Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Часть 2

Методические указания
для самостоятельной работы студентов

Составители, О.В. Иванова

Томск 2016

Векторная алгебра / Сост. О.В. Иванова – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2016. – 38 с.

Рецензент Р.И. Лазарева
Редактор Я. Д. Фахрутдинова

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине Б2.Б.1 – «Математика» при изучении темы «Векторная алгебра» студентами первого курса очной и заочной формы обучения всех направлений и всех профилей подготовки специалистов и бакалавров.

Печатаются по решению методического семинара кафедры высшей математики, протокол № 3 от 20 ноября 2015 г.

Утверждены и введены в действие проректором по учебной работе В.В. Дзюбо.

с 1.03. 2016
до 1.03.2021

Оригинал-макет подготовлен О.А. Ивановой.

Подписано в печать . .14.
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 2,37. Тираж 100 экз. Заказ № .

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемые методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов первого курса очной и заочной формы обучения при изучении темы «Векторная алгебра».

Математическое содержание данного раздела направлено на формирование у студентов профессиональных компетенций (ПК):

(ПК-1): использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применения методов математического анализа и моделирования теоретического и экспериментального исследования.

(ПК-2): способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат.

(ПК-5): владением основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией.

В результате освоения материала студент должен:

Знать основные понятия векторной алгебры: вектора, линейных операций над векторами, базиса, разложения по базису, скалярного произведения двух векторов, векторного произведения двух векторов, смешанного произведения трех векторов.

Уметь правильно использовать понятия и методы при решении конкретных задач.

Владеть методами решения задач векторной алгебры.

Векторная алгебра является основным математическим аппаратом в аналитической геометрии, в курсах физики, теоретической механики, сопротивления материалов и других дисциплин.

ТЕМА 1. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. *Определение скалярного произведения двух векторов*

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними, т.е

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

1.2. *Свойства скалярного произведения двух векторов*

1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$ – переместительное свойство,

2) $(\alpha\vec{a},\ \vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b})$ – постоянный множитель можно выносить за знак скалярного произведения,

3) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\ \vec{c})+(\vec{b},\ \vec{c})$ – распределительное свойство,

4) $(\vec{a},\vec{b})=0 \Rightarrow (\vec{a}\perp\vec{b})$,

5) $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\ пр_{\bar{a}}\vec{b} = |\bar{в}|\ пр_{\bar{в}}\vec{a}$,

6) $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$.

1.3.*Выражение скалярного произведения двух векторов через координаты перемножаемых векторов*

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноименных декартовых координат относительно одного и того же базиса.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в одном и том же декартовом базисе $(\bar{i},\bar{j},\bar{k})$: $\vec{a} = x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$, $\vec{в} = x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$.

Тогда $(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

1.4. *Механический смысл скалярного произведения двух векторов*

Реальным прообразом скалярного произведения является работа А постоянной силы $\vec{F}=(x_1,y_1,z_1)$, действующей на тело под углом α к направлению движения при перемещении на прямолинейном участке пути, характеризуемом вектором $\overline{S}=(x_2,y_2,z_2)$:

$$A=\left(\vec{F},\vec{S}\right)=\left|\vec{F}\right|\left|\vec{S}\right|\cos\alpha=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 .$$

1.5. *Геометрические приложения скалярного произведения*

1. Вычисление длины вектора:

$$(\vec{a},\vec{a})=\left|\vec{a}\right|^2\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$$

или $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где $\vec{a}=\left\{x,y,z\right\}$.

2. Нахождение угла между двумя векторами:

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{в}\right)=\frac{(\vec{a},\vec{в})}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{в}\right|}$$

или $\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{в}\right)=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$,

где $\vec{a}=\left\{x_1,y_1,z_1\right\}$, $\vec{b}=\left\{x_2,y_2,z_2\right\}$.

3. Нахождение направляющих косинусов вектора.

Если α, β, γ – углы между вектором $\vec{a}$ и осями координат *OX,OУ,OZ* соответственно, то направляющие косинусы вектора $\vec{a}=\left\{x,y,z\right\}$:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\left|\vec{a}\right|},\ \cos\beta=\frac{y}{\left|\vec{a}\right|},\ \cos\gamma=\frac{z}{\left|\vec{a}\right|},$$

причем $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

4. Нахождение проекции вектора $\vec{a}$ на ось, определяемую другим вектором $\vec{b}$.

$$пр_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{(\vec{a},\vec{в})}{\left|\vec{в}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} .$$

5. Проверка условия перпендикулярности векторов.

Из $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b})=0 \Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

2. Решение задач

2.1. Даны векторы $\vec{a}=\{5, –6, 1\}$, $\vec{b}=\{–4,3,0\}$, $\vec{c}=\{3, 1,2\}$. Найти: 1) $3\vec{a}^2 - 4\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 2\vec{c}^2$, 2) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Решение:

1) Квадрат вектора есть скалярное произведение вектора на себя, т.е. $\vec{a}^2 = \left(\vec{a},\vec{a}\right)$. Тогда

$$3\vec{a}^2 - 4\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 2\vec{c}^2 = 3\left(\vec{a},\vec{a}\right) - 4\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 2\left(\vec{c},\vec{c}\right).$$

Пользуясь формулой для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами,

$$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

где x_1, y_1, z_1 – координаты вектора $\vec{a}$, x_2, y_2, z_2 – координаты вектора $\vec{b}$, получаем

3 [5·5+(–6) (–6)+1·1]–4 [5·(–4)+(–6)·3+1·0]+2[3·3+1·1+2·2]=366.

2) Так как скалярное произведение $(\vec{a},\vec{b})$ представляет собой скалярную величину, то $\left(\vec{a},\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ есть вектор, коллинеарный вектору $\vec{c}$, поэтому координаты этого вектора будут равны координатам вектора $\vec{c}$, умноженным на число $(\vec{a},\vec{b})$.

$(\vec{a},\vec{b})$=5·(–4)+(–6)·3+1·0 =–38,

$\left(\vec{a},\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ =–{–38·3–38·1–38·2}={–114,–38,–76}.

2.2. Даны точки A(–1, 3, 7), B (2, –1, 5), C (0,1, –5). Вычислить $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}, 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$.

Решение.

Зная координаты векторов $\overrightarrow{AB}$={3,–4,–2}, $\overrightarrow{CB}$={2,–2,10}, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ найдем координаты векторов-сомножителей $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$

и $2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$:

$$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\{4,-6,-14\};\ 2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\{-7,8,-22\}.$$

Тогда их скалярное произведение будет равно сумме произведений соответствующих координат

$$(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB},\,2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=4\cdot(-7)+(-6)\cdot 8+(-14)\cdot(-32)=232.$$

2.3. Даны вершины четырехугольника $A(1,-2,2)$, $B(1,4,0)$, $C(-4,1,1)$, D $(-5,\ -5,\ 3)$. Доказать, что его диагонали $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ взаимно перпендикулярны.

Решение. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, совпадающие с диагоналями четырехугольника. Если эти векторы взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение должно быть равно 0. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ и вычислим их скалярное произведение:

$$\overrightarrow{AC}=\{-5,\ 3,\ -1\};\ \overrightarrow{BD}=\{-6,\ -9,3\}.$$

$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}) = (-5)\cdot(-6) + 3\cdot(-9) + (-1)\cdot 3 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$,
что и требовалось доказать.

2.4. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F}=\{3,-2,-5\}$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A $(2,\ -3,\ 5)$ в положение B $(3,-2,\ -1)$.

