$ в декартовом базисе в пространстве:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \{x,y,z\},$$

x,y,z – декартовы координаты вектора, α, β, γ – углы между вектором $\vec{a}$ и осями координат *OX,OУ,OZ* соответственно (рис.24).

Разложение вектора $\vec{a}$ в декартовом базисе на плоскости (рис.25):

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} = \{x,y\}$.

1.18. *Как записать координаты точки на плоскости и в пространстве в декартовой системе координат?*

Радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ т. M в трехмерном пространстве или на плоскости называется вектор, идущий из начала координат в эту точку. Координатами т. M в декартовой системе координат называют координаты соответствующего ей радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$.

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ на плоскости (рис. 26),

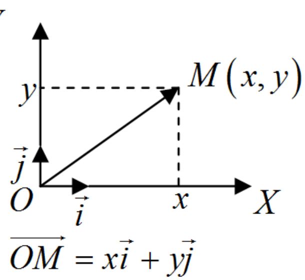


Рис. 26

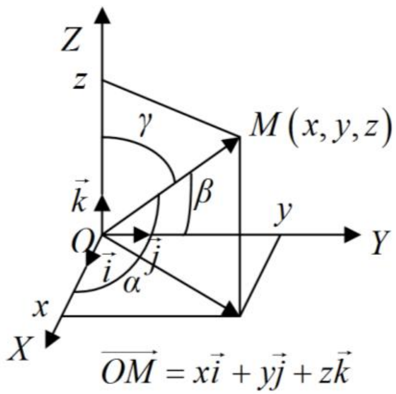


Рис. 27

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ в трехмерном пространстве (рис. 27).

$x = np_{\bar{i}}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\alpha$, $y = np_{\bar{j}}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\beta$,

$z = np_{\bar{k}}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\gamma$.

1.19. *К чему сводятся линейные операции над векторами, заданными своими координатами?*

Линейные операции над векторами на прямой, плоскости и в пространстве сводятся к точно таким же линейным операциям над их соответствующими координатами, т е. при сложении векторов их соответствующие координаты относительно одного и того же базиса складываются, а при умножении вектора на число – умножаются на это число.

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$:

$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$,

$\vec{в} = \{x_2, y_2, z_2\} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$.

Тогда сумма векторов $\vec{a} + \vec{в} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}$;
разность векторов $\vec{a} - \vec{в} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}$.

Следствие. Чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, заданного координатами точек $A(x_1, y_1, z_1)$ начала и $B(x_2, y_2, z_2)$ конца вектора, нужно из координат конца вычесть координаты начала. Как видно из рисунка 28,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

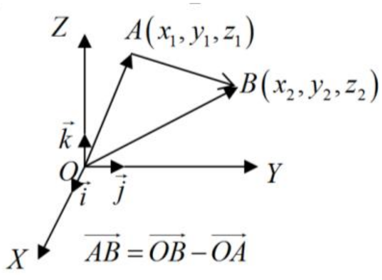


Рис. 28

Произведение вектора $\vec{a}$ на число α:

$$\vec{в} = \alpha\vec{a} = \alpha\{x_1,y_1,z_1\} = \{\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1\}.$$

1.20. *Как записать условие коллинеарности двух векторов в координатной форме?*

Условием коллинеарности векторов, заданных своими координатами, является пропорциональность соответствующих координат. Это следует из определения коллинеарных векторов и произведения вектора на число в координатной форме. Если $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ коллинеарны, то выполнено

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

1.21. *Как записать линейную комбинацию трех векторов в координатной форме?*

Координаты вектора $\vec{d}$, являющегося линейной комбинацией векторов $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$, будут равны линейной комбинации одноименных координат этих векторов. Т.е. запись

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

где $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$, $\vec{d} = \{x_4, y_4, z_4\}$ в координатной форме будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_4 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \\ y_4 = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 \\ z_4 = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 \end{cases}$$

Таким образом, если в пространстве задан базис $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$, то координаты {α, β, γ} вектора $\overline{d}$ в этом базисе найдутся из решения этой системы.