Решение. Согласно пункту 1.4, работа будет равна скалярному произведению вектора – силы $\vec{F}$ на вектор – путь $\overrightarrow{AB}$, т.е. $A=\left(\vec{F},\overrightarrow{AB}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Найдя координаты вектора $\overrightarrow{AB}=\{1,1,-6\}$, вычислим скалярное произведение

$$A = (\vec{F},\overrightarrow{AB}) = 3\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + (-5)(-6) = 31 \text{ ед.раб.}$$

2.5. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a}=\{6,-2,3\}$.

Решение. Используем формулы:

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|},\text{где } \vec{a}=\{x,y,z\}.$$

Так как $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$, то

$$\cos\alpha = \frac{6}{7},\ \cos\beta = -\frac{2}{7},\ \cos\gamma = \frac{3}{7}.$$

2.6. Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями ОХ и ОУ углы α = 60^0 и β=120^0 . Вычислить его координаты, если $|\vec{a}|$=2.

Решение. Зная направляющие косинусы вектора, можно найти его координаты по формулам:

$$x = |\vec{a}|\cos\alpha,\ y = |\vec{a}|\cos\beta,\ z = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

$$\cos\alpha = \cos 60^0 = \frac{1}{2},\ \cos\beta = \cos 120^0 = -\frac{1}{2}.$$

Зная, что направляющие косинусы вектора удовлетворяют условию $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, найдем неизвестный пока $\cos\gamma$.

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Мы получили два значения $\cos\gamma$, следовательно, и третья координата вектора будет иметь два значения.

Итак, один вектор, модуль которого равен 2, имеет координаты

$$x_1 = 2\frac{1}{2} = 1,\ y_1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1,\ z_1 = 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Второй вектор с таким же модулем имеет координаты

$$x_2 = 2\frac{1}{2} = 1,\ y_2 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1,\ z_2 = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}.$$

2.7. Даны вершины треугольника *A* (2,–1,3), *B*(1,1,1), *C*(0,0,5). Найти внутренний угол при вершине *C*.

Решение. Внутренний угол при вершине С образуется векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, исходящими из общей точки – вершины *C* треугольника *ABC* (рис.30). Угол между двумя векторами находится по формуле (для нашего случая):

$$\cos\angle C=\cos\left(\overrightarrow{CA}\,{}^\wedge\,\overrightarrow{CB}\right)=\frac{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|}.$$

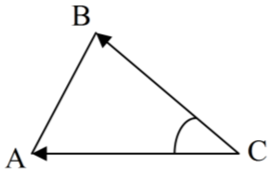

Рис. 30

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$:

$\overrightarrow{CA}$ ={2, –1, –2}, $\overrightarrow{CB}$ = {1, 1, –4}.

$\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$, $\left|\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=2-1+8=9$.

$$\cos\angle C=\frac{9}{3\cdot3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\angle C=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=45^0.$$

2.8. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, угол между которыми равен 60°.

Решение. Диагоналями параллелограмма являются векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$. Найдем их:

$\vec{a}+\vec{b}=\left(2\vec{m}+\vec{n}\right)+\left(\vec{m}-2\vec{n}\right)=3\vec{m}-\vec{n}$,

$\vec{a}-\vec{b}=\left(2\vec{m}+\vec{n}\right)-\left(\vec{m}-2\vec{n}\right)=\vec{m}+3\vec{n}$.

Используя формулу для скалярного квадрата вектора $\vec{c}$:

$\left(\vec{c},\vec{c}\right)=\left|\vec{c}\right|^2$, получим $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{\left(\vec{c},\vec{c}\right)}$. Тогда

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right)}=\sqrt{\left(3\vec{m}-\vec{n},3\vec{n}-\vec{m}\right)}=$$

$$=\sqrt{9\left(\vec{m},\vec{m}\right)-6\left(\vec{m},\vec{n}\right)+\left(\vec{n},\vec{n}\right)}=\sqrt{9\left|\vec{m}\right|^2-6\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\cos\left(\vec{m}\,{}^\wedge\vec{n}\right)+\left|\vec{n}\right|^2}.$$

По условию задачи $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 1$, $\vec{m}\hat{\ }\vec{n} = 60^0$. Подставив эти данные, получаем:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{9\cdot 1 - 6\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{7}\ .$$

Аналогично считаем длину другой диагонали:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{(\vec{m}+3\vec{n},\vec{m}+3\vec{n})} = \sqrt{(\vec{m},\vec{m}) + 6(\vec{m},\vec{n}) + 9(\vec{n},\vec{n})} =$$

$$= \sqrt{|\vec{m}|^2 + 6|\vec{m}||\vec{n}|\cos\left(\vec{m}\hat{\ }\vec{n}\right) + 9|\vec{n}|^2} = \sqrt{1 + 6\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2} + 9} = \sqrt{13}$$

2.9. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 3, -2\right\}$ на ось, составляющую с координатными осями *OX* и *OУ* углы $\alpha = 45^0$ и $\beta = 60^0$, а с осью *OZ* острый угол γ.

Решение. Проекция вектора $\vec{a}$ на произвольную ось $\vec{e}$ определяется формулой

$np_{\vec{e}}\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{e})}{|\vec{e}|} = (\vec{a},\vec{e}_0)$, где $\vec{e}_0$ – единичный вектор оси $\vec{e}$. Зная углы, которые образует ось $\vec{e}$ с координатными осями, можно задать координаты вектора $\vec{e}$ в виде направляющих косинусов, т е. $\vec{e}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Зная два угла α и β, мы найдем два направляющих косинуса $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, а затем и $\cos\gamma$, как это было сделано в предыдущей задаче.

$$\cos\alpha = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\beta = \cos 60^0 = \frac{1}{2},$$

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},\ \Rightarrow \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}.$$

По условию ось $\vec{e}$ образует с осью OZ острый угол, следовательно, выбираем $\Rightarrow \cos\gamma = \dfrac{1}{2}$, тогда $\vec{e}_0 = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$, а проекция будет равна

$$np_{\vec{e}}\vec{a} = \left(\vec{a}, \vec{e}_0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\frac{1}{2} + \left(-2\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 1.$$

2.10. Даны три вектора: $\vec{a} = \{1,2,-1\}, \vec{b} = \{3,0,2\}$ и $\vec{c} = \{2,-2,1\}$. Вычислить: 1} $np_{\vec{c}}\left(2\vec{a} + \vec{b}\right)$ и 2) $np_{(\vec{a}-2\vec{c})}\vec{b}$.

Решение. Первая проекция будет находиться по формуле

$$np_{\vec{c}}\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{\left(2\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right)}{\left|\vec{c}\right|}.$$

Найдем координаты вектора $2\vec{a} + \vec{b}$ = (5, 4, 0}. Скалярное произведение двух векторов $2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{c}$, заданных своими координатами, равно сумме произведений их одноименных координат: $\left(2\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) = 5\cdot 2 + 4\cdot\left(-2\right) + 0\cdot 1 = 10 - 8 = 2$

Тогда $np_{\vec{c}}\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) = \dfrac{\left(2\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right)}{\left|\vec{c}\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{2}{3}$.

Аналогично для второй проекции имеем $np_{(\vec{a}-2\vec{c})}\vec{b} = \dfrac{\left(\vec{b}, \vec{a} - 2\vec{c}\right)}{\left|\vec{a} - 2\vec{c}\right|}$.

Координаты вектора $\vec{a} - 2\vec{c}$ = {–3, 6, –3}, его модуль равен

$$\left|\vec{a} - 2\vec{c}\right| = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

Тогда

$$np_{(\vec{a}-2\vec{c})}\vec{b} = \frac{\left(\vec{b}, \vec{a} - 2\vec{c}\right)}{\left|\vec{a} - 2\vec{c}\right|} = \frac{3\cdot\left(-3\right) + 0\cdot 6 + 2\cdot\left(-3\right)}{3\sqrt{6}} = \frac{-15}{3\sqrt{6}} = -\frac{5}{\sqrt{6}}.$$

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}|$=3, $|\vec{b}|$=4, вычислить: ($\vec{a}$, $\vec{b}$), $\vec{a}^{\,2}$, $(\vec{a}+\vec{b})^2$,(3$\vec{a}$-2$\vec{b}$, $\vec{a}$+2$\vec{b}$).

Ответ. –6; 9; 13; –61.

3.2. Даны три вектора: $\vec{a}=\{5, -6{,}1\}$, $\vec{b}=\{-4{,}3{,}0\}$, $\vec{c}=\{5{,}8{,}10\}$. Вычислить:

1) 3($\vec{a}$, $\vec{b}$)– ($\vec{b}$, $\vec{c}$)–5($\vec{a}$, $\vec{c}$),

2) 2$\vec{a}^{\,2}$–3($\vec{a}$, $\vec{b}$)+3$|\vec{c}|^2$.

Ответ. 1) –353; 2) 805.

3.3. Даны точки A (–4, 3, 7)**,** B (2, –**7,** 5), C (6, 1, –5).

1) Вычислить $\left(\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{CA}\right), \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$,

2) Найти координаты векторов $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$.

Ответ. 1) 1440;140. 2) {864, –1440; –288}, {416, 832, –1040}.

3.4. Дано: $|\vec{a}|$ =3, $|\vec{b}|$ = 5. Определить, при каких значениях коэффициента α векторы $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

Ответ. $\alpha = \pm(3/5)$.

3.5.Вычислить, какую работу производит сила $\overline{F}$ ={1,–3,1}, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A (1,5, 1) в положение В (–1. 1,2).

Ответ. 11 ед. работы.

3.6. Даны три силы: $\overrightarrow{M}=\{3,-4,2\}$, $\overrightarrow{N}=\{2,3,-5\}$ и $\overrightarrow{D}$={–3,–2,4), приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения *A* (5, 3, –7) в положение *B* (–4, –1, –4).

Ответ. 13 ед.работы.

3.7. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a}$ ={2, –4,4} и $\vec{b}$ = {–3,2, 6}.

Ответ. $\cos\varphi = 5/12$.

3.8. Даны вершины треугольника *A* (–1, –2, 4), *B* (–4, –2, 0) и *C* (3, –2, 1). Определить его внутренний угол при вершине *B*.

Ответ. $\varphi=45^0$.

3.9. Даны вершины треугольника *A* (2, –2, 1), *B* (3, 0, 4), *C* (1, 1, –3). Найти его внешний угол при вершине *C*.

Ответ. $\varphi = \arccos\left(-11/\left(2\sqrt{39}\right)\right)$.

3.10. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Ответ. 4.

3.11. Вычислить проекцию вектора $\vec{a}$ = {7, 3, 2} на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

Ответ. $4\sqrt{3}$.

3.12. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ = {2, –3, –5} на ось, составляющую с координатными осями *OX* и *OZ* углы $\alpha = 45^0$ и $\gamma = 120^0$, а с осью *OУ* – острый угол β.

Ответ. –3.

3.13. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ = { $\sqrt{2}$, –3, –7} на ось, составляющую с координатными осями *OУ* и *OZ* углы ($\beta = 60^0$, $\gamma = 120^0$, а с осью *OX* – тупой угол α.

Ответ. 1.

3.14. Даны три вектора: $\vec{a}$ ={ 5,–6,1}, $\vec{b}$ ={ –4, 3, 0}, $\vec{c}$ ={ 5, –8,10}. Вычислить:

1} $пр_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, 2) $пр_{\left(\vec{b}+\vec{c}\right)}\vec{a}$ и $пр_{\vec{a}}\left(3\vec{c}-2\vec{b}\right)$.

Ответ. 1) –4; 2) $5/\sqrt{65}$; 3) $95/\sqrt{46}$.

3.15. Даны точки A (–2, 3, –4), B (3, 2, 5), C (1, –1, 2), D (3, 2, –4). Вычислить: 1} $пр_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$ и 2) $пр_{\overrightarrow{AC}}\left(\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BD}\right)$.

Ответ. 1) $-6\frac{5}{7}$, 2) $-\frac{120}{\sqrt{61}}$.

4. Варианты проверочных заданий

Вариант 1

1. Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+5\vec{j}$. Найти $пр_{\vec{b}}\vec{a}$.

2. Даны точки A (2, –1, 3), B (0, 4, 5), C (–1, 2, 0). Найти $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}$.

3. Даны вершины треугольника ΔABC: A (3, –1, 2), B (4,3,–1), C (0,5,2). Найти внутренний угол при вершине A.

Вариант 2

1. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+5\vec{k}$. Найти $пр_{\vec{a}}\vec{b}$.

2. Даны точки A (–1, 3, –7), B (–1, 2, 0), C (3, 2, 1). Найти $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$.

3. Даны вершины треугольника ΔABC: A (3, –1, 2), B (4, 3, –1), C (0, 5, 2). Найти внутренний угол при вершине B.

Вариант 3

1. Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+5\vec{j}$ и $\vec{c}=3\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$. Найти $пр_{\vec{c}}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$.

2. Даны точки A (2, -1, 3), B (-1, 2, 0), C (0, 4, 5). Найти $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$.

3. Даны вершины треугольника ΔABC: A (3, –1, 2), B (4, 3, –1), C (0, 5, 2). Найти внутренний угол при вершине C.

Вариант 4

1. Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j}$ и $\vec{c} = \vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$. Найти $np_{\vec{c}}\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right)$.

2. Даны точки A (2, –1, 3), B (0, 4, 5), C (–1, 2, 0), D (–1, 2, 0). Найти $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$.

3. Даны вершины треугольника ΔABC: A (2, –1, 3), B (1, 1, 1), C (0, 0, 5). Найти внутренний угол при вершине C.

Вариант 5

1. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$. Найти $np_{\vec{a}}\left(2\vec{c} - \vec{b}\right)$.

2. Даны точки A (2, –1, 3), B (3, 2, 1), C (0, 4, 5), D (–1, 2, 0). Найти $\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{CD}$.

3. Даны вершины треугольника ΔABC: A (2, –1, 3), B (1, 1, 1), C (0, 0, 5). Найти внутренний угол при вершине B.

Вариант 6

1. Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Найти $np_{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}\vec{c}$.

2. Даны точки A (–1, 2, 0), B (0, 4, 5), C (–1, 3, 7), D (1, 2, 3). Найти $\overrightarrow{AD}^2 \cdot \overrightarrow{CD}$.

3. Даны вершины треугольника ΔABC: A (0, 5, 2), B (4, 3, –1), C (3, –1, 2). Найти внешний угол при вершине C.

ТЕМА 2. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Определение векторного произведения двух векторов
Векторным произведением векторов $[\vec{a},\vec{в}]$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ называется третий вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$ (рис. 31);

2) длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{в}$, и равна произведению длин этих векторов на синус угла φ между ними (рис. 32):

$|\vec{c}| = |[\vec{a},\vec{в}]| = |\vec{a}||\vec{в}|\sin\varphi$;

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что из его конца кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{в}$ виден против часовой стрелки ($\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов) (рис. 31).