1.22. *Как найти длину вектора и расстояние между двумя точками в координатной форме?*

Если вектор задан в декартовой системе координат, то его длина находится по теореме Пифагора:

$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Расстояние AB между двумя точками $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$ можно рассматривать как длину вектора $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$,

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

1.23. *Что такое орт вектора и направляющие косинусы вектора?*

Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\overrightarrow{a^0}$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ и длина равна 1.

$$\overrightarrow{a^0} = 1, \quad \overrightarrow{a^0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Чтобы найти координаты орта, нужно разделить этот вектор на его длину:

$$\overrightarrow{a^0} = \left(\frac{x}{|\overline{a}|}, \frac{y}{|\overline{a}|}, \frac{z}{|\overline{a}|}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

Как известно, для задания вектора нужно знать его длину и направление. Направление вектора задается углами α, β, γ, которые он образует с осями координат *OX,OY,OZ*, соответственно. Зная координаты вектора, можно найти косинусы этих углов, которые называются направляющими косинусами вектора

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \ \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \ \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

Зная длину вектора и углы, которые он образует с осями координат, можно найти координаты вектора.

2. Решение задач

2.1. Даны векторы $\vec{a}$ ={3, 4}, $\vec{b}$ ={–*1*, 2}, $\vec{c}$ = {5, –2}. Найти координаты вектора $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$.

Решение. Согласно пункту 1.19, чтобы найти координаты вектора $\vec{d}$, нужно координаты вектора $\vec{a}$ умножить на 2, к ним прибавить соответствующие координаты вектора $\vec{b}$, умноженные на 3, и координаты вектора $\vec{c}$, умноженные на – 5, т.е.

$$x_{\vec{d}} = 2\cdot 3 + 3\cdot(-1) - 5\cdot 5 = -22,$$

$$y_{\vec{d}} = 2\cdot 4 + 3\cdot 2 - 5\cdot(-2) = 24.$$

Ответ: $\vec{d} = \{-22; 24\}$.

2.2. Представить вектор $\vec{c}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. $\vec{a}$ ={5,4}, $\vec{b}$ ={–3,3}, $\vec{c}$ ={19,8}.

Решение. По определению линейной комбинации имеем $\vec{c} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$, где α и β – коэффициенты линейной комбинации, которые и надо найти. Переходя от векторной формы записи вектора $\vec{c}$ к координатной, подставим вместо векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ сначала их первые координаты:

19 = α·5 + β·(–3),

затем – вторые координаты:

8 = α 4 + β·3.

Получаем для нахождения неизвестных коэффициентов α и β следующую систему:

$$\begin{cases} 19 = 5\alpha - 3\beta, \\ 8 \ \ = 4\alpha + 3\beta, \end{cases}$$

решив которую, получаем α =3; β = –4/3.

Ответ: $\vec{c} = 3\vec{a} - \dfrac{4}{3}\vec{b}.$

2.3. На плоскости даны три вектора $\vec{p}$ ={2, –3}, $\vec{q}$ ={1,2},

$\vec{r}$ = {9,4}. Убедившись, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ образуют базис, найти разложение вектора $\vec{r}$ по базису $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

Решение. Убедимся, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ образуют базис. Для этого убедимся, что векторы не коллинеарны, т.е. координаты этих векторов не пропорциональны:

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{2}$$

Следовательно, векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарные и образуют базис на плоскости. Далее решение идет аналогично решению предыдущей задачи. Решая систему

$$\begin{cases} 9 = 2\alpha + \beta \\ 4 = -3\alpha + 2\beta, \end{cases}$$

получаем α = 2, β = 5.

Искомое разложение имеет вид: $\vec{r} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$.

2.4. Построить векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + 10\vec{j}$. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ аналитически и геометрически.

Решение: Аналитическое разложение имеет вид:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Для нахождения коэффициентов α и β составим систему:

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha + 5\beta \\ 10 = -3\alpha + 4\beta \end{cases}$$

решением которой являются α= –2, β = 1. Значит,

$$\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}.$$

Чтобы получить геометрическое разложение, мы должны представить вектор $\vec{c}$ в виде диагонали параллелограмма, стороны которого лежат на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.28). Для этого проведем следующие построения. Продолжим прямые, на которых лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Затем через конец вектора $\vec{c}$ проведем прямые, параллельные сторонам параллелограмма, до пересечения с ними.

В нашем случае вектор $\vec{c}$ есть диагональ параллелограмма со сторонами $-2\vec{a}$ и $\vec{b}$, выходящими из одной и той же точки, т.е.

$$\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}.$$

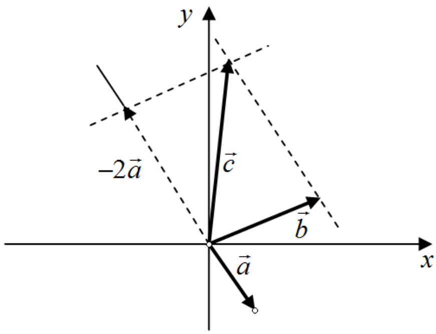


Рис.28

Аналитическое разложение совпало с геометрическим.