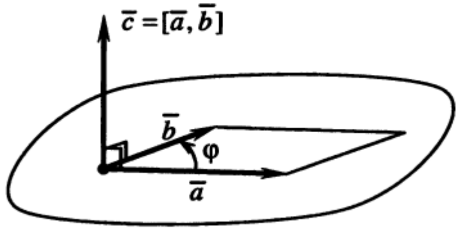

Рис. 31

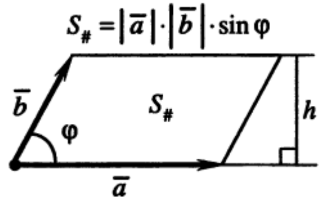

Рис. 32

1.2. Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак: $[\vec{a},\vec{в}] = -[\vec{в},\vec{a}]$.

2. Векторное произведение коллинеарных векторов ($\varphi = 0^0$) равно нулевому вектору ($\sin\varphi = 0$).
$[\vec{a},\vec{в}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \,//\, \vec{в}$. Отсюда следует, что $[\vec{a},\vec{a}] = 0$.

3. Числовой множитель можно выносить за знак векторного произведения: $[\alpha\vec{a},\vec{в}] = \alpha[\vec{a},\vec{в}]$.

4. Векторное произведение подчиняется распределительному закону $[\vec{a}+\vec{в}, \vec{c}]=[\vec{a}, \vec{c}]+[\vec{в}, \vec{c}]$.

5. Из определения векторного произведения следует, что векторные произведения единичных векторов будут соответственно $\left[\vec{i},\vec{i}\right]=\left[\vec{j},\vec{j}\right]=\left[\vec{k},\vec{k}\right]=0$, $\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k}$, $\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}$, $\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}$.

1.3. Выражение векторного произведения двух векторов через координаты перемножаемых векторов

Векторное произведение представляется в виде определителя третьего порядка

$$\left[\vec{a},\vec{в}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=$$

$\vec{i}\left(y_1z_2-z_1y_2\right)-\vec{j}\left(x_1z_2-z_1x_2\right)+\vec{k}\left(x_1y_2-y_1x_2\right)$. где $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$.

1.4. Механический смысл векторного произведения (рис.33)

Пусть т. O неподвижная точка твердого тела. К нему приложена сила $\vec{F}$ к т. A. Момент этой силы относительно неподвижной т. O равен векторному произведению векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\vec{F}$: $\overrightarrow{mom}\,\vec{F}_O=\vec{m}_O=\left[O\vec{A},\vec{F}\right]$.

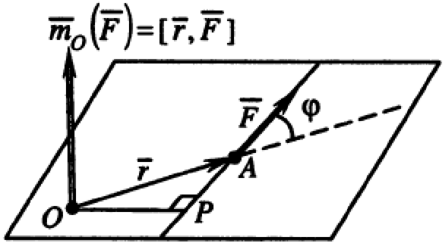

Рис. 33

2. Решение задач

2.1.Векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$ образуют между собой угол $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Зная, что $|\vec{a}|$ = √2, $|\vec{b}|$= 2, найти: $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$, $\left|\left[2\vec{a}-\vec{b},3\vec{a}+4\vec{b}\right]\right|$, $\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]^2$.

Решение.

1) По определению векторного произведения его модуль равен

$$\left|\left[\vec{a},\vec{в}\right]\right| = |\vec{a}||\vec{в}|\sin\varphi = \sqrt{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$$

2) Используя распределительное свойство векторного произведения, найдем $\left|\left[2\vec{a}-\vec{b},3\vec{a}+4\vec{b}\right]\right|$, перемножая каждое слагаемое первого вектора $2\vec{a}-\vec{b}$ на каждое слагаемое второго вектора. При этом надо следить за порядком множителей, потому что векторное произведение не перестановочно.

$$\left[2\vec{a}-\vec{b},3\vec{a}+4\vec{b}\right] = \left[2\vec{a},3\vec{a}\right] - \left[\vec{b},3\vec{a}\right] + \left[2\vec{a},4\vec{b}\right] - \left[\vec{b},4\vec{b}\right].$$

Но $\left[2\vec{a},3\vec{a}\right]$= 0 и $\left[\vec{b},4\vec{b}\right]$ = 0, так как векторное произведение коллинеарных векторов равно 0, а $\left[\vec{b},3\vec{a}\right] = -\left[3\vec{a},\vec{b}\right]$, поскольку при перестановке перемножаемых векторов векторное произведение меняет свой знак на противоположный. Учитывая это и вынося постоянный множитель за знак векторного произ- введения, получаем:

$$\left[2\vec{a}-\vec{b},3\vec{a}+4\vec{b}\right] = 3\left[\vec{a},\vec{b}\right] + 8\left[\vec{a},\vec{b}\right] = 11\left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

Окончательно:

$$\left|\left[2\vec{a}-\vec{b},3\vec{a}+4\vec{b}\right]\right| = \left|11\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = 11\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = 11\cdot 2 = 22.$$

3) Выражение $\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]^2$ представляет собой скалярный квадрат вектора $\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]$ и, следовательно, равен квадрату модуля этого векторного произведения.

Сначала найдем $\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]$ аналогично тому, как мы это делали в предыдущем примере, т.е.

$$\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]=\left[2\vec{a},\vec{a}\right]+\left[\vec{b},\vec{a}\right]+\left[2\vec{a},2\vec{b}\right]+\left[\vec{b},2\vec{b}\right]=$$
$$=-\left[\vec{a},\vec{b}\right]+4\left[\vec{a},\vec{b}\right]=3\left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

Затем найдем модуль $\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]$:

$$\left|\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]\right|=3\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=3\cdot 2=6\,.$$

Окончательно,

$$\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]^2=\left|\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]\right|^2=6^2=36.$$

2.2. Упростить выражение

$$\left[\vec{i}-2\vec{j},\vec{i}+\vec{k}\right]-\left[\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},2\vec{j}-\vec{k}\right].$$

Решение. Сначала найдем первое слагаемое.

Воспользуемся распределительным свойством векторного произведения и перемножим вектор $\vec{i}-2\vec{j}$ на вектор $\vec{i}+\vec{k}$:

$$\left[\vec{i}-2\vec{j},\vec{i}+\vec{k}\right]=\left[\vec{i},\vec{i}\right]-\left[2\vec{j},\vec{i}\right]+\left[\vec{i},\vec{k}\right]-\left[2\vec{j},\vec{k}\right]=$$
$$=2\left[\vec{i},\vec{j}\right]-\left[\vec{k},\vec{i}\right]-2\left[\vec{j},\vec{k}\right].$$

Так как $\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k}$, $\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}$, $\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}$, получаем:

$$\left[\vec{i}-2\vec{j},\vec{i}+\vec{k}\right]=2\vec{k}-\vec{j}-2\vec{i}\,.$$

Аналогичным образом найдем второе слагаемое:

$$\left[\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},2\vec{j}-\vec{k}\right]=\left[\vec{i},2\vec{j}\right]+\left[\vec{j},2\vec{j}\right]+\left[\vec{k},2\vec{j}\right]-\left[\vec{i},\vec{k}\right]-$$

$$-\left[\vec{j},\vec{k}\right]-\left[\vec{k},\vec{k}\right]=2\left[\vec{i},\vec{j}\right]-2\left[\vec{j},\vec{k}\right]+\left[\vec{k},\vec{i}\right]-\left[\vec{j},\vec{k}\right]=$$

$$=2\left[\vec{i},\vec{j}\right]-3\left[\vec{j},\vec{k}\right]+\left[\vec{k},\vec{i}\right]=2\vec{k}-3\vec{i}+\vec{j}.$$

Объединяя полученные слагаемые, имеем результат:

$$\left(2\vec{k}-\vec{j}-2\vec{i}\right)-\left(2\vec{k}-3\vec{i}+\vec{j}\right)=2\vec{k}-\vec{j}-2\vec{i}-2\vec{k}+3\vec{i}-\vec{j}=$$

$$=\vec{i}-2\vec{j}.$$

2.3. Даны векторы и $\vec{a}$ = {2, 1,-1} и $\vec{в}$ = {3, 0, 4}. Найти координаты векторных произведений $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, $\left[\vec{a}-2\vec{b},3\vec{a}+\vec{b}\right]$.

Решение.

Сначала найдем координаты векторов $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+\vec{b}$, а затем найдем векторное произведение полученных векторов с помощью определителя, т.е.

$$\vec{a}-2\vec{b}=\{-4,\ 1,\ -9\},\ 3\vec{a}+\vec{b}=\{9,3,1\}.$$

$$\left[\vec{a}-2\vec{b},3\vec{a}+\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 1 & -9\\ 9 & 3 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & -9\\ 3 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-4 & -9\\ 9 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 9 & 3\end{vmatrix}=28\vec{i}-77\vec{j}-21\vec{k}.$$

2.4. Сила $\vec{Q}$={3,4, –2} приложена к точке A (4, 2, –3). Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно B (2, 2, 0).

Решение. По определению момент силы относительно точки B равен $\overrightarrow{mom\,Q_B}=\left[\overrightarrow{BA},\vec{Q}\right]$.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{BA}$={2, 0, –3}. Запишем векторное произведение $\overrightarrow{mom\,Q_B}=\left[\overrightarrow{BA},\vec{Q}\right]$. в координатной форме:

$$\left[\overrightarrow{BA},\vec{Q}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -3\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}=12\vec{i}-5\vec{j}+8\vec{k}.$$

Следует обратить внимание на порядок сомножителей, так как векторное произведение не перестановочно:

Теперь найдем модуль и направляющие косинусы для полученного вектора по известным ранее формулам:

$$\overrightarrow{mom\,Q_B}=\left|\left[\overrightarrow{BA},\vec{Q}\right]\right|=\sqrt{12^2+(-5)^2+8^2}=\sqrt{233}.$$

$$\cos\alpha=\frac{12}{\sqrt{233}},\ \cos\beta=-\frac{5}{\sqrt{233}},\ \cos\gamma=\frac{8}{\sqrt{233}}.$$

2.5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=5\vec{j}-\vec{k}$.

Решение. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{в}$, исходящих из общей точки, равна модулю векторного произведения этих векторов. В нашем случае векторы имеют координаты $\vec{a}$ = {3, –2, 1}, $\vec{в}$ = {0, 5, –1}. тогда

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 5 & -1\end{vmatrix}=-3\vec{i}+3\vec{j}+15\vec{k}\ \text{ и}$$

$$S_{\square}=\left|\left[\vec{a},\vec{в}\right]\right|=\sqrt{(-3)^2+3^2+15^2}=3\sqrt{27}\ \text{ ед. площади.}$$

2.6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол 30^0.

Решение. Площадь параллелограмма, как и в предыдущей задаче, равна модулю векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$. На этот раз мы сначала найдем векторное произведение векторов $\vec{m}+2\vec{n}$ и $2\vec{m}+\vec{n}$, а затем его модуль таким образом, как это было сделано в задаче 1:

$$\left[\vec{m}+2\vec{n},2\vec{m}+\vec{n}\right]=\left[\vec{m},2\vec{m}\right]+\left[2\vec{n},2\vec{m}\right]+\left[\vec{m},\vec{n}\right]+\left[2\vec{n},\vec{n}\right]=$$

$$=-4\left[\vec{m},\vec{n}\right]+\left[\vec{m},\vec{n}\right]=-3\left[\vec{m},\vec{n}\right],$$

$$\left|\left[\vec{m}+2\vec{n},2\vec{m}+\vec{n}\right]\right|=\left|-3\left[\vec{m},\vec{n}\right]\right|=3\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\sin\left(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}\right)=$$

$$=3\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 30^0=3\cdot\left(1/2\right)=3/2.$$

$S_{\square}=3/2$ ед. площади.

2.6.Даны вершины треугольника A (1, 2, 3), B (4, 0, 5), C (–3, 1, 2). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

Решение. Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах-сторонах треугольника, исходящих из общей вершины B. Например, так:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|.$$

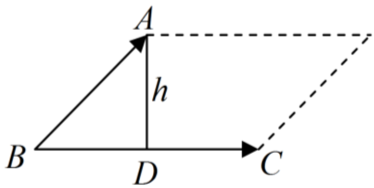

Рис. 34

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{BA}$={–3, 2, –2}, $\overrightarrow{BC}$={–7, 1, –3}.

$$\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & -2\\ -7 & 1 & -3\end{vmatrix}=-4\vec{i}+5\vec{j}+11\vec{k}.$$

Значит,

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(-4\right)^2+5^2+11^2}=\frac{\sqrt{162}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

С другой стороны, из элементарной математики известно, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту. В нашем случае $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot h$.Отсюда $h=\frac{2S_{\Delta}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}\cdot$ Найдем $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{49+1+9}=\sqrt{59}$.Значит $h=\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{59}}\cdot$

2.8. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}$ = {1,2, –1} и $\vec{в}$ = {3, 4, 0}, образуют с осью OX острый угол. Зная, что $\left|\vec{x}\right|$=2√29, найти его координаты.

Решение. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$, будет коллинеарен вектору, равному векторному произведению $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, который тоже перпендикулярен этим двум векторам, т.е. $\vec{x}=k\cdot\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, так как коллинеарные векторы линейно зависимы между собой. Чтобы найти координаты вектора $\vec{x}$, нужно сначала найти координаты векторного произведения $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, затем коэффициент линейной зависимости k, для которого справедливо соотношение $\left|k\right|=\frac{\vec{x}}{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|}\cdot$и после этого умножить координаты $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ на найденный коэффициент.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix}=4\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}.$$

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\sqrt{16+9+4}=\sqrt{29}.\ \left|k\right|=\frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{29}}=2\cdot$$

Вектор $\vec{x}$ образует с осью OX острый угол, следовательно, его координата x должна иметь положительный знак. Учитывая это, коэффициент k выберем равным 2. Тогда все координаты вектора $\vec{x}$ будут в 2 раза больше соответствующих координат вектора , т.е. $\vec{x}$ ={8, –6, –4}.

3. Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Зная, что $\left|\vec{a}\right|$ = 6, $\left|\vec{b}\right|$ = 5, вычислить $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

Ответ. 15.

3.2. Даны: $\left|\vec{a}\right|$ = 10, $\left|\vec{b}\right|$ = 5, $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ = 12. Вычислить $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

Ответ. 16.

3.3. Даны: $\left|\vec{a}\right|$ = 3, $\left|\vec{b}\right|$ = 26, $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$ = 72. Вычислить $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Ответ. ± 30.