2.5. Даны точки A (1, 2, –1), B (5, 8, –3), C (2, 1, 1), D (4, 4, 0). Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну сторону или в противоположные.

Решение: Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, вычитая из координат точек – концов векторов соответствующие координаты точек – начал векторов

$$\overrightarrow{AB} = \{4, 6, -2\};\ \overrightarrow{CD} = \{2, 3, -1\}.$$

Коллинеарные векторы имеют пропорциональные соответствующие координаты. В нашем случае $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{-2}{-1} = 2$. Следовательно, векторы коллинеарные.

Коэффициент пропорциональности положителен, значит, векторы направлены в одну сторону. Найдем длины векторов по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где x, y, z – координаты $\vec{a}$.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14},$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}.$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ в 2 раза длиннее вектора $\overrightarrow{CD}$.

2.6. Показать, что точки A (2, 1, –5), B (–8, 1, 20), C (4, 1, –10) лежат на одной прямой.

Решение: Данные точки соединим между собой векторами, например, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{-10, 0, 25\}\ ,\ \overrightarrow{BC} = \{12, 0, -30\}.$$

Замечаем, что их соответствующие координаты пропорциональны между собой:

$$\frac{-10}{12} = \frac{0}{0} = \frac{-25}{-30}.$$

Отсюда следует, что векторы коллинеарны. Коллинеарные векторы лежат либо на параллельных прямых, либо на одной прямой. Поскольку векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ имеют общую точку B и притом коллинеарны, делаем вывод, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ лежат на одной прямой, но тогда и точки A, B, C, тоже будут лежать на одной прямой (рис. 29).

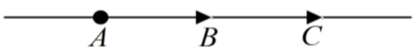


Рис. 29

2.7. Представить вектор $\vec{d} = \{4, 0, 0\}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a} = \{1, 1, -1\}$, $\vec{b} = \{2, 3, 0\}$ и $\vec{c} = \{4, 1, 2\}$.

Решение: Вектор $\vec{d}$ будет иметь вид:

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

где α, β, γ – коэффициенты линейной комбинации, которые и надо найти. Переходя от векторного равенства к координатным уравнениям, получаем систему линейных уравнений для нахождения α, β и γ:

$$\begin{cases} 4 = \alpha + 2\beta + 4\gamma \\ 0 = \alpha + 3\beta + \gamma \\ 0 = -\alpha + 2\gamma \end{cases}$$

Решая систему метом Крамера, находим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12, \ \Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24,$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12, \ \Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12.$$

Откуда получаем $\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = 2$, $\beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = -1$, $\gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta} = 1$.

Вектор $\vec{d}$ будет иметь вид: $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Даны точки *A* (3, –1, 2) и *B* (–1, 2, 1). Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Ответ. $\overrightarrow{AB}$ = {–4, 3, –1}, $\overrightarrow{BA}$ = {4, –3, 1}

3.2. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны.

Ответ: α = 4, β = –1.

3.3. Даны точки A (2, 1, 0), B (4, 0, 3), C (1, 1, –2), D (7, –2, 7). Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

Ответ. $\overrightarrow{CD} = 3\ \overrightarrow{AB}$.

3.4. Показать, что точки А (1, –1, 1), В (3, 0, –1), С (–1, –2, 3) лежат на одной прямой.

3.5. Даны три вектора $\vec{a}$ = {5, 7, 2}, $\vec{b}$ = {3, 0, 4}, $\vec{c}$ = {–6, 1, –1}. Найти координаты вектора $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$.

Ответ. $\vec{d} = \{7, 13, -7\}$.

3.6. Построить параллелограмм на векторах $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{k} - 3\vec{j}$ и найти длины его диагоналей.

Ответ. $\left|\vec{d}_1\right| = \sqrt{6}, \quad \left|\vec{d}_2\right| = 3\sqrt{2}.$

3.7. Найти орт вектора $\vec{a}$ = {3, 4, –12} .

Ответ. $\vec{a}_0 = \left\{\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{12}{13}\right\}.$

3.8. Дан вектор $\vec{a}$ = {–6, 2, 3}. Найти координаты орта вектора, коллинеарного с $\vec{a}$ и направленного 1) в ту же сторону, 2) в противоположную сторону.

Ответ. 1) $\vec{a}_0 = \left\{-\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right\}$, 2) $\vec{a}_0 = \left\{\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}\right\}.$

3.9. На плоскости даны три вектора $\vec{a}$ = {3, – 2}, $\vec{b}$ = {–2, 1}, $\vec{c}$ = {7, –4}. Определить разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других, предварительно убедившись, что эти векторы могут образовывать базис.