3.4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $\left|\vec{a}\right|$=3, $\left|\vec{b}\right|$ = 4, вычислить: 1) $\left|\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right]\right|$, 2) $\left|\left[3\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-2\vec{b}\right]\right|$.

Ответ. 1) 24; 2) 60.

3.5.Упростить выражения:

1) $\left[\vec{i},\vec{j}+\vec{k}\right]-\left[\vec{j},\vec{i}+\vec{k}\right]+\left[\vec{k},\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right]$,

2) $\left[\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},\vec{i}+\vec{k}\right]-\left[\vec{j}-2\vec{k},\vec{k}\right]+\left[\vec{k},\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right]$.

Ответ. 1) $2\left(\vec{k}-\vec{i}\right)$; 2) $-\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$.

3.6. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Доказать, что $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{c},\vec{a}\right]$.

3.7. Даны векторы $\vec{a}$ $=\{3, –1, –2\}$ и $\vec{b}$ $=\{1,2, –1\}$. Найти координаты векторных произведений: 1) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, 2) $\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{b}\right]$, 3)$\left[2\vec{a}-\vec{b},2\vec{a}+\vec{b}\right]$, 4) $\left[3\vec{a}-5\vec{b},4\vec{a}-7\vec{b}\right]$.

Ответ.1) {5, 1, 7}, 2) {10, 2, 14}, 3) {20, 4, 28}, 4) {–5, –1, –7}.

3.8. Даны точки A (2, –1, 2), B (1, 2, –1), C (3, 2, 1). Найти координаты векторных произведений:

1) $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]$, 2) $\left[\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right]$, 3) $\left[\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{CA}\right]$.

Ответ. 1) {6, -4, -6}, 2) {-12, 8, 12}, 3) {24, -16, -24}.

3.9. Сила $\vec{F}$ = {3, 2, –4] приложена к точке A (2, –1, 1). Определить момент этой силы относительно начала координат.

Ответ. {2, 11, 7}.

3.10. Сила $\vec{P}$ = {2, 2, 9} приложена к точке A (4, 2, –3). Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки C (2, 4, 0).

Ответ. $28, \cos\alpha=-3/7, \cos\beta=-6/7, \cos\gamma=2/7$.

3.11. Даны три силы $\vec{M}$ = {2, –1, –3}, $\vec{N}$ ={3,2, –1} и $\vec{P}$ ={–4,1,3}, приложенные к точке C (–1, 4, –2). Определить величину и направление момента равнодействующей этих сил относительно точки A (2, 3, –1).

Ответ. $\sqrt{66}$, $\cos\alpha=1/\sqrt{66}, \cos\beta=-4/\sqrt{66}, \cos\gamma=-7/\sqrt{66}$.

3.12. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах: 1) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$,$\vec{b}=\vec{i}-4\vec{j}$; 2) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

Ответ. 1) 11 кв.ед. 2) $\sqrt{35}$ кв.ед.

3.13. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}$, где $|\vec{m}|$=5, $|\vec{n}|$=3 и $\vec{m}\,\hat{}\,\vec{n}=\pi/6$.

Ответ. 37.5 кв.ед.

3.14. Даны точки A (1, 2, 0), B (3, 0, –3), C (5, 2, 6). Вычислить площадь треугольника ABC.

Ответ. S =14кв.ед.

3.15. Даны вершины треугольника A (1, –1, 2), B (5, –6, 2), C (1, 3, –1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AB.

Ответ. 5.

3.16. Даны вершины треугольника A (–1, 2, –3), B (3, 4, –6), C (1, 1, –1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

Ответ. 3.

3.17.Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}=\{4,–2,–3\}$ и $\vec{b}$ = {0, 1, 3}, образует тупой угол с осью ОУ. Зная, что $|\vec{x}|$ = 26, найти его координаты.

Ответ. $\vec{x}$ ={–6, –24,8}.

4. Варианты проверочных заданий

В первом задании найти площадь треугольника АВС, вершины которого даны.

Во втором задании дана сила $\vec{F}$, приложенная к точке А. Определить величину и направление момента этой силы относительно точки В.

В третьем задании упростить данное выражение.

Вариант 1

1. A (1,2,3), B (0, 4, 5), C (–1,2,0).
2. $\vec{F}$ ={1,2,3}, A (–1,0, 2), B (0,0,0)
3. $\left[\vec{i}+\vec{j},\vec{k}\right]+\left[\vec{k}-\vec{j},\vec{i}\right]$.

Вариант 2

1. A (–1,3, –7), B (–1,2,0), C (3,2,1).
2. $\vec{F}$ ={2, –1,3}, A(1, –1,2),B(1, 1, 1).
3. $\left[2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\vec{i}+\vec{j}\right]$.

Вариант 3

1. A (0, 4, 5), B (1, 1,1), C (4, 3, –1).
2. $\vec{F}$ ={1, –1,2}, A(1,0,5),B(3, –1, 2).
3. $\left[\vec{i},\vec{j}+\vec{k}\right]-\left[\vec{j},\vec{i}+\vec{k}\right]+\left[\vec{k},\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right]$.

Вариант 4

1. A (3, –1, 2), B (4, 3, –1), C (0, 5, 2).
2. $\vec{F}$ ={3,4, –2}, A(2, –1, –2),B(1, 1,4).
3. $\left[\vec{i}-2\vec{j},\vec{k}+\vec{j}\right]-\left[2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}\right]$.

Вариант 5

1. A (2, –1,3), B (–1,2,0), C (0, 4, 5).
2. $\vec{F}$ ={2, 2, 9}, A(4, 2, –3),B(2,4, 0).
3. $\left[\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k},-\vec{i}+\vec{j}\right]-\left[2\vec{i}-\vec{k},\vec{j}-2\vec{k}\right]$.

Вариант 6

1. A (2, –1,3), B (1, 1, 1), C (0, 0, 5).
2. $\vec{F}$ ={3,4, –2}A (2, 4,0), B (4,3, –2).
3. $\left[\vec{i}+\vec{j},\vec{k}\right]+\left[\vec{k}-\vec{j},\vec{i}\right]$.

ТЕМА 3. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ ВЕКТОРОВ

1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы

1.1. Определение смешанного произведения трех векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $[\vec{в},\vec{c}]$.Обозначается оно так: $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})=\vec{a}\ \ [\vec{в},\vec{c}]$.

1.2. Свойства смешанного произведения

1. При циклической перестановке векторов величина смешанного произведения не изменяется. Если поменять местами 2 соседних вектора, смешанное произведение изменит знак.

$(\vec{a},\vec{в},\vec{c}) = (\vec{в},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{в})$.

$(\vec{a},\vec{в},\vec{c}) = -(\vec{в},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{в}) = -(\vec{c},\vec{в},\vec{a},)$.

2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Следствие. Если в смешанном произведении участвуют два одинаковых вектора, то смешанное произведение равно нулю.

1.3. Выражение смешанного произведения трех векторов через координаты этих векторов

Смешанное произведение равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов:

$$(\vec{a},\vec{в},\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

$\vec{a} = \{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{в} = \{x_2,y_2,z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3,y_3,z_3\}$.

1.4. Геометрическое истолкование смешанного произведения

Смешанное произведение трех некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ исходящих из общего начала, взятому со знаком плюс, если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ правая и со знаком минус, если тройка левая.

2. Решение задач

2.1. Определить, какой является тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ (левой или правой):

1) $\vec{a} = \vec{j}, \quad \vec{b} = \vec{i}, \quad \vec{c} = \vec{k}$. 2) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{b} = \vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$.

Решение. Если смешанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$, $\vec{c}$ положительно, то векторы образуют правую тройку; если отрицательно – левую. В нашем случае,

1) $\left(\vec{a},\vec{в},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\left[\vec{в},\vec{c}\right]\right)=$

$$=\left(\vec{j},\left[\vec{i},\vec{k}\right]\right)=-\left(\vec{j},\left[\vec{k},\vec{i}\right]\right)=-\left(\vec{j},\vec{j}\right)=-\left|\vec{j}\right|^2=-1\Rightarrow \text{тройка левая.}$$

Здесь было использовано векторное произведение ортов декартова базиса.

2) $\left(\vec{a},\vec{в},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\left[\vec{в},\vec{c}\right]\right)=$

$$=\left(\vec{i}+\vec{j},\left[\vec{j},\vec{j}+\vec{k}\right]\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\Rightarrow \text{тройка правая.}$$

2.2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{в}$ равен 30^0 . Зная, что $\left|\vec{a}\right|$ = 6, $\left|\vec{b}\right|$= 3, $\left|\vec{c}\right|$ = 3, вычислить $\left(\vec{a},\vec{в},\vec{c}\right)$.

Решение. По определению смешанного произведения

$$\left(\vec{a},\vec{в},\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{a},\vec{в}\right],\vec{c}\right),$$

далее по определению скалярного произведения

$$\left(\left[\vec{a},\vec{в}\right],\vec{c}\right)=\left|\left[\vec{a},\vec{в}\right]\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\left(\left[\vec{a},\vec{в}\right],^\wedge \vec{c}\right).$$

Так как вектор $\vec{c}$ по условию перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$, то он будет коллинеарен вектору $\left[\vec{a},\vec{в}\right]$,который по определению векторного произведения в свою очередь тоже перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$. Отсюда следует, что угол между векторами $\left[\vec{a},\vec{в}\right]$ и $\vec{c}$ либо равен 0^0, если векторы одинаково направлены, либо равен 180^0, если векторы противоположно направлены. Значит, $\cos\left(\left[\vec{a},\vec{в}\right],^\wedge \vec{c}\right)=\pm 1$. Тогда

$$\left(\vec{a},\vec{в},\vec{c}\right)=\pm\left|\left[\vec{a},\vec{в}\right]\right|\cdot\left|\vec{c}\right|=\pm\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{в}\right|\cdot\sin\left(\vec{a},^\wedge \vec{в}\right)\cdot\left|\vec{c}\right|=$$

$$\pm|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\sin 30^0\cdot|\vec{c}| = = \pm 6\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = \pm 27 .$$

2.3. Доказать тождество: $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}\right)=2\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

Решение.

$$\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}\right)=\left(\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c}\right],\vec{c}+\vec{a}\right)=$$

используем свойства векторного и скалярного произведений:

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{c}+\vec{a}\right)=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)+\left(\left[\vec{a},\vec{c}\right],\vec{c}\right)+$$

$$+\left(\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{c}\right)+\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{a}\right)+\left(\left[\vec{a},\vec{c}\right],\vec{a}\right)+\left(\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{a}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+$$

$$+\left(\vec{a},\vec{c},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c},\vec{c}\right)+\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right)+\left(\vec{a},\vec{c},\vec{a}\right)+\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=2\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right),$$

так как $\left(\vec{a},\vec{c},\vec{c}\right)=0,\left(\vec{b},\vec{c},\vec{c}\right)=0,\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right)=0,\left(\vec{a},\vec{c},\vec{a}\right)=0,$

а $\left(\vec{в},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{a},\vec{в},\vec{c}\right)$

на основании свойств смешанного произведения.

2.4. Показать, что векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{c}=3\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ компланарны и найти линейную зависимость между ними.

Решение. Условием компланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\vec{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения.

Составим определитель третьего порядка из координат данных векторов – это и будет их смешанным произведением:

$$\left(\vec{a},\vec{в},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & -2 & 0\\ 3 & -3 & 4\end{vmatrix}=0$$

Вычисляем определитель любым способом и получаем $\left(\vec{a},\vec{в},\vec{c}\right)$=0, откуда следует, что векторы компланарны. Но компланарные векторы линейно зависимы между собой, т.е. найдутся такие три числа α, β, γ, не равные нулю одновременно, что будет иметь место равенство:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0.$$

Перейдем к координатам векторов и получим систему уравнений относительно неизвестных α, β, γ:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=0,\\ \alpha-2\beta-3\gamma=0,\\ 4\alpha+4\gamma=0.\end{cases}$$

Решая однородную систему, имеющую бесчисленное множество ненулевых решений, выберем одно из множества решений $\alpha=-1,\ \beta=-2,\ \gamma=1$. Значит линейная зависимость между $\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\vec{c}$ имеет вид: $-\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}=0$.

2.5. Показать, что точки *A* (3, 1, 0), *B* (6, 1, -1), *C* (-1, 5, 4) и *D* (1, 0, 0) лежат в одной плоскости. Разложить вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Решение. Одну из данных точек примем за общее начало, например, точку А. Из этой точки направим векторы в точки *B*, *C* и *D*. Рассмотрим получившиеся векторы, если эти векторы будут компланарны, т.е. будут лежать в одной плоскости, тогда и все четыре точки *A*, *B*, *C*, *D* тоже будут лежать в одной плоскости.

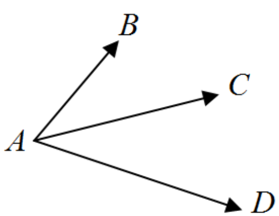

Рис. 35

Найдем координаты векторов

$\overrightarrow{AB}$ = {3, 0, –1}, $\overrightarrow{AC}$ ={–4, 4, 4}, $\overrightarrow{AD}$ = {–2, –1,0}

и составим их смешанное произведение:

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}3 & 0 & -1\\ -4 & 4 & 4\\ -2 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 8 & 4 & 4\\ -2 & -1 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ равно нулю, значит, они компланарны. Тогда точки *A*, *B*, *C*, *D* лежат в одной плоскости.

Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$ тоже лежат в одной плоскости и, следовательно, линейно зависимы между собой. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$:

$\overrightarrow{BC} = \{-7, 4, 5\}, \overrightarrow{BD} = \{-5, -1, 1\}$.

Поскольку координаты векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$ не пропорциональны $\frac{-7}{-5} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{5}{1}$, то эти векторы не коллинеарны между собой и, значит, могут быть выбраны в качестве базисных векторов. Тогда разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ по базису $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$ будет иметь вид: $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$.

Перейдем от векторного уравнения к координатным, подставив вместо векторов их соответствующие координаты. Получим систему:

$$\begin{cases}3 = -7\alpha - 5\beta,\\ 0 = 4\alpha - \beta,\\ -1 = 5\alpha + \beta,\end{cases}$$

решив которую, получаем $\alpha = -1/9$, $\beta = -4/9$. Окончательно,

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{BC} + -\frac{4}{9}\overrightarrow{BD}.$$

2.6.Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\vec{в}$ и $\vec{c}$.