Ответ. $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}, \ \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}, \ \vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}.$

3.10. На плоскости даны три вектора $\vec{a}$ = {3, –1}, $\vec{b}$ = {1, –2}, $\vec{c}$ = {–1, 7}. Определить разложение вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по базису $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ответ. $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$

3.11. На плоскости *XOY* даны точки *A* (4, 2), *B* (2, 3) и *C* (0, 5) и построены векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Разложить аналитически и геометрически вектор $\vec{b}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

Ответ. $\vec{b} = 0.5\vec{a} + 0.4\vec{c}$.

3.12. На плоскости *XOY* построить векторы $\vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$. Разложить аналитически и геометрически вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ответ. $\vec{c} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$.

3.13. Представить вектор $\vec{d}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

1) $\vec{a}$ ={2,3,2}, $\vec{b}$ ={5,7,0}, $\vec{c}$ ={3, –2,4}, $\vec{d}$ ={4,12, –2};

2) $\vec{a}$ = {5, –2, 0}, $\vec{b}$ = {0, –3, 4}, $\vec{c}$ ={–6,0,1}, $\vec{d}$ ={25, –22,16}.

Ответ. 1) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, 2) $\vec{d} = 5\vec{a} + 4\vec{b}$.

4. Варианты проверочных заданий

Вариант 1

1. Даны три вектора $\vec{a}$ = {2, 4}, $\vec{b}$ = {–3, 1}, $\vec{c}$ = {5, –2}. Найти координаты вектора $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$.

2. Даны точки *A* (–1, 5), *B* (2, 1), *C* (–2, 3), *D* (2, 2). Найти разложение вектора $\overrightarrow{BD}$ по базису $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Вариант 2

1. Даны три вектора $\vec{a}$ = {5, 7,2}, $\vec{b}$ = {3, 0,4}, $\vec{c}$ = {–6, 1,-1}. Найти координаты вектора $\vec{d} = 5\vec{a} - 6\vec{b} + 2\vec{c}$.

2. Даны точки *A* (1, –2), *B* (2, 1), *C* (3, 2), *D* (–2, 3). Найти разложение вектора $\overrightarrow{AD}$ по базису $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Вариант 3

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{4, 6, -2\}$, $\vec{b} = \{3, 1,4\}$, $\vec{c} = \{1, 1,0\}$. Найти координаты вектора $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$.

2. Даны точки A (1, 5), B (2, 2), C (0, –2), D (1, 4). Найти разложение вектора $\overrightarrow{BD}$ по базису $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Вариант 4

1. Даны точки A (3, –1, 2), B (1, 2, –1), C (–1, 1, –3), D (3, –5, 3). Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

2. Даны точки A (3, 4), B (–2, 3), C (1, 3), D (7, 5). Найти разложение вектора $\overrightarrow{BC}$ по базису $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$.

Вариант 5

1. Даны точки A (1, –1, 3), B (2, 4, 5), C (3, 3, 1), D (4, 8, 3). Проверить, что векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ коллинеарны. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

2. Даны точки A (1, –1), B (3, 2), C (–1, 2), D (4, –7). Найти разложение вектора $\overrightarrow{AD}$ по базису $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Вариант 6

1. Даны точки A (1, 0, 2), B (3, 4, –1), C (9, 11, –6), D (5, 3, 0). Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

2. Даны точки A (5, –10), B (2, 7), C (–2, 3), D (1, 1). Найти разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ по базису $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. – М.: Физматлит, 2005. – 240 с.
2. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. – СПБ.: Лань, 2010. – 224 с.
3. *Минорский В.Н.* Сборник задач по высшей математике / В.Н. Минорский. – М.: Физматлит, 2010. – 335 с.
4. *Цубербиллер О Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О. Н. Цубербиллер. – СПБ.: Лань, 2007. – 336 с.
5. *Бахвалов С. В.* Сборник задач по аналитической геометрии / С. В. Бахвалов, П. С. Моденов, А. С. Пархоменко. – СПБ.: Лань, 2009. – 384 с.

Дополнительная литература

6. *Цепилевич Л. И.* Векторная алгебра. Методические указания / Л. И. Цепилевич. – Томск: Изд-во Томского архитектурно-строительного университета, 2001. – 82 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	3
Тема 1. Линейные операции над векторами	4
1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы	4
2. Решение задач	7
3. Банк задач для самостоятельной работы	12
4. Варианты проверочных заданий	13
Тема 2. Базис. Разложение по базису	15
1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы	15
2. Решение задач	25
3. Банк задач для самостоятельной работы	30
4. Варианты проверочных заданий	32
Библиографический список	34
Оглавление	35