Решение.

$$V_{пар.} = S_{осн.} \cdot H \,.$$

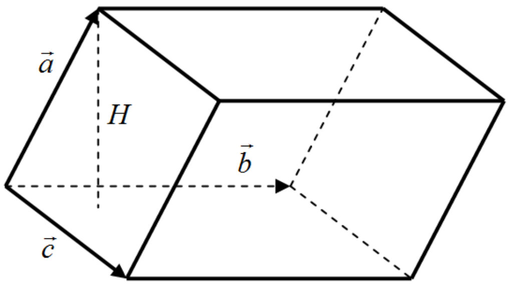

Рис. 36

Объем параллелепипеда найдем, используя смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\vec{c}$. В основании параллелепипеда лежит параллелограмм, построенный на векторах $\vec{в}$ и $\vec{c}$. Следовательно, его площадь равна модулю векторного произведения векторов - сторон $\vec{в}$ и $\vec{c}$.

Найдем $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$: $\left[\vec{b},\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}.$

$$S_{осн.} = \left|\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right| = \sqrt{11^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{134}\,.$$

Теперь найдем смешанное произведение векторов

$$(\vec{a},\vec{в},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 49\,.$$

Значит, $V_{пар.} = 49$ и $H = V_{пар.} / S_{осн.} = 49/\sqrt{134}$.

2.7.Даны вершины тетраэдра A (2, 1, –1), B (3, 2, 0), C (4, 1, –2), D (0, 5, 3). Найти длину его высоты, опущенной из вершины A.

Решение. Сделаем схематический чертеж. Длину высоты пирамиды можно найти, пользуясь формулой $V_{пир.} = S_{осн.} \cdot H / 3$. С другой стороны, объем пирамиды средствами векторной алгебры может быть найден таким образом:

$$V_{пир.} = \frac{1}{6} V_{пар.} = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \right) \right|,$$

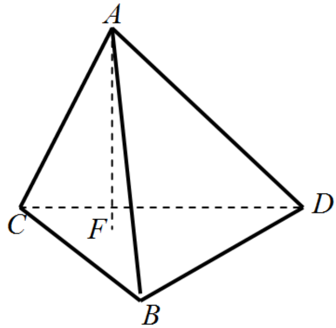

Рис. 37

а площадь основания, которым является треугольник BCD, найдем с помощью векторного произведения

$$S_{осн.} = S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \right] \right|.$$

Получаем $\frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \right) \right| = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \right] \right| \cdot H$,

Откуда $H = \dfrac{\left| \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \right) \right|}{\left| \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \right] \right|}$.

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{BC} = \{1, -1, -2\}, \overrightarrow{BA} = \{-1, -1, -1\}, \overrightarrow{BD} = \{-3,3,3\}.$$

$$\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 3\vec{j}.$$

$$\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

$$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2\\ -3 & 3 & 3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -3\\ 1 & -2 & -2\end{vmatrix}=-6.$$

Окончательно,

$$H=\frac{6}{3\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

3.Банк задач для самостоятельной работы

3.1. Определить, какой является тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\vec{c}$ (левой или правой):

1. $\vec{a}=\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i},\ \vec{c}=\vec{j}.$
2. $\vec{a}=\vec{i},\ \vec{b}=\vec{k},\ \vec{c}=\vec{j}.$
3. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=\vec{i}-\vec{j},\ \vec{c}=\vec{k}.$
4. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=\vec{i}-\vec{j},\ \vec{c}=\vec{j}.$

Ответ. 1) правая 2) левая 3) левая 4) векторы компланарны.

3.2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\vec{c}$ образующие тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}|$=4, $|\vec{в}|$ = 2, $|\vec{c}|$= 3, вычислить $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})$.

Ответ. 24.

3.3. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{c},\vec{a}\right]=0$, компланарны.

3.4. Даны три вектора $\vec{a}$ ={1, –1, 3}, $\vec{в}$ ={–2, 2, 1} и $\vec{c}$ ={3, –2, 5}. Вычислить $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})$.

Ответ.–7.

3.5. Установить компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\vec{c}$. В случае компланарности указать линейную зависимость между ними:

1) $\vec{a}$ ={2,3, –1}, $\vec{в}$ ={1,-1,3}, $\vec{c}$ ={1,9, –11}.

2) $\vec{a}$ ={3, –2,1}, $\vec{в}$ ={2,1,2}, $\vec{c}$ ={3, –1, –2}.

3) $\vec{a}$ ={2, –1,2}, $\vec{в}$ ={1,2, –3}, $\vec{c}$ ={3, –4,7}.

Ответ. 1) $-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}=0;$; 2) не компланарны; 3) $2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=0;$

3.6.Показать, что точки *A* (2, –1, -2), *B* (1, 2, 1), *C* (2, 3, 0) и *D* (5, 0, –6) лежат в одной плоскости.

3.7. Показать, что точки *A* (2, 1, –2), *B* (1, 2, 5), *C* (0, 0, 3) и *D* (3, 3, 0) лежат в одной плоскости. Разложить вектор $\overrightarrow{CD}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$. Ответ $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.

3.8. Показать, что точки *A* (1, –1, 10), *B* (0, 3, –4), *C* (–1, 1, 0) и *D* (2, 0, 9) лежат в одной плоскости. Разложить вектор $\overrightarrow{BA}$ по векторам $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Ответ. $\overrightarrow{BA}=5\overrightarrow{BC}/7+6\overrightarrow{BD}/7$

3.9. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

Ответ. 25 куб.ед.

3.10. Найти объем и высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, если за основание параллелепипеда взят параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{в}$.

Ответ. V = 49 куб.ед., $h=49/\sqrt{323}$ ед.дл.

3.11.Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках *A* (2, –1, 1), *B* (5, 5, 4), *C* (3, 2, –1), D(4, 1, 3).

Ответ V = 3 куб.ед.

3.12. Построить пирамиду с вершинами *A* (2, 0, 0), *B* (0, 3, 0), *C* (0, 0, 6), D (2, 3, 8), вычислить ее объем и высоту, опущенную на грань *ABC.*

Ответ. V = 14 куб.ед.; H= $\sqrt{14}$ ед.дл.

3.13. Построить пирамиду с вершинами *A* (5, 2, 0), *B* (2, 5, 0), *O* (0, 0, 0) и *C* (1, 2, 4), вычислить ее объем и высоту, опущенную из вершины *C*.

Ответ. V = 14 куб.ед.; H = 4 ед.дл.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. – М.: Физматлит, 2005. – 240 с.
2. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. – СПБ.: Лань, 2010. – 224 с.
3. *Минорский В.Н.* Сборник задач по высшей математике / В.Н. Минорский. – М.: Физматлит, 2010. – 335 с.
4. *Цубербиллер О Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О. Н. Цубербиллер. – СПБ.: Лань, 2007. – 336 с.
5. *Бахвалов С. В.* Сборник задач по аналитической геометрии / С. В. Бахвалов, П. С. Моденов, А. С. Пархоменко. – СПБ.: Лань, 2009. – 384 с.

Дополнительная литература

6. *Цепилевич Л. И.* Векторная алгебра. Методические указания / Л. И. Цепилевич. – Томск: Изд-во Томского архитектурно-строительного университета, 2001. – 82 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	3
Тема 1. Скалярное произведение двух векторов	4
1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы	4
2. Решение задач	6
3. Банк задач для самостоятельной работы	12
4. Варианты проверочных заданий	14
Тема 2. Векторное произведение двух векторов	16
1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы	16
2. Решение задач	18
3. Банк задач для самостоятельной работы	24
4. Варианты проверочных заданий	26
Тема 3. Смешанное произведение трех векторов	27
1. Ключевые вопросы теории. Краткие ответы	27
2. Решение задач	28
3. Банк задач для самостоятельной работы	35
Список рекомендуемой литературы	37
Оглавление	